Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.853

УПРАВЛЕНИЕ ТОЧНОСТЬЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ШАГА В МЕТОДЕ НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

В.В.Калашников, Н.И.Калашникова

Рассмотрим нелинейную задачу дополнительности (НЗД): найти вектор $x \in R^n$ такой, что

$$x \geq 0,\ f(x) \geq 0,\ x^T f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f: R^n \to R^n$ и $f \in C^1(R^n)$. Методом Ньютона обычно называют [1,2] итерационный процесс, в котором по текущему приближению x^k находится приближение x^{k+1} как решение линейной задачи дополнительности (ЛЗД):

$$x \geq 0,\ w \equiv f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) \geq 0,\ x^T w = 0. \tag{2}$$

Таким образом, для выполнения k-го шага приходится, в свою очередь, привлекать тот или иной численный метод. При этом, как показано в работах [2,3], задачу (2) можно решать приближенно.

ЛЕММА 1 [3]. *Пусть отображение* $f \in C^1(R^n)$ *является сильно монотонным, т.е. существует скаляр* $\mu \geq 0$ *такой, что*

$$(f(x) - f(y), x - y) \geq \mu \|x - y\|^2 \tag{3}$$

для любых $x, y \in R^n$. *Тогда для всякого ограниченного выпуклого множества* $V \subset R^n$ *найдутся величины* $\lambda_V > 0$, $\delta_V > 0$ *такие, что для любых* x, y *из* V *имеют место неравенства*

$$\lambda_V \cdot \|x - y\| \leq \|h(x) - h(y)\| \leq \delta_V \cdot \|x - y\|. \tag{4}$$

Здесь $h(x) = \min\{x, f(x)\}$ — покомпонентный минимум векторов x и $f(x)$.

Таким образом, взяв в качестве y в (4) решение задачи (I) и учитывая, что $h(x^*) = 0$, имеем для сильно монотонного отображения f оценку

$$\lambda_V \cdot \|x - x^*\| \leq \|h(x)\| \leq \delta_V \cdot \|x - x^*\|. \tag{5}$$

Из нее следует, что в качестве эффективно вычислимого критерия близости текущего приближения x^k к решению x^* задачи (I) может быть взята величина $\eta_k = \|h(x^k)\|$. Далее, если $h_k(x) = \min\{x, f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k)\}$ — покомпонентный минимум векторов x и w, то в качестве приближенного решения x^{k+1} задачи (2) можно взять любой элемент из R^n, удовлетворяющий условию

$$\|h_k(x^{k+1})\| \leq \gamma_k, \tag{6}$$

где $\gamma_k > 0$ — некоторый скаляр.

Таким образом, получается двухуровневый процесс, в котором поведение приближений верхнего уровня $\{x^k\}$ зависит от точности γ_k решения (по правилу (6)) задачи нижнего уровня — задачи (2). Для случая, когда управляющий процесс осуществляется по формуле $\gamma_k = \xi_k \cdot \|h(x^k)\|^2$, где $\xi_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, а решение x^* задачи (I) регулярное, в работе [2] приведены условия на величины ξ_k, обеспечивающие локальную сходимость последовательности $\{x^k\}$ к x^* с квадратичной скоростью. В [3] при более слабых предположениях относительно отображения f найдены условия на скаляры ξ_k, при выполнении которых сходимость последовательности приближений $\{x^k\}$ к решению x^* имеет место при любом начальном $x^0 \in R^n$. В указанных работах предполагается априорный выбор последовательности $\{\xi_k\}$, определяющей точность выполнения внутренних шагов. В настоящей работе в рамках схемы, предложенной в [4], рассматривается вопрос об оптимизации (в определяемом ниже смысле) последовательности $\{\xi^k\}$. При этом получается процесс, в котором возникает обратная связь между выбором ξ_k и достигнутой к данному шагу внешнего процесса точностью η_k. В частности, пусть $f(x) = Bx + \varphi(x)$, где B — положительно определенная матрица с параметром ω (т.е. $u^T B u \geq \omega \|u\|^2 \; \forall u \in R^n$), $\varphi : R^n \to R^n$) принадлежит классу $C^{1,1}(R^n)$, а ее производная φ' удовлетворяет соотношению $\|\varphi'(x)\| \leq q \cdot \omega$ для всех $x \in R^n$, причем

$0 < q < 1/3$. Нетрудно проверить, что в этом случае справедлива оценка

$$\eta_{k+1} \leq \mathcal{L}\eta_k^2 + M\gamma_k \qquad (7)$$

с некоторыми константами $\mathcal{L} > 0$, $M > 0$. Неравенство (7) связывает конечную погрешность η_{k+1} k - го внешнего шага с его начальной погрешностью η_k и достигнутой точностью γ_k выполнения k-го шага.

В [4] задача определения оптимального γ_k решается следующим образом. При заданной конечной точности ε требуется определить число m шагов внешнего процесса и точности их выполнения γ_k , $k = 0,1,\ldots,m-1$, из следующей задачи на минимум:

$$\begin{cases} \min\left\{\max\limits_{\{\eta_k\}_{k=0}^{m-1}} \sum\limits_{k=0}^{m-1} C(\gamma_k,\eta_k),\ m \geq 1, \gamma_k > 0, k\ 0,1,\ldots,m-1\right\}; \\ \eta_{k+1} \leq \Psi(\eta_k,\gamma_k),\ k = 0,1,\ldots,m-1\ ; \\ \eta_m \leq \varepsilon, \end{cases} \qquad (8)$$

где $C(\gamma_k,\eta_k)$, $k=0,1,\ldots,m-1$, - зависимость трудоемкости решения задачи (2) от начальной погрешности η_k и конечной погрешности γ_k , а $\Psi(\eta_k,\gamma_k) = \mathcal{L}\eta_k^2 + M\gamma_k$ в нашем случае. Задача (8) решается при следующих естественных для линейно сходящегося метода решения задачи (2) предположениях относительно трудоемкости $C(\gamma_k,\eta_k)$:

1) $C(\gamma_k,\eta_k) = C_0(\gamma_k/\eta_k)$,

2) $C_0(q_1,q_2) = C_0(q_1) + C_0(q_2)$.

Эти условия единственным образом (с точностью до постоянного множителя) определяют вид функции $C(\gamma_k,\eta_k)$, а именно, $C(\gamma_k,\eta_k) = -D\ln(\gamma_k/\eta_k)$, где $D > 0$ - некоторая константа. Обосновывая условие 1), следует пояснить, что если в качестве начального приближения при реализации какого-либо метода решения задачи (2) взять x^k , то начальная погрешность этого метода в рамках нашей техники действительно будет равна η_k . В самом деле,

$$\|h_k(x^k)\| = \|\min\{x^k, f(x^k) + f'(x^k)(x^k - x^k)\}\| =$$

$$= \|\min\{x^k, f(x^k)\}\| = \|h(x^k)\| = \eta_k .$$

Далее, в [4] заменой переменных функция $\psi(\eta,\gamma)$ приводится к виду $\psi(\eta,\gamma)=\eta^2+\gamma$, и как уже отмечалось, мы считаем, что γ_k и η_k связаны формулой $\gamma_k = \xi_k\cdot\eta_k^2,\ k=0,1,\dots,m-1$. При помощи критерия динамического программирования получается связь между оптимальными значениями ξ_k и ξ_{k+1}, а именно, $\xi_{k+1}=2\,\xi_k$, и задача (8) переписывается в виде

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\cdot\prod\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{1+2^k\xi_0}{2^k\xi_0}\right) \longrightarrow \min\limits_{\xi_0,m}, \\ \eta_{k+1}=(1+2^k\cdot\xi_0)\cdot\eta_k^2, \quad k=0,1,\dots,m-1, \\ \eta_m=\varepsilon. \end{cases} \tag{9}$$

Если предположить, что число внешних шагов m достаточно велико, то условием целочисленности m можно пренебречь и обобщить задачу (9) на случай произвольного вещественного m. Для этого вводятся бесконечные произведения

$$P(\xi)=\prod_{i=0}^{\infty}(1+2^i\cdot\xi)^{\frac{1}{2^{i+1}\xi}} \quad \text{и} \quad \widetilde{P}(\xi)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+2^i\xi}{2^i\xi},$$

и обобщенная задача (9) формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{\eta_0}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\widetilde{P}(\xi_0)}{\widetilde{P}(2^k\xi_0)}\right) \longrightarrow \min\limits_{\xi_0,\,k>0}, \\ \left[\eta_0^{\frac{1}{\xi_0}}\cdot\dfrac{P(\xi_0)}{P(2^k\xi_0)}\right]^{2^k\cdot\xi_0} = \varepsilon. \end{cases}$$

Последняя задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \ln\eta_0+\xi_0\cdot\ln(P(\xi_0))=0, \\ \ln\varepsilon+2^k\cdot\xi_0\cdot\ln(2^k\xi_0)=0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, причем параметр ξ_0, а вместе с ним и $\gamma_0=\xi_0\cdot\eta_0^2$ зависят только от величины начальной погрешности η_0 и не зависят от того, какой точности ε мы

хотим достичь. Решение задачи (8) определяет точности для всего процесса решения задачи (I). Однако оптимизация проведена здесь при известной начальной погрешности ρ_0 и теоретических оценках (7). Поскольку в реальном процессе погрешности ρ_k, хотя и удовлетворяют оценке (7), но не реализуют обязательно наихудший вариант, то при практическом применении метода целесообразно использовать только величину γ_0. На следующем шаге задача о выборе точности ставится заново, исходя из новой достигнутой точности, и так далее.

Рассмотрим теперь конкретную реализацию приближенного метода Ньютона для решения задачи (I) с применением описанной выше схемы. Пусть имеется начальное приближение $x^0 \in R^n$ и константы $\mathcal{L}$ и M из формулы (7). Представим управляющий параметр γ_0, который требуется найти, в виде

$$\gamma_0 = \frac{\mathcal{L} \cdot \xi_0 \cdot \rho_0^2}{M} . \qquad \text{(I0)}$$

По известной начальной погрешности $\rho = \|h(x^0)\|$ параметр ξ_0 находится как решение уравнения

$$\ln(\mathcal{L}\rho_0) + \xi_0 \ln(\rho(\xi_0)) = 0,$$

после чего определяется величина γ_0 по формуле (I0). Затем находится точка x^1 из R^n такая, что $\|h_0(x^1)\| < \gamma_0$, и определяется фактическая новая погрешность $\rho_1 = \|h(x^1)\|$. С найденными x^1, ρ_1 процедура, описанная выше, повторяется. Если, наконец, для некоторого $k \in N$ окажется, что $\|h(x^k)\| < \varepsilon$, процесс завершается, а точка x^k берется за приближенное решение задачи (I).

Укажем теперь, как можно находить точку x^{k+1}, удовлетворяющую условию (6).

Опишем итеративный процесс, начинающийся, как уже отмечалось, с точки $z^0 = x^k \in R^n_+$. При этом, если $z^\ell \in R^n_+$ - текущая итерация, то $z^{\ell+1}$ строим по правилу

$$z^{\ell+1} = \left[z^\ell - \beta(Az^\ell + b)\right]_+, \qquad \text{(II)}$$

где $A = f'(x^k)$, $b = f(x^k) - f'(x^k)x^k$, $\beta > 0$ - некоторый скаляр. Если через $F_\beta(z)$ обозначим отображение, задаваемое формулой (II), то нетрудно убедиться, что его единственной неподвижной точкой на R^n_+ является точное решение y^{k+1} ЛЗД (2). Следовательно,

$$\|z^{\ell+1}-y^{k+1}\| = \|F_\beta(z^\ell)-F_\beta(y^{k+1})\| \le$$
$$\le \|(z^\ell-\beta A z^\ell-\beta b)-(y^{k+1}-\beta A y^{k+1}-\beta b)\| =$$
$$= \|(I-\beta A)\cdot(z^\ell-y^{k+1})\| \le \|(I-\beta A)\|\cdot\|z^\ell-y^{k+1}\|.$$

Оценим $\|I-\beta\cdot A\|$. Для всякого вектора z с $\|z\|=1$ в силу положительной определенности матрицы A получается оценка

$$z^T(I-\beta A^T)(I-\beta A)z = \|z\|^2-2\beta z^T A z+\beta^2\|Az\|^2 \le 1-2\beta\cdot\mu+\beta^2\|A\|^2.$$

Значит, $\|I-\beta A\|<1$, если

$$0<\beta<\frac{2\mu}{\|A\|^2}. \tag{12}$$

Поэтому при выполнении условия (12) F_β является отображением сжатия и имеет место сходимость приближений z^ℓ и y^{k+1} со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|z^{\ell+1}-y^{k+1}\| \le \sigma(\beta)\cdot\|z^\ell-y^{k+1}\|,\ \ell=0,1,\dots,$$

где

$$\sigma(\beta)=(1-2\beta\cdot\mu+\beta^2\|A\|^2)^{1/2}<1.$$

Кроме того, $\sigma(\beta)$ принимает минимальное значение при $\bar\beta = \mu/\|A\|^2$, тогда $\sigma(\bar\beta)=\bar\sigma=(1-\mu^2/\|A\|^2)^{1/2}$. Таким образом, $\|z^\ell-y^{k+1}\|\to 0$ при $\ell\to\infty$, и для любого фиксированного значения γ_k найдется номер $\ell_0\in N$ такой, что $\|h_k(z^{\ell_0})\|<\gamma_k$ в силу непрерывности $h_k(x)$. Тогда, в завершение описанного процесса, полагаем $x^{k+1}=z^{\ell_0}$.

Отметим, что при поиске приближения x^{k+1} можно использовать и методы градиентного типа для минимизации на R^n функции $g: R^n\to R^1$ из класса $C^1(R^n)$, которая имеет вид

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}\left[(x_j)_-^2+(w_j)_-^2+(x_j)_+^2\cdot(w_j)_+^2\right]. \tag{13}$$

ЛЕММА 2. Функция (13) имеет единственную стационарную точку y^{k+1} – точное решение ЛЗД (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (13) следует, что равенство $g'(x)=0$ эквивалентно соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{js}\left[(x_j)_+^2\cdot(A_jx+b_j)_+ + (A_jx+b_j)_-\right]=$$

$$=-(x_s)_- - (x_s)_+\cdot(A_sx+b_s)_+^2,\ s=1,2,\dots,n. \qquad (I4)$$

Здесь a_{js} - элемент матрицы $A\equiv f'(x^k)$, A_j - j-я строка этой матрицы, а вектор b равен $f(x^k)-f'(x^k)\cdot x^k$. Положив

$$u_j=(x_j)_+^2\cdot(A_jx+b_j)_+ + (A_jx+b_j)_-,\ j=1,2,\dots,n, \qquad (I5)$$
$$v_j=(x_j)_- + (x_j)_+\cdot(A_jx+b_j)_+^2,\ j=1,2,\dots,n,$$

можем переписать (I4) в векторной форме следующим образом:

$$A^Tu+v=0. \qquad (I6)$$

Далее, рассмотрим скалярное произведение

$$(u,v)=\sum_{j=1}^{n}u_jv_j=\sum_{j=1}^{n}\left[(x_j)_+^2(x_j)_-\cdot(A_jx+b_j)_+ +\right.$$
$$+(x_j)_+^3\cdot(A_jx+b_j)_+^3+(x_j)_-\cdot(A_jx+b_j)_- +$$
$$\left.+(x_j)_+\cdot(A_jx+b_j)_+^2\cdot(A_jx+b_j)_-\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left[(x_j)_+^3\cdot(A_jx+b_j)_+^3+(x_j)_-(A_jx+b_j)_-\right]\geq 0.$$

Таким образом, умножив равенство (I6) слева на u^T, получим $u^TA^Tu=u^TAu=-(u,v)\leq 0$. Но в силу положительной определенности A неравенство $u^TAu\leq 0$ влечет $u=0$, а значит, и $v=-A^Tu=0$. Тогда из соотношений (I5) следует, что для любого $j=1,2,\dots,n$ имеются лишь две возможности: либо $x_j\geq 0$ и $A_jx+b_j=0$, либо $A_jx+b_j\geq 0$ и $x_j=0$. Это означает, что x совпадает с y^{k+1} - точным решением ЛЗД (2), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Лебеговы множества $\Omega=\{x\in R^n: g(x)\leq t\}$ функции (I3) ограничены для любого $t\geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существует последовательность $\{x^k\}$ такая, что $x^k\in\Omega$ и

$\|x^k\| \longrightarrow +\infty$ при $k \to \infty$. Так как $g(x^k) \le t$, $k = 0,1,\dots$, то в силу (I3) можно считать, что найдутся непустое подмножество индексов $\mathcal{J} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ и константа $T > 0$ такая, что $x_j^k \longrightarrow +\infty$ при $k \to \infty$, $j \in \mathcal{J}$, $|x_j^k| \le T$, $k = 0,1,\dots, j \notin \mathcal{J}$. Проверим, что в этом случае найдется номер $\ell \in \mathcal{J}$ такой, что последовательность $\{A_\ell x^k\}$ является неограниченной сверху. Рассмотрим произвольный индекс $\ell \in \mathcal{J}$ и запишем

$$A_\ell x^k = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j^k = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{\ell j} x_j^k + \sum_{i \notin \mathcal{J}} a_{\ell i} x_i^k. \tag{I7}$$

Второе слагаемое в (I7) ограничено равномерно по k. Поэтому достаточно исследовать первое слагаемое $\nu_{\ell,\mathcal{J}}^k = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{\ell j} x_j^k$. Предположим, что найдется положительная величина d такая, что

$$\nu_{\ell,\mathcal{J}}^k \le d, \quad k = 0,1,\dots,$$

для всех $\ell \in \mathcal{J}$. В этом случае $x_\ell^k \cdot \nu_{\ell,\mathcal{J}}^k \le d x_\ell^k$, $\ell \in \mathcal{J}$, а значит,

$$\sum_{\ell \in \mathcal{J}} x_\ell^k \cdot \nu_{\ell,\mathcal{J}}^k \le d \sum_{\ell \in \mathcal{J}} x_\ell^k,$$

начиная с некоторого k_0. Но левая часть в этом неравенстве равна

$$\sum_{\ell \in \mathcal{J}} x_\ell^k \cdot \sum a_{\ell j} x_j^k = (x_{\mathcal{J}}^k)^T A_{\mathcal{J}\mathcal{J}} x_{\mathcal{J}}^k,$$

где $A_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ – главная подматрица A, образованная пересечением строк и столбцов с номерами из множества $\mathcal{J}$; $x_{\mathcal{J}}^k$ – часть вектора x^k с номерами компонент из множества $\mathcal{J}$.

Снова из положительной определенности $A_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ получаем цепочку

$$\mu \sum_{\ell \in \mathcal{J}} (x_\ell^k)^2 \le \sum_{\ell \in \mathcal{J}} \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{\ell j} x_\ell^k x_j^k \le d \sum_{\ell \in \mathcal{J}} x_\ell^k,$$

или

$$\frac{\mu}{d} \cdot \sum_{\ell \in \mathcal{J}} (x_\ell^k)^2 \le \sum_{\ell \in \mathcal{J}} x_\ell^k, \quad k \ge k_0.$$

Но это противоречит тому, что $x_\ell^k \longrightarrow +\infty$ при $k \to \infty$ и $\ell \in \mathcal{J}$. Следовательно, найдется номер $\ell \in \mathcal{J}$ и подпоследовательность $\{x^{k_s}\}$ такие, что $A_\ell x^{k_s} \longrightarrow +\infty$ при $s \longrightarrow \infty$. Значит, найдется номер $s_0 \in N$ такой, что для всех $s > s_0$ выполняет-

ся неравенство

$$A_\ell x^{k_s} + b_\ell \geq 1,$$

которое влечет соотношение

$$(x_\ell^{k_s})_+^2 \cdot (A_\ell x^{k_s} + b_\ell)_+^2 \longrightarrow +\infty \quad \text{при } s \to \infty.$$

Это противоречит ограниченности сверху последовательности $\{g(x^k)\}$. Значит, наше предположение о существовании неограниченной последовательности $\{x^k\}$ неверно, и лемма тем самым доказана.

ТЕОРЕМА [5]. Если множество $\Omega = \{z \in R^n : g(z) \leq t\}$ компактно для некоторого t и $z^0 \in \Omega$, то в методе скорейшего спуска $\lim\limits_{\ell\to\infty} g'(z^\ell) = 0$.

Как следует из леммы 3, указанная теорема применима к нашему случаю. Другими словами, для приближенного поиска решения y^{k+1} задачи (2) можно использовать градиентный метод скорейшего спуска, примененный к минимизации функции (I3) на R^n. При этом для полученной последовательности $\{z^\ell\}$ можно утверждать, что $\lim\limits_{\ell\to\infty} g'(z^\ell) = 0$. Но тогда из компактности множества $\Omega_0 = \{z \in R^n : g(z) \leq g(z^0)\}$ и из леммы 2 получаем, что последовательность $\{z^\ell\}$ сходится к точке y^{k+1} – единственной стационарной точке функции (I3). Таким образом, градиентный процесс можно оборвать, как только выполнится условие $\|h_k(z^\ell)\| < \gamma_k$.

Литература

I. Pang J.-S., Chan D. Iterative methods for variational and complementarity problems // Math. Programming. - 1982. - V.24, N 3. - P.284-3I3.

2. Pang J.-S. Inexact Newton methods for nonlinear complementarity problem // Math. Programming. - I986. - V.36, NI.- P.54-7I.

3. Калашников В.В., Калашникова Н.И. Глобальная сходимость неточного метода Ньютона для решения задачи дополнительности// Оптимизация. - I988. - Вып.42(59). - С.66-85.

4. Калашникова Н.И. Об оптимизации управления точностью в двухуровневом процессе// Оптимизация. - I982. - Вып. 29(46). С.5-2I.

5. Поляк Б.Т. Градиентные методы минимизации функционалов// Журн. вычислит. математики и мат. физики. - 1963. - Т.3, № 4. - С.643-653.

6. Megiddo N., Kojima M. On the existence and uniqueness of solutions in nonlinear complementarity theory // Math. Programming. - 1977. - V.12, N 1. - P.110-130.

7. Maugeri A. Convex programming, variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem // Appl. Mathematics and Optimization. - 1987. - V.16, N 2. - P. 169-185.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Далее приведены результаты применения рассмотренного приближенного метода Ньютона к тестовым нелинейным задачам дополнительности. При формулировании каждой задачи указана функция f, решение x^* и начальное приближение x^0.

ЗАДАЧА 1 [6]. $f_i(x) = x_i + \sum_{j=i+1}^{3} x_j^2$, $i = 1,2,3;$

$x^* = (0,0,0)$, $x^0 = (10,10,10)$.

ЗАДАЧА 2. $f_i(x) = x_i + \sum_{j=i+1}^{5} x_j^2$, $i = 1,2,3,4,5;$

$x^* = (0,0,0,0,0)$, $x^0 = (10,10,10,10,10)$.

ЗАДАЧА 3 [7]. $f : R^5 \longrightarrow R^5$ имеет компоненты

$$f_1(x) = 11x_1^2 + 22x_1x_2 + 20x_1x_3 + 20x_1x_4 + 22x_1x_5 + 75{,}6x_1 + 11x_2^2 +$$
$$+ 20x_2x_3 + 20x_2x_5 + 37x_2 + 10x_3^2 + 10x_3 + 20x_4x_5 + 10x_4 +$$
$$+ 11x_5^2 + 43x_5 - 2{,}83 + 10x_4^2;$$
$$f_2(x) = 11x_1^2 + 22x_1x_2 + 20x_1x_3 + 20x_1x_5 + 37x_1 + 11x_2^2 + 22x_2x_3 +$$
$$+ 20x_2x_4 + 20x_2x_5 + 74{,}2x_2 + 11x_3^2 + 20x_3x_4 + 41x_3 +$$
$$+ 10x_4^2 + 10x_4 + 10x_5^2 + 10x_5 - 1{,}12;$$

$$f_3(x) = 10x_1^2 + 20x_1x_2 + 20x_1x_3 + 10x_1 + 11x_2^2 + 22x_2x_3 + $$
$$+ 20x_2x_4 + 41x_2 + 11x_3^2 + 22x_3x_4 + 20x_3x_5 + 82{,}8x_3 + $$
$$+ 11x_4^2 + 20x_4x_5 + 45x_4 + 10x_5^2 + 10x_5 - 9{,}57;$$
$$f_4(x) = 10x_1^2 + 20x_1x_4 + 20x_1x_5 + 10x_1 + 10x_2^2 + $$
$$+ 20x_2x_3 + 20x_2x_4 + 10x_2 + 11x_2^2 + 22x_3x_4 + 20x_3x_5 + $$
$$+ 45x_3 + 11x_4^2 + 22x_4x_5 + 91{,}4x_4 + 11x_5^2 + 49x_5 - 19{,}68;$$
$$f_5(x) = 11x_1^2 + 20x_1x_2 + 20x_1x_4 + 22x_1x_5 + 43x_1 + $$
$$+ 10x_2^2 + 20x_2x_5 + 10x_2 + 10x_3^2 + 20x_3x_4 + $$
$$+ 20x_3x_5 + 10x_3 + 11x_4^2 + 22x_4x_5 + 49x_4 + 11x_5^2 + $$
$$+ 11x_5^2 + 90x_5 - 17{,}95.$$

Здесь $x^* = (0;\ 0;\ 0{,}018807;\ 0{,}135947;\ 0{,}114582;$ $x^0 = (0{,}1;$ $0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5)$.

Расчеты проводились на ЕС-1060 с длиной машинного слова 8 байт. Программа написана на языке ФОРТРАН ЕС ЭВМ. Следует отметить, что с целью ускорения работы описанного в основной части статьи алгоритма на практике производилось перевычисление приближенных констант $\mathcal{L}_k$ и M_k из оценки (7) после выполнения k-го шага следующим образом. Если $\eta_k = \|h(x^k)\|$, $\eta_{k+1} = \|h(x^{k+1})\|$, $\gamma_k = \xi_k \cdot \eta_k^2$, то сначала вычислялась величина $cor = \dfrac{\eta_{k+1}}{(1+\xi_k)\eta_k^2}$, а затем с помощью выбранного заранее параметра $\alpha \in [0,1]$ подсчитывались величины $\mathcal{L}_{k+1} = \alpha\mathcal{L}_k + (1-\alpha)cor$, $M_{k+1} = \alpha M_k + (1-\alpha)cor$. Кроме того, для приближенного нахождения решения ξ_k уравнения

$$\ln(\mathcal{L}_k \xi) + \xi \ln p(\xi) = 0$$

использовался метод деления пополам с конечной точностью (длиной интервала, содержащего точное решение), равной $\delta = 10^{-6}$.

В приводимых ниже таблицах данные метода I получены при ξ_k постоянной, равной I, что соответствует априорному подходу [2, 3]. Данные, полученные методом 2, содержат результаты счета с управлением, описанным в основной части. Использованы обозначения:

$\eta_k = \|h(x^k)\| = \|min(x^k, f(x^k))\|$ – критерий близости x^k к x^*;

ε – параметр окончания счета ($\eta_k < \varepsilon$) ;

$SC_k = \langle x^k, f(x^k) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(x^k)$ – скалярное произведение векторов x^k и $f(x^k)$;

N_1 – количество обращений к подпрограмме, вычисляющей градиент g' функции (I3);

N_2 – количество обращений к подпрограмме, вычисляющей значения g функции (I3);

N – общее количество вычислений значений функции f, g и градиента g' ;

$TRUD = \dfrac{N}{\lg \eta_0 - \lg \eta_k}$ – оценка трудоемкости процесса, выраженная в количестве вычислений, требующихся в среднем для понижения меры ошибки на I порядок.

Как видно из таблиц, приведенных ниже, применение управления на данных тестовых примерах обеспечило существенную экономию вычислений для достижения заданной точности по сравнению с методом I, где управление отсутствует.

Таблица I

Задача I

Метод I						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	$TRUD$
$0{,}9$	$0{,}857 \cdot 10^{0}$	$0{,}1775 \cdot 10^{4}$	2	51	53	$0{,}406 \cdot 10^{2}$
$0{,}7 \cdot 10^{-1}$	$0{,}673 \cdot 10^{-1}$	$0{,}455 \cdot 10^{-2}$	9	149	158	$0{,}655 \cdot 10^{2}$
$0{,}1 \cdot 10^{-1}$	$0{,}258 \cdot 10^{-2}$	$0{,}666 \cdot 10^{-5}$	13	104192	104205	$0{,}27 \cdot 10^{5}$
$0{,}21 \cdot 10^{-2}$	не хватило 30 минут					

Задача I

Метод 2						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	TRUD
0,9	$0{,}857\cdot 10^{0}$	$0{,}1775\cdot 10^{4}$	2	51	53	$0{,}406\cdot 10^{2}$
$0{,}7\cdot 10^{-1}$	$0{,}673\cdot 10^{-1}$	$0{,}455\cdot 10^{-2}$	9	149	158	$0{,}655\cdot 10^{2}$
$0{,}1\cdot 10^{-1}$	$0{,}502\cdot 10^{-2}$	$0{,}2524\cdot 10^{-4}$	11	13604	13615	$0{,}38\cdot 10^{4}$
$0{,}21\cdot 10^{-2}$	$0{,}149\cdot 10^{-2}$	$0{,}224\cdot 10^{-5}$	12	126208	126220	$0{,}31\cdot 10^{5}$
$0{,}1\cdot 10^{-3}$	$0{,}213\cdot 10^{-4}$	$0{,}454\cdot 10^{-9}$	15	438895	438910	$0{,}743\cdot 10^{5}$

Таблица 2

Задача 2

Метод I						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	TRUD
0,1	$0{,}229\cdot 10^{-1}$	$0{,}535\cdot 10^{-3}$	17	4677	4694	$0{,}157\cdot 10^{4}$
$0{,}125\cdot 10^{-1}$	$0{,}637\cdot 10^{-3}$	$0{,}406\cdot 10^{-6}$	22	5051265	5051287	$0{,}111\cdot 10^{7}$
$0{,}15\cdot 10^{-2}$	не хватило 130 минут					

Задача 2

Метод 2						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	TRUD
0,1	$0{,}395\cdot 10^{-1}$	$0{,}162\cdot 10^{-2}$	15	567	582	$0{,}211\cdot 10^{3}$
$0{,}25\cdot 10^{-1}$	$0{,}109\ 10^{-1}$	$0{,}119\cdot 10^{-3}$	17	5441	5458	$0{,}165\cdot 10^{4}$
$0{,}1\cdot 10^{-1}$	$0{,}647\cdot 10^{-2}$	$0{,}421\cdot 10^{-4}$	19	45050	45069	$0{,}127\cdot 10^{5}$
$0{,}25\cdot 10^{-2}$	$0{,}158\cdot 10^{-2}$	$0{,}249\cdot 10^{-5}$	23	972372	972395	$0{,}234\cdot 10^{6}$
$0{,}1\cdot 10^{-2}$	$0{,}344\cdot 10^{-3}$	$0{,}118\cdot 10^{-6}$	25	3836145	3836170	$0{,}797\cdot 10^{6}$

Т а б л и ц а   3

Задача 3

Метод I						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	$TRUD$
0,I	$0,398\cdot I0^{-1}$	$-0,753\cdot I0^{-1}$	288	5I93	548I	$0,43\cdot I0^{4}$
$0,I\cdot I0^{-1}$	$0,502\cdot I0^{-2}$	$0,932\cdot I0^{-3}$	I4039	266579	2806I8	$0,I29\cdot I0^{6}$
$0,I\cdot I0^{-2}$	$0,439\cdot I0^{-3}$	$-0,559\cdot I0^{-5}$	26I57	496564	52269I	$0,I62\cdot I0^{6}$
$0,I\cdot I0^{-3}$	$0,4I4\cdot I0^{-4}$	$-0,5I7\cdot I0^{-6}$	44I57	840062	8842I9	$0,2I\cdot I0^{6}$
$0,I\cdot I0^{-4}$	$0,399\cdot I0^{-5}$	$-0,498\cdot I0^{-7}$	70644	I348322	I4I8966	$0,27\cdot I0^{6}$

Задача 3

Метод 2						
ε	η_k	Sc_k	N_1	N_2	N	$TRUD$
0,I	$0,398\cdot I0^{-1}$	$-0,753\cdot I0^{-1}$	288	5I93	548I	$0,43\cdot I0^{4}$
$0,I\cdot I0^{-1}$	$0,703\cdot I0^{-2}$	$0,II\cdot I0^{-2}$	6083	II4409	I2049I	$0,59\cdot I0^{5}$
$0,I\cdot I0^{-2}$	$0,654\cdot I0^{-3}$	$0,3I9\cdot I0^{-3}$	6I34	II5240	I2I374	$0,39\cdot I0^{5}$
$0,I\cdot I0^{-3}$	$0,4II\cdot I0^{-4}$	$0,473\cdot I0^{-4}$.	64II	I2026I	I26672	$0,3\cdot I0^{5}$
$0,I\cdot I0^{-4}$	$0,323\cdot I0^{-5}$	$0,I48\cdot I0^{-5}$	6798	I27382	I34I80	$0,25\cdot I0^{5}$

Поступила в ред.-изд. отдел
I0.02.I988 г.