УДК 519.853+519.632

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА С $prox$-РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Р.В.Намм

Исследование методов решения вариационных неравенств эллиптического типа, как правило, проводится в предположении, что минимизируемый функционал является коэрцитивным в исходном гильбертовом пространстве H. Однако для ряда практически важных вариационных неравенств выполняется лишь ослабленное условие коэрцитивности, что приводит к необходимости построения алгоритмов решения с регуляризацией.

В предлагаемой работе изучается скорость сходимости метода решения с $prox$-регуляризацией, предложенного в [1].

§ 1. Линейная скорость сходимости

Пусть на некотором действительном гильбертовом пространстве H задан квадратичный функционал

$$J(u)=a(u,u)-2L(u),$$

где $a(u,v)$ - билинейная, симметрическая, ограниченная форма на $H\times H$, $L(v)$ - ограниченный линейный функционал на H.

Обозначим через $R=\{v:a(v,v)=0\}$ ядро квадратичной формы,

$$R^{\perp}=\{z\in H:\langle z,x\rangle=0\ \forall x\in R\},\ \widetilde{R}=\{z\in R:L(z)=0\},\ \widetilde{R}^{\perp}=\{z\in R:\langle z,x\rangle=0\ \ \forall x\in\widetilde{R}\}.$$

Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используется для обозначения скалярного произведения в H.

Пусть Q - оператор ортогонального проектирования пространства H на R, $P=I-Q$ (I - тождественный оператор).

Примем следующие предположения [2]:

а) форма $a(v,v)$ слабо коэрцитивна, т.е.

$$a(v,v) \geqslant \omega \|Pv\|^2 \ \forall v \in H,$$

где ω - некоторая положительная постоянная, не зависящая от v;

б) ядро R квадратичной формы $a(v,v)$ конечномерно.

Пусть G - некоторое выпуклое замкнутое множество в H.

Рассматривается задача

$$\left.\begin{aligned} &J(u) - \min! \\ &u \in G. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Предполагаем, что множество $G^* = \{u \in G : J(u) = \inf_{z \in G} J(z)\}$ непусто.

Пусть $Q_1 : H \to R$ - линейный непрерывный проектор (не обязательно ортогональный), $Q_2 = I - Q_1$.

Для решения задачи (I) рассматривается итерационный алгоритм с регуляризацией на каждом шаге:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I})\ \ u^0 \in G \ \text{ любое}; \\ &2)\ \ u^k = prox\, u^{k-1}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$prox\, u^{k-1} = \underset{u \in G}{\operatorname{argmin}} \{J(u) + \|Q_1 u - Q_1 u^{k-1}\|^2 +$$

$$+ \lambda \|Q_2 u - Q_2 u^{k-1}\|^2\}, \ \lambda > 0 - const.$$

Отметим, что методы решения конечномерных задач выпуклого программирования с использованием подобной регуляризации минимизируемого функционала исследовались рядом авторов (см., например, [3,4]). С незначительным видоизменением предложенный алгоритм рассматривался для решения вариационного неравенства, соответствующего задаче Синьорини [5-7].

В [I] показано, что последовательность $\{u^k\}$ сходится в норме H к некоторому элементу $u^* \in G^*$. Исследуем скорость сходимости метода.

Пусть B - единичная сфера в H. Примем относительно u^* следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Если для некоторого $s \in \tilde{R}$ при любом $\alpha > 0$ имеет место

$$u^* + \alpha s \in G,$$

то существует постоянная $\varkappa > 0$, зависящая от u^* и s,

такая, что

$$u^* + \alpha(s + \varkappa\tilde{s}) \notin G$$

для любого $\tilde{s} \in B$.

Отметим, что $\varkappa$ не зависит от α .

Пусть $\tilde{u}$ - произвольное решение задачи (I). Для точек u^k по условию оптимальности справедливо неравенство

$$a(u^k, \tilde{u} - u^k) + \langle Q_1 u^k, Q_1(\tilde{u} - u^k)\rangle + \lambda\langle Q_2 u^k, Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle \geq$$
$$\geq L(\tilde{u} - u^k) + \langle Q_1 u^{k-1}, Q_1(\tilde{u} - u^k)\rangle + \lambda\langle Q_2 u^{k-1}, Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle;$$
$$\langle Q_1 u^k, Q_1(\tilde{u} - u^k)\rangle - \langle Q_1 u^{k-1}, Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle + \lambda(\langle Q_2 u^k, Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle -$$
$$- \langle Q_2 u^{k-1}, Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle) \geq a(u^k, u^k - \tilde{u}) - L(u^k - \tilde{u});$$
$$\langle Q_1(u^k - u^{k-1}), Q_1(\tilde{u} - u^k)\rangle + \lambda\langle Q_2(u^k - u^{k-1}), Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle \geq$$
$$\geq a(u^k, u^k - \tilde{u}) - L(u^k - \tilde{u}) \geq \frac{1}{2}(J(u^k) - J(\tilde{u})) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a(u^k - \tilde{u}, u^k - \tilde{u}).$$

Так как

$$2[\langle Q_1(u^k - u^{k-1}), Q_1(\tilde{u} - u^k)\rangle + \lambda\langle Q_2(u^k - u^{k-1}), Q_2(\tilde{u} - u^k)\rangle] =$$
$$= \|Q_1(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2 - \|Q_1(u^k - u^{k-1})\|^2 - \|Q_1(u^k - \tilde{u})\|^2 + \lambda(\|Q_2(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2 -$$
$$- \|Q_2(u^k - u^{k-1})\|^2 - \|Q_2(u^k - \tilde{u})\|^2),$$

то

$$\|Q_1(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2 - (\|Q_1(u^k - u^{k-1})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^k - u^{k-1})\|^2) -$$
$$- (\|Q_1(u^k - \tilde{u})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^k - \tilde{u})\|^2) \geq J(u^k) - J(\tilde{u});$$
$$(\|Q_1(u^k - \tilde{u})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^k - \tilde{u})\|^2) + (\|Q_1(u^k - u^{k-1})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^k - u^{k-1})\|^2) +$$
$$+ J(u^k) - J(\tilde{u}) \leq \|Q_1(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^{k-1} - \tilde{u})\|^2. \qquad (3)$$

Тем самым для любых k и m имеем

$$\|Q_1(u^{k+m}-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^{k+m}-\tilde{u})\|^2 \le \|Q_1(u^k-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^k-\tilde{u})\|^2. \quad (4)$$

Далее, условимся, что $\tilde{R}^{\perp} \neq \emptyset$. Это предположение принято для удобства изложения и не повлияет на окончательный вывод.

Разложим u^k-u^* по ортогональным в H составляющим

$$u^k-u^*=\alpha_1^k\|u^k-u^*\|s_1^k+\alpha_2^k\|u^k-u^*\|s_2^k+\alpha_3^k\|u^k-u^*\|s_3^k,$$

где

$$s_1^k\in\tilde{R},\ s_2^k\in\tilde{R}^{\perp},\ s_3^k\in R^{\perp};\ \|s_1^k\|=\|s_2^k\|=\|s_3^k\|=1;\ (\alpha_1^k)^2+(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2=1.$$

Так как $\tilde{R}^{\perp}$ – одномерное множество [8, с.126], то в s_2^k можно опустить индекс k . По построению $\angle(s_2)\neq 0$. Далее, для определенности, положим $\angle(s_2)<0.$

Если при некотором i справедливо

$$(\alpha_2^i)^2+(\alpha_3^i)^2=0,$$

то

$$u^i-u^*=\alpha_1^i\|u^i-u^*\|\,s_1^i$$

или

$$u^i=u^*+\alpha_1^i\|u^i-u^*\|\,s_1^i.$$

Нетрудно видеть, что $u^i\in G^*$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}u^k=u^*$, то $u^i=u^*$, т.е. решение задачи (I) найдено за конечное число шагов. Ниже предполагаем, что

$$(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2\neq 0$$

при любом k .

ЛЕММА I. Для алгоритма (2) существует такое $\gamma>0$, что $(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2\geq\gamma$ для любого k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда из последовательности $\{(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2\}$ можно выбрать сходящуюся к нулю подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty}[(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2]=0.$$

Тем самым $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_1^k)^2=1.$

Последовательность $\{\alpha_1^k s_1^k\}$ ограничена и содержится в конечномерном пространстве $\tilde{R}$. Пусть $\tilde{s}_1$ – одна из предельных точек этой последовательности, т.е.

$$\tilde{s}_1 = \lim_{j\to\infty} \alpha_1^{k_j} s^{k_j}, \quad \tilde{s}_1 \in \tilde{R}.$$

Если для любого $\alpha > 0$ элемент

$$u^* + \alpha \tilde{s}_1 \notin G,$$

то по предположению существует $\varkappa > 0$ такое, что для любого $s \in \tilde{R}$ выполняется

$$u^* + \alpha(\tilde{s}_1 + \varkappa s) \notin G.$$

Имеем

$$u^{k_j} = u^* + \|u^{k_j} - u^*\| [\tilde{s}_1 + (\alpha_1^{k_j} s^{k_j} - \tilde{s}_1) + \alpha_2^{k_j} s_2 + \alpha_3^{k_j} s_3^{k_j}].$$

Так как $\alpha_2^{k_j} \to 0, \alpha_3^{k_j} \to 0$ при $j \to \infty$, то

$$\lim_{j\to\infty} [(\alpha_1^{k_j} s_1^{k_j} - \tilde{s}_1) + \alpha_2^{k_j} s_2 + \alpha_3^{k_j} s_3^{k_j}] = 0. \qquad (5)$$

Приняв теперь $\alpha = \|u^{k_j} - u^*\|$, нетрудно получить противоречие сделанному предположению. Тем самым существует $\alpha_0 > 0$, для которого

$$u^* + \alpha_0 \tilde{s}_1 \in G.$$

Из выпуклости множества G и определения G^* следует, что $u^* + \alpha\tilde{s}_1 \in G^*$ для любых $\alpha \in [0, \alpha_0]$.

Пусть $\|u^{k_j} - u^*\| \le \alpha_0$. Тогда $\tilde{u} = u^* + \|u^{k_j} - u^*\| \tilde{s}_1 \in G^*$. Положим $\tilde{p} = (\alpha_1^{k_j} s_1^{k_j} - \tilde{s}_1) + \alpha_2^{k_j} s_2 + \alpha_3^{k_j} s_3^{k_j}$. Имеем

$$u^{k_j} - \tilde{u} = \|u^{k_j} - u^*\| \tilde{p}.$$

Отсюда

$$\|Q_1(u^{k_j} - \tilde{u})\|^2 + \lambda \|Q_2(u^{k_j} - \tilde{u})\|^2 = \|u^{k_j} - u^*\|^2 \cdot [\|Q_1\tilde{p}\|^2 + \lambda\|Q_2\tilde{p}\|^2].$$

Из (5) следует, что при достаточно больших j

$$\|Q_1\tilde{p}\|^2 + \lambda\|Q_2\tilde{p}\|^2 < \frac{1}{2}.$$

Далее считаем, что при фиксированном выше j выполнено это неравенство. Тем самым

$$\|Q_1(u^{k_j} - \tilde{u})\|^2 + \lambda\|Q_2(u^{k_j} - \tilde{u})\|^2 < \frac{1}{2}\|u^{k_j} - u^*\|^2. \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$u^{k_{j+m}} = u^* + (u^{k_{j+m}} - u^*) = \tilde{u} + (u^* - \tilde{u}) + (u^{k_{j+m}} - u^*) = \tilde{u} - \|u^{k_j} - u^*\| \tilde{s}_1 + (u^{k_{j+m}} - u^*),$$

$$u^{k_{j+m}} - \tilde{u} = -\|u^{k_j} - u^*\| \tilde{s}_1 + (u^{k_{j+m}} - u^*),$$

$$\|Q_1(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2=\|-\|u^{kj}-u^*\|\tilde{s}_1+Q_1(u^{kj+m}-u^*)\|^2+$$

$$+\lambda\|Q_2(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2=\|u^{kj}-u^*\|^2-2\langle Q_1(u^{kj+m}-u^*),\tilde{s}_1\rangle\cdot\|u^{kj}-u^*\|+$$

$$+\|Q_1(u^{kj+m}-u^*)\|^2+\lambda\|Q_2(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2.$$

Легко видеть, что при достаточно больших m

$$\|Q_1(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2>\frac{1}{2}\|u^{kj}-u^*\|^2. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$\|Q_1(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^{kj+m}-\tilde{u})\|^2>\|Q_1(u^{kj}-\tilde{u})\|^2+\lambda\|Q_2(u^{kj}-\tilde{u})\|^2,$$

а это противоречит (4). Полученное противоречие завершает доказательство леммы I.

ЛЕММА 2. Для алгоритма (2) существует такое $\beta>0$, что

$$J(u^k)-J(u^*)\geq\beta\|u^k-u^*\|^2,\quad k=1,2,\dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, воспользуемся разложением u^k-u^* по ортогональным в H составляющим

$$u^k-u^*=\|u^k-u^*\|\cdot(\alpha_1^k s_1^k+\alpha_2^k s_2+\alpha_3^k s_3^k);$$

$$J(u^k)-J(u^*)=2\|u^k-u^*\|\left[\alpha_3^k a(u^*,s_3^k)-\alpha_2^k L(s_2)-\alpha_3^k L(s_3^k)\right]+$$

$$+(\alpha_3^k)^2\|u^k-u^*\|a(s_3^k,s_3^k)=2\|u^k-u^*\|\left[-\alpha_2^k L(s_2)+\right.$$

$$\left.+\alpha_3^k(a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k))\right]+(\alpha_3^k)^2\|u^k-u^*\|^2a(s_3^k,s_3^k). \tag{8}$$

Из условия оптимальности

$$\alpha_2^k L(-s_2)+\alpha_3^k(a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k))\geq 0. \tag{9}$$

По условию для билинейной формы $a(u,v)$ существует постоянная $M>0$, для которой

$$a(u,v)\leq M\|u\|\|v\|\quad\forall u,v\in H.$$

Кроме того, $a(s_3,s_3)\geq\omega$. Положим $\gamma_k=(\alpha_2^k)^2+(\alpha_3^k)^2$. По лемме I имеем $\gamma_k\geq\gamma>0$ для любого k. Дальнейший ход доказательства подобен рассуждениям, проведенным при доказатель-

стве теоремы в [7].

Если $\alpha_2^k < 0$, имеем из (9)

$$-\sqrt{\gamma_k-(\alpha_3^k)^2}\,L(-s_2)+\alpha_3^k(a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k)) \geq 0,$$

$$(\alpha_3^k)^2(a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k))^2 \geq (\gamma_k-(\alpha_3^k)^2)(L(-s_2))^2 \quad ,$$

$$(\alpha_3^k)^2((a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k))^2+(L(-s_2))^2) \geq \gamma_k(L(-s_2))^2 \; ,$$

$$(\alpha_3^k)^2 \geq \frac{\gamma_k(L(-s_2))^2}{((a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k))^2+(L(-s_2))^2} \geq \frac{\gamma(L(-s_2))^2}{(M\|u^*\|+\|L\|)^2+(L(-s_2))^2} \; .$$

Тем самым можно взять

$$\beta = \frac{\gamma(L(-s_2))^2}{(M\|u^*\|+\|L\|)^2+(L(-s_2))^2}\cdot\omega .$$

Пусть теперь $\alpha_2^k \geq 0$. Тогда

$$\alpha_2^k L(-s_2)+\alpha_3^k(a(u^*,s_3^k)-L(s_3^k)) \geq \alpha_2^k L(-s_2)-|\alpha_3^k|(M\|u^*\|+$$
$$+\|L\|)=\sqrt{\gamma_k-(\alpha_3^k)}\,L(-s_2)-|\alpha_3^k|(M\|u^*\|+\|L\|).$$

Введем в H новое скалярное произведение $\langle u,v\rangle_1=\langle Q_1u,Q_1v\rangle+$ $+\lambda\langle Q_2u,Q_2v\rangle$ и соответствующую норму $\|\cdot\|_1$, которая, как легко видеть, связана с $\|\cdot\|$ соотношением эквивалентности:

$$\frac{\min\{1,\lambda\}}{2}\|u\|^2 \leq \|u\|_1^2 \leq 2\max\{1,\lambda\}(1+\|Q_1\|)^2\|u\|^2.$$

Положим $d_1=\frac{\min\{1,\lambda\}}{2}$, $d_2=2\max\{1,\lambda\}(1+\|Q_1\|)^2$.

Из (3) следует

$$\|u^k-u^*\|_1 \leq \|u^{k-1}-u^*\|_1^2 \leq \ldots \leq \|u^0-u^*\|_1^2 \leq d_2\|u^0-u^*\|^2.$$

Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, решим относительно $\lambda_3^k=\alpha_3^k$ неравенство

$$\sqrt{\gamma_k-(\lambda_3^k)^2}\,\tau-|\lambda_3^k|\xi \geq \varepsilon\eta ,$$

где

$$\xi=M\|u^*\|+\|L\|,\quad \eta=\sqrt{d_2}\,\|u^0-u^*\|,\quad \tau=L(-s_2).$$

Имеем

$$\sqrt{\gamma_\kappa-(\lambda_3^\kappa)^2}\,\tau \geq |\lambda_3^\kappa|\xi+\varepsilon\eta,$$

$$(\gamma_\kappa-(\lambda_3^\kappa)^2)\tau^2 \geq (\lambda_3^\kappa)^2\xi^2+2|\lambda_3^\kappa|\xi\varepsilon\eta+\varepsilon^2\eta^2,$$

$$(\tau^2+\xi^2)(\lambda_3^\kappa)+2\xi\varepsilon\eta|\lambda_2^\kappa|+\varepsilon^2\eta^2-\gamma_\kappa\tau^2 \leq 0.$$

I. Пусть $\lambda_3^\kappa \geq 0$. Тогда

$$(\tau^2+\xi^2)(\lambda_3^\kappa)^2+2\xi\varepsilon\eta\lambda_3^\kappa+\varepsilon^2\eta^2-\gamma_\kappa\tau^2 \leq 0,$$

$$\left(\lambda_3^\kappa\right)_{1,2}=\frac{-\xi\varepsilon\eta\pm\sqrt{\gamma_\kappa(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}.$$

Решением неравенства будет

$$0 \leq \lambda_3^\kappa \leq \frac{-\xi\varepsilon\eta+\tau\sqrt{\gamma_\kappa(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2} \equiv \varkappa_1 \quad \left(\varkappa_1 \leq \sqrt{\gamma_\kappa}\right).$$

Так как $\lambda_3^\kappa \geq 0$, найдем те ε , при которых $\varkappa_1 > 0$:

$$0 < -\xi\varepsilon\eta+\tau\sqrt{\gamma_\kappa(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2},$$

$$\xi^2\varepsilon^2\eta^2 < \gamma_\kappa\tau^2(\tau^2+\xi^2)-\tau^2\varepsilon^2\eta^2,$$

$$\varepsilon^2\eta^2(\xi^2+\tau^2) < \gamma_\kappa\tau^2(\tau^2+\xi^2),$$

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{\gamma_\kappa}\,\tau}{\eta}.$$

2. Пусть теперь $\lambda_3^\kappa < 0$. Имеем

$$(\tau^2+\xi^2)(\lambda_3^\kappa)^2-2\xi\varepsilon\eta\lambda_3+\varepsilon^2\eta^2-\gamma_\kappa\tau^2 \leq 0,$$

$$(\lambda_3^\kappa)_{1,2}=\frac{\xi\varepsilon\eta\pm\tau\sqrt{\gamma_\kappa(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}.$$

Тем самым

$$\varkappa_2 \equiv \frac{\xi\varepsilon\eta-\tau\sqrt{\gamma_\kappa(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2} \leq \lambda_3^\kappa \leq 0 \left(\varkappa_2 \geq -\sqrt{\gamma_\kappa}\right).$$

Условие $\varkappa_2 < 0$ выполняется при тех же ε , что и в случае I:

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{\gamma_\kappa}\,\tau}{\eta}.$$

Теперь зафиксируем произвольное ε, $0<\varepsilon<\frac{\sqrt{\gamma_k}\tau}{l}$. Если

$$|\lambda_3^k| \leqslant \frac{-\xi\varepsilon l+\tau\sqrt{\gamma_k(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2 l^2}}{\tau^2+\xi^2},$$

то из (8) следует
$$J(u^k)-J(u^*)\geqslant 2\sqrt{d_1}\,\varepsilon\|u^k-u^*\|^2.$$

Если же

$$|\lambda_3^k| > \frac{-\xi\varepsilon l+\tau\sqrt{\gamma_k(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2 l^2}}{\tau^2+\xi^2},$$

то, с учетом (8), имеем

$$J(u^k)-J(u^*)\geqslant \omega\cdot\left(\frac{-\xi\varepsilon l+\tau\sqrt{\gamma_k(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2 l^2}}{\tau^2+\xi^2}\right)^2\cdot\|u^k-u^*\|^2.$$

Поэтому, учитывая, что $\gamma_k\geqslant\gamma$, в случае $\lambda_2^k\geqslant 0$ можно положить

$$\beta=\sup_{0<\varepsilon<\frac{\sqrt{\gamma}\tau}{l}}\min\left\{2\sqrt{d_1}\,\varepsilon,\ \omega\left(\frac{-\xi\varepsilon l+\tau\sqrt{\gamma(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2 l^2}}{\tau^2+\xi^2}\right)^2\right\}\equiv T>0.$$

Объединяя со случаем $\lambda_2^k<0$, окончательно получим

$$\beta=\min\left\{\frac{\gamma\tau^2}{\xi^2+\tau^2}\omega, T\right\}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 2 проведено в предположении, что $\widetilde{R}^{\perp}\neq\emptyset$. Если $\widetilde{R}^{\perp}=\emptyset$, то $(\alpha_3^k)^2\geqslant\gamma$ (по лемме I) и, следовательно, $\beta=\gamma\omega$. Поэтому утверждение леммы 2 остается в силе.

Из (3) теперь следует

$$\|u^k-u^*\|_1^2+\beta\|u^k-u^*\|^2\leqslant\|u^{k-1}-u^*\|_1^2;$$

$$\|u^k-u^*\|_1^2+\frac{\beta}{d_2}\|u^k-u^*\|_1\leqslant\|u^{k-1}-u^*\|_1^2;$$

$$\left(1+\frac{\beta}{d_2}\right)\|u^k-u^*\|_1^2\leqslant\|u^{k-1}-u^*\|^2;$$

$$\|u^k-u^*\|_1^2\leqslant\frac{1}{1+\frac{\beta}{d_2}}\|u^{k-1}-u^*\|_1^2=q^2\|u^{k-1}-u^*\|_1^2\leqslant q^{2k}\|u^0-u^*\|_1^2,$$

где $q = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\beta}{d_2}}}$. Отсюда

$$\sqrt{d_1}\,\|u^k-u^*\| \le \|u^k-u^*\|_1 \le q^k\|u^0-u^*\|_1 \le q^k\sqrt{d_2}\,\|u^0-u^*\|$$

или

$$\|u^k-u^*\| \le \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\,\|u^0-u^*\|q^k.$$

Тем самым доказана

ТЕОРЕМА. Для алгоритма (2) имеет место линейная скорость сходимости с постоянными

$$\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}\,\|u^0-u^*\| \quad \text{и} \quad q .$$

§ 2. Пример

При выводе утверждения о линейной скорости сходимости алгоритма (2) существенно использовалось предположение, принятое относительно решения u^* (см. лемму I). Это предположение требует обоснования. Рассмотрим для примера контактную задачу теории упругости [9,10].

Пусть $\Omega = \Omega' \cup \Omega'' \subset R^2$, где Ω' , Ω'' - открытые области с непрерывными по Липшицу границами $\partial\Omega'$, $\partial\Omega''$, причем $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$, $\Gamma_c = \partial\Omega' \cap \partial\Omega''$ - прямолинейный отрезок. Для $u^N = (u_1^N, u_2^N) \in [W_2^1(\Omega^N)]^2\ (N = {}', {}'')$ определим тензор

$$\varepsilon_{i,j}(u^N) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^N}{\partial x_i}\right),\ i,j = 1,2.$$

При фиксированных разбиениях $\partial\Omega' = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau' \cup \Gamma_c,\ \partial\Omega'' = \Gamma_\tau'' \cup \Gamma_c$ $(mes\,\Gamma_u > 0)$ и фиксированных функциях $C_{ijkl}^N \in L_\infty(\Omega^N)\ (i,j,k,l = 1,2;$ $c_{ijkl}^N = c_{jikl}^N = c_{klij}^N)$ требуется найти минимум функционала

$$J(u) = a(u,u) - 2L(u)$$

на множестве

$$G = \left\{u \in H : u_n'' - u_n' \le 0 \quad \text{на } \Gamma_c\right\},$$

где

$$a(u,v) = \int_{\Omega'} c'_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u')\varepsilon_{kl}(v')d\Omega + \int_{\Omega''} c''_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u'')\varepsilon_{kl}(v'')d\Omega,$$

$$L(u)=\int_{\Omega'} F_i' u_i' d\Omega + \int_{\Omega''} F_i'' u_i'' d\Omega + \int_{\Gamma_\tau'} T_i' u_i' d\Gamma + \int_{\Gamma_\tau''} T_i'' u_i'' d\Gamma,$$

$$F=(F',F'')\in[L_2(\Omega')]^2\times[L_2(\Omega'')]^2,\ T=(T',T'')\in[L_2(\Gamma_\tau')]^2\times[L_2(\Gamma_\tau'')]^2$$

– заданные вектор-функции,

$$H=\{u=(u',u''):u\in[W_2^1(\Omega')]^2\times[W_2^1(\Omega'')]^2,\quad u'=0 \text{ на } \Gamma_u\},$$

n – единичная нормаль к $\partial\Omega''$, внешняя относительно множества Ω''.

Ядро билинейной формы $a(u,v)$ имеет вид

$$R=\{z=(z',z''): z'\equiv 0,\ z_1''(x)=a_1''-b''x_2,\ z_2''(x)=a_2''+b''x_1\}.$$

Как установлено в [2], рассматриваемая задача разрешима, если $L(z)\leq 0$ для всех $z\in G\cap R$ и $L(z)<0$ при

$$z\in G\cap R,\quad z_n''-z_n'<0 \quad \text{на } \Gamma_c.$$

Перейдем к обоснованию принятого предположения. Положим $E=\{x\in\Gamma_c:(u_n'')^*-(u_n')^*=0\}$. Будем считать (см. [11]), что $E=E_1\cup E_2$; $mes\,E_i>0$, $i=1,2$; E_1, E_2 сосредоточены на концах отрезка Γ_c.

Пусть $s\in\widetilde{R}$ такое, что при любом $\alpha>0$

$$u^*+\alpha s\notin G.$$

Тогда из вида ядра R билинейной формы $a(u,v)$ и принятых выше предположений относительно множества E следует, что существует подмножество $E'(mes\,E'>0)$ множества E, на котором $s_n''>0$. Поэтому можно подобрать такое число $\widetilde{\beta}>0$ и множество $e\subset E'(mes\,e>0)$, что $s_n''\geq\widetilde{\beta}$ на e.

Возьмем произвольное $\widetilde{s}\in B$. По неравенству Чебышева [8, с.300] для любого $c>0$

$$mes\{x: x\in e,\ |\widetilde{s}_n''(x)-\widetilde{s}_n'(x)|\geq c\}\leq\frac{1}{c}\int_e|\widetilde{s}_n''-\widetilde{s}_n'|\,d\Gamma.$$

Имеют место неравенства

$$\int_e|\widetilde{s}_n'-\widetilde{s}_n''|\,d\Gamma\leq(mes\,e)^{1/2}\|\widetilde{s}_n''-\widetilde{s}_n'\|_{L_2(e)}\leq$$

$$\leq(mes\,e)^{1/2}(\|\widetilde{s}_n''\|_{L_2(e)}+\|\widetilde{s}_n'\|_{L_2(e)})\leq$$

$$\leq(mes\,e)^{1/2}(\|\widetilde{s}_n''\|_{L_2(\partial\Omega'')}+\|\widetilde{s}_n'\|_{L_2(\partial\Omega')})\leq$$

$$\leq c_1 \|\widetilde{S}\|_{[L_2(\partial\Omega')]^2 \times [L_2(\partial\Omega'')]^2} \leq c_2,$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные, не зависящие от $\widetilde{S}$. Тем самым имеем

$$mes\{x\in e: |\widetilde{S}_n''(x)-\widetilde{S}_n'(x)|\geq c\}\leq \frac{1}{c}\int_e |\widetilde{S}_n'-\widetilde{S}_n'|\,d\Gamma\leq \frac{c_2}{c}.$$

Возьмем $c=\frac{2c_2}{mes\, e}$. Тогда

$$mes\{x\in e: |\widetilde{S}_n''(x)-\widetilde{S}_n'(x)\geq \frac{2c_2}{mes\, e}\}\leq \frac{mes\, e}{2}.$$

Обозначая $e'=\{x\in e: |\widetilde{S}_n''(x)-\widetilde{S}_n'(x)|\geq \frac{2c_2}{mes\, e}\}$, имеем

$$|\widetilde{S}_n''(x)-\widetilde{S}_n'(x)|<\frac{2c_2}{mes\, e} \quad \text{на} \quad e\setminus e',$$

причем $mes(e\setminus e')\geq \frac{mes\, e}{2}>0.$

Возьмем $\varkappa$ таким, чтобы

$$\varkappa\cdot\frac{2c_2}{mes\, e}=\frac{\widetilde{\beta}}{2}.$$

Отсюда

$$\varkappa|\widetilde{S}_n''(x)-\widetilde{S}_n'(x)|<\frac{\widetilde{\beta}}{2} \quad \text{на} \quad e\setminus e'.$$

Для любого $\alpha>0$ элемент $u_\alpha=u^*+\alpha(S+\varkappa\widetilde{S})\notin G$, так как на множестве $e\setminus e'$ имеем

$$(u_\alpha'')_n-(u_\alpha')_n=\alpha[(S''+\varkappa S'')_n-\varkappa\widetilde{S}_n']=$$

$$=\alpha[S_n''+\varkappa(\widetilde{S}_n''-\widetilde{S}_n')]\geq\alpha(\widetilde{\beta}-\frac{\widetilde{\beta}}{2})=\frac{\alpha\widetilde{\beta}}{2}>0.$$

Следовательно, предположение относительно u^* выполнено.

Литература

1. Каплан А.А. Об устойчивости методов решения задач выпуклого программирования и вариационных неравенств // Модели и методы оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1988. – С.132-159.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974.
3. Антипин А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа.– М., 1979. – 74 с. (Препринт ВНИИ системных исследований).
4. Каплан А.А. Алгоритмы выпуклого программирования, использую-

щие сглаживание точных функций штрафа // Сиб. мат. журн. - 1982. - Т.23, № 4. - С.53-64.
5. Каплан А.А., Намм Р.В. К характеристике минимизирующих последовательностей для задачи Синьорини // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.273, № 4. - С.797-800.
6. Намм Р.В. О некоторых алгоритмах для решения задачи Синьорини// Оптимизация. - 1983. - Вып. 33(50). - С.63-78.
7. Намм Р.В. О скорости сходимости алгоритма с регуляризацией для решения задачи Синьорини // Оптимизация. - 1985. - Вып. 36(53). - С.56-62.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.
9. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования// Прикл. математика и механика. - 1978. - Т.42, вып.3. - С.466-474.
10. Haslinger J., Hlavacek I. Contact between elastic bodies // Aplikace matematiky. - 1980. - V.25, N 5.-1981. -V.26, N 4.
11. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.: Наука, 1980.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.06.1987 г.