Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 513.88

ОБ ИЗОМЕТРИЯХ НОРМИРОВАННЫХ РЕШЕТОК

Ю.А.Абрамович

Пусть нормированные решетки X и Y изометричны, т.е. существует (линейный) оператор T из X на Y такой, что $\|Tx\|=\|x\|$ для любого $x\in X$. Таким образом, метрические структуры пространств X и Y не различимы, хотя их порядковые структуры могут различаться очень значительно. Например, пространства l_2 и $L_2[0,1]$ изометричны, но первое из них дискретно, а второе не имеет ни одного орта. Однако если дополнительно допустить, что изометрия T положительна, то теорема I утверждает (это и есть основной результат заметки), что обратный оператор T^{-1} тоже положителен и тем самым T оказывается порядковой изометрией, т.е. изометрией и одновременно порядковым изоморфизмом. Отсюда в силу полученного в [I] представления α-изоморфизмов вытекает (теорема 7), что все положительные изометрии допускают мультипликативное представление.

В теореме 4 приведено обобщение теоремы I на нерешеточный случай.

В терминологии, относящейся к теории нормированных, в частности банаховых, решеток,следуем работе [2]. Вместо обозначений "векторная решетка", "нормированная решетка" или "банахова решетка" часто используем сокращения ВР, НР или БР соответственно.

ТЕОРЕМА I. *Пусть X и Y - нормированные решетки и T - изометрия X на Y. Тогда, если $T\geqslant 0$, то и $T^{-1}\geqslant 0$. Другими*

словами, всякая положительная изометрия одной НР на другую осуществляет порядковый изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $T(X_+)\subset Y_+$, то нам надо лишь показать, что $T(X_+)=Y_+$. Допустим противное, что существует $y\in T_+$ такой, что $y\notin T(X_+)$. Пусть $\|y\|=1$. Возьмем $x\in X$, для которого $Tx=y$. Тогда $\|x\|=1$ и $x\notin X_+$. Следовательно, $x_->0$. Также очевидно, что $x_+\neq 0$, ибо иначе $x=-x_-<0$, и тогда $y=Tx=-Tx_-<0$. Положим $y_1=Tx_+$, $y_2=Tx_-$. Тогда $y_1>0$, $y_2>0$ и при этом $y=y_1-y_2>0$. Кроме того, $T(x_++x_-)=y_1+y_2$, и поэтому

$$\|y_1+y_2\|=\|x_++x_-\|=\|x_+-x_-\|=\|x\|=1. \qquad (\mathrm{I})$$

Докажем по индукции, что для любого $k=1,2,\ldots$

$$\|x_++kx_-\|=1. \qquad (2)$$

При $k=1$ (2) следует из (I). Пусть (2) доказано для k и докажем его для $k+1$.

Рассмотрим элемент $x_+-(k+1)x_-$. Имеем $T(x_+-(k+1)x_-)=$ $=y_1-(k+1)y_2$. Очевидно следующее неравенство:

$$-(y_1+ky_2)\leq y_1-(k+1)y_2\leq y_1+ky_2,$$

поэтому $|y_1-(k+1)y_2|\leq y_1+ky_2$. Отсюда

$$\|y_1-(k+1)y_2\|\leq\|y_1+ky_2\|=\|T(x_++kx_-)\|=\|x_++kx_-\|=1.$$

Но тогда

$$\|x_+-(k+1)x_-\|=\|T^{-1}(y_1-(k+1)y_2)\|\leq 1.$$

И, следовательно,

$$\|x_++(k+1)x_-\|=\|x_+-(k+1)x_-\|\leq 1.$$

Так как неравенство $\|x_++(k+1)x_-\|\geq 1$ выполняется тривиальным образом, то $\|x_++(k+1)x_-\|=1$. Тем самым (2) доказано при всех k. Но тогда $x_-=0$, что противоречит нашему допущению. Итак, $T(X_+)=Y_+$. Теорема доказана полностью.

Как следует из доказательства, нами фактически показано следующее несколько более сильное утверждение, справедливое

и для изометрий, действующих "в".

ТЕОРЕМА I$'$. Пусть T - положительная изометрия из НР X в НР Y. Тогда T^{-1} тоже положителен на $T(X)$, т.е. $Tx \geq 0$ в Y влечет, что $x \geq 0$. Тем самым T осуществляет порядковый изоморфизм X на образ $T(X)$, который, вообще говоря, не обязательно векторная подрешетка в Y.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X - нормированное пространство и K_1, K_2 - два конуса в X, удовлетворяющие следующим условиям:

I) (X, K_1) есть НР;

2) (X, K_2) есть НР;

3) $K_1 \subset K_2$.

Тогда $K_1 = K_2$.

Действительно, тождественный оператор $j: (X, K_1) \to (X, K_2)$ является положительной изометрией и, следовательно, применима теорема I.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие перестает быть верным, если в 2) предполагать только, что (X, K_2) есть ВР. Примем за X пространство $AC[0,1]$ всех абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$ с нормой $\|x\|_X = |x(0)| + \|x'\|_{L^1[0,1]}$. Положим

$$K_2 = \{x \in X : \ x(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]\};$$

$$K_1 = \{x \in K_2 : x \text{ монотонно возрастает на } [0,1]\}.$$

Тогда (X, K_1) есть НР (даже БР), (X_2, K_2) есть ВР, но при этом $K_1 \subset K_2$ и $K_1 \neq K_2$.

Переходя к сопряженному пространству с сопряженными конусами K_1^* и K_2^*, получаем пример, показывающий, что и в I) нельзя ограничиться только решеточными требованиями (без связи нормы и порядка).

Предыдущие результаты допускают некоторое обобщение также на нерешеточный случай. Напомним два определения. Пусть X - нормированное пространство, упорядоченное (замкнутым, собственным) конусом K. Говорят, что в X выполнено интер-

поляционное свойство Рисса (ИСР), если для любых $a_i, b_j \in K$ $(i,j=1,2)$ из $a_i \leq b_j$ следует существование такого $c \in K$, что $a_i \leq c \leq b_j$ $(i,j=1,2)$.

Если (X,K) есть ВР, то ИСР выполняется очевидным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [3]. (X,K) удовлетворяет (D), если выполнены следующие два условия:

(I) $\forall x, y \in X$ $(-x \leq y \leq x) \Rightarrow \|y\| \leq \|x\|$;

(2) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists y \in K$ такой, что $-y \leq x \leq y$ и $\|y\| \leq \|x\| + \varepsilon$.

Дэвис доказал [3], что совместное выполнение (D) и (ИСР) влекут, что (X^*, K^*) есть БР.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (X, K_X) и (Y, K_Y) - упорядоченнные банаховы пространства с (D) и (ИСР) и T - положительная изометрия X на Y. Тогда T есть порядковый изоморфизм, т.е. $T(K_X) = K_Y$.

ДОКАЗАТЕЛСЬВО. Рассмотрим $T^*: (Y^*, K_Y^*) \to (X^*, K_X^*)$. Очевидно, T - положительная изометрия Y^* на X^*. В силу упомянутого выше результата Дэвиса Y^* и X^* суть банаховы решетки и, следовательно, для T^* выполнены условия теоремы I. Тем самым $T^*(K_Y^*) = K_Y^*$. Но отсюда следует, что $T(K_X) = K_Y$. Действительно, $K_Y = K_Y^{*o} = (K_Y^*)^o = (T^{*-1}(K_X^*))^o = T(K_X^{*o}) = T(K_X)$, где значком "$\circ$" обозначается соответствующая поляра.

Мы не останавливаемся на формулировке следствия, подобного следствию 2.

Если T есть порядковый изоморфизм (соответственно порядковая изометрия) НР X на НР Y, то T^* есть порядковый изоморфизм (соответственно порядковая изометрия) Y^* на X^*. Хорошо известно, что существование порядкового изоморфизма между Y^* и X^* не влечет, вообще говоря, порядковой изоморфности X и Y. Оказывается, что даже существование порядковой изометрии между X^* и Y^* не влечет не только изометричности, но и изоморфности X и Y. Приведем простой пример, потверждающий сказанное.

Пусть $X = c_0 \oplus \ell_\infty$ с нормой $\|(u,v)\|_X = \max(\|u\|_{c_0}, \|v\|_{\ell_\infty})$ и $Y = (\ell_\infty, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$. Тогда $Y^* = (\ell_\infty)^*$ и $X^* = \ell_1 \oplus_1 (\ell_\infty)^*$. Так как $(\ell_\infty)^*$ содержит в качестве ℓ_1-слагаемого полосу ℓ_1, то очевидно, что X^* порядково-изометрично Y^*.

Однако X не изоморфно Y, хотя бы потому, что в X имеется дополняемое c_0, а в Y такового не существует.

В дополнение к примеру (приведенному во введении) изометричных, но не порядково-изоморфных БР упомянем еще несколько подобных примеров, показывающих, что и многие другие часто используемые порядковые свойства или условия не сохраняются произвольными изометриями (хотя сохраняются порядковыми изометриями).

1) Существуют изометричные банаховы K-пространства такие, что в одном из них есть слабая единица, а в другом таковой нет. Достаточно взять $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$ с конечной несепарабельной мерой и $l_2(I)$ с подходящим множеством индексов.

2) Из сказанного в 1), в частности, следует, что даже изометрии "на", вообще говоря, не сохраняют дизъюнктность, хотя если изометрия "на" положительна, то по теореме 1 она сохраняет дизъюнктность, будучи порядковым изоморфизмом. Если же T есть изометрия "в", то она не обязана сохранять дизъюнктность даже в предположении, что $T\geqslant 0$. Однако, как заметил А.С.Векслер, в одном специальном случае (см. следствие 6) для положительных изометрий "в" удается получить позитивный результат.

3) Существуют изометричные БР X и Y такие, что в X норма строго монотонна $(|x|<|y|\Rightarrow\|x\|<\|y\|)$, а в Y нет, причем ни X, ни Y не содержат двумерной подрешетки l_∞^2.

Следующая лемма дополняет сказанное в теореме 1$'$.

ЛЕММА 5. Пусть Y - НР со строго монотонной нормой и пусть Y_1 - линейное подпространство в Y с индуцированными из Y порядком и нормой. Если Y_1 является НР, то Y_1 есть векторная подрешетка в Y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что каковы бы ни были дизъюнктные в Y_1 элементы $y_1,y_2\in Y_1^+=Y_1\cap Y^+$, они являются также дизъюнктными в Y. Из дизъюнктности указанных элементов в Y следует, что

$$\|y_1+y_2\|=\|y_1-y_2\|. \qquad (*)$$

С другой стороны, для указанных элементов в Y имеем

$$|y_1-y_2|_Y=|(y_1-y)-(y_2-y)|_Y\leq y_1-y+y_2-y<y_1+y_2.$$

Но тогда в силу строгой монотонности нормы

$$\|y_1-y_2\|<\|y_1+y_2\|,$$

что противоречит (ж). Таким образом, дизъюнктность в Y_1 влечет дизъюнктность в Y, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 6 (А.С.Векслер). Если T есть положительная изометрия НР X в НР Y, норма в которой строго монотонна, то T сохраняет дизъюнктность, т.е. из $|x_1|\wedge|x_2|=0$ следует, что $|Tx_1|\wedge|Tx_2|=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I′ T есть порядковая изометрия X на НР $T(X)$, являющуюся подпространством в Y с индуцированными из Y нормой и порядком. По лемме 5 $T(X)$ есть векторная подрешетка в Y, следовательно, дизъюнктность в $T(X)$ и в Y совпадают.

Напомним [I, 4], что линейный оператор T, действующий из ВР X в ВР Y, допускает мультипликативное представление (м.п.), если существуют компакты $B(X)$ и $B(Y)$, замкнутое подмножество $E\subset B(Y)$, непрерывное отображение τ из E в $B(X)$ и функция $\alpha\in D_\infty(E)$ такие, что

(а) X (соответственно Y) допускает представление на $B(X)$ (соответственно $B(Y)$);

(б) $\forall x\in X,\ \forall t\in B(Y)$

$$(Tx)(t)=\begin{cases}\alpha(t)x(\tau(t)), & t\in E,\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

В [I] было доказано, что коль скоро T допускает м.п. на каких-нибудь реализационных компактах, то T допускает м.п. и на канонических (стоуновых) компактах $Q(X)$, $Q(Y)$.

Как хорошо известно, любые изометрии пространств $C(K)$ (K- компакт) и пространств $L_p[0,1]$ $(1\leq p\neq 2<\infty)$ допускают м.п. Следующая теорема, суммируя полученные в заметке результаты, показывает, что подобное представление имеет место для положительных изометрий в любых НР.

ТЕОРЕМА 7. Пусть X и Y - НР и $T: X \to Y$ - положительная изометрия, причем выполнено одно из следующих (не исключающих друг друга) условий:

(а) T - изометрия "на";

(б) в Y норма строго монотонна.

Тогда T допускает м.п.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) В силу теоремы I, T есть порядковый изоморфизм и, значит, применима теорема 4.I из [I], обеспечивающая м.п. таких операторов.

(б) В силу леммы 5 и теоремы I$'$, T есть порядковый изоморфизм из X на векторную подрешетку $T(X)$ векторной решетки Y и опять применима теорема 4.I из [I] (см. также [I], замечание после следствия на с.32).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что всякий оператор T, допускающий м.п., является d-гомоморфизмом $(|x_1| \wedge |x_2| = 0 \Rightarrow |Tx_1| \wedge |Tx_2| = 0)$. В [4] указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы d-гомоморфизм допускал м.п., и показано, что всякий непрерывный d-гомоморфизм НР X в НР Y им удовлетворяет (по крайней мере на каждом идеале). Отсюда следует, что всякая изометрия, сохраняющая дизъюнктность, допускает м.п., во всяком случае на каждом главном идеале. В заключение отметим, что не всякая изометрия одной БР на другую является d-гомоморфизмом и, тем самым, описание таких изометрий уже не может быть получено в рамках мультипликативного представления.

ЛИТЕРАТУРА

I. АБРАМОВИЧ Ю.А., ВЕКСЛЕР А.И., КОЛДУНОВ А.В. Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения.-Л., 1981, с.13-34.

2. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1977.

3. Davies E.B. The structure and ideal theory of the predual of a Banach lattice.-Trans AMS.-1969.-V.131,N2.-P.544-555.

4. Abramovich Yu.A. Multiplicative representation of disjointness preserving operators.- Proc. Nederl. Acad. Sci. (A).- 1983.- V.86, N3.- P.265-279.

Поступила в ред.-изд. отдел

12.01.1986 г.