Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

УДК 519.8

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗНАЧЕНИЯ ПО ШЕПЛИ

Г.Н.Дюбин

В 1953 г. Шепли [1] определил отображение, ставящее в соответствие каждой функции v, заданной на семействе подмножеств конечного множества I (эта функция у Шепли удовлетворяет ряду естественных ограничений), некоторую меру φ на I. Мера φ естественным образом определялась аксиомами, предложенными Шепли. В теории игр элементы множества I называются игроками, подмножества $S \subset I$ - коалициями игроков, величина $v(S)$ определяет гарантированный выигрыш коалиции S, если игроки, входящие в коалицию, действуют совместно. Мера, сопоставляемая функции v, - то распределение выигрыша коалиции, состоящей из всех игроков, справедливость которого и обосновывается заданными аксиомами. Мера φ в дальнейшем была названа вектором Шепли или значением по Шепли.

Работа Шепли способствовала появлению значительного числа статей, посвященных этой тематике. Был предложен ряд других подходов, в том числе и вероятностных, к определению дележа Шепли. Возможности использования этих подходов в случае бесконечного числа игроков для построения дележа Шепли детально проанализированы в фундаментальной монографии Аумана и Шепли [2]. В частности, в [2] было показано, что для одного класса экономических моделей значение по Шепли при достаточно общих условиях совпадает с конкурентным равновесием, что и предопределило интенсивное изучение этого круга вопросов (см. обзор Аумана в [3]).

Однако в монографии [2] оставался в стороне первоначальный подход к определению дележа Шепли, основанный на представлении функции v в виде линейной комбинации так называемых простей-

ших функций. Для случая, когда все игроки одинаково значимы, а число игроков счетно, вопрос существования и единственности с достаточной полнотой был исследован в [4] как раз на основе первоначального подхода Шепли. В настоящей работе делается попытка применения такого подхода для достаточно общей ситуации*).

I. Изложим схему построения дележа Шепли в конечном случае. Пусть $I=\{1,2,\dots,n\}$ – конечное множество игроков; v – функция, заданная на Ω – множестве всех подмножеств игроков. Пусть $s\in\Omega$ – некоторая коалиция. Через Ω_s будем обозначать множество всех подмножеств коалиции s. Определим на Ω меру ν, полагая $\nu(\Omega_s)=v(s)$, а затем продолжая ее на все Ω. Легко видеть, что алгебра, порожденная множествами Ω_s, содержит все элементы Ω. Тогда, очевидно,

$$v(s)=\int\limits_{\Omega} v_t(s)\,\nu(dt), \tag{I}$$

где

$$v_t(s)=\begin{cases} \text{I, если } s\supseteq t, \\ \text{0 в противном случае.}\end{cases}$$

Действительно, при фиксированном s функция v_t равна единице на всех подмножествах $t\subseteq s$ и нулю в противном случае, поэтому $\nu(\Omega_s)=v(s)$. Равенство (I) не что иное, как представление характеристической функции в виде линейной комбинации простейших характеристических функций, полученное Шепли [I]. Теперь, если сопоставим каждой простейшей функции v_t меру φ_t на I, то, пользуясь аксиомой линейности, сможем сопоставить и любой характеристической функции v меру φv на I, полагая

$$\varphi v(s)=\int\limits_{\Omega}\varphi_t(s)\,\nu(dt). \tag{2}$$

Формула (2) представляет меру φv в виде линейной комбинации мер φ_t. Шепли считал, что все игроки равнозначны, и поэтому из аксиом симметрии и эффективности следовало, что функции v_t сопоставляется равномерно распределенная вероятно-

*) Близкая в некоторых отношениях схема использовалась в [5] для случая, когда множество I является метрическим компактом.

стная мера на t. Если с самого начала на I задана некоторая вероятностная мера μ, то функции v_t естественно сопоставить относительную меру, определяемую равенством

$$\varphi_t(s) = \begin{cases} \mu(s \cap t)/\mu(t), & \text{если } s \cap t \neq 0, \mu(t) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

И в этом случае формула (2) определит некоторую меру φv.

Изложенный метод построения меры φv по существу не отличается от предложенного Шепли, однако акцент здесь перенесен на вопрос о продолжении меры ν с подмножеств вида Ω_s на все подмножества множества Ω. Когда на Ω мера ν уже задана, формула (2) становится очевидной, в то время как Шепли дает явное представление, что требует некоторых комбинаторных подсчетов. Далее только что предложенная схема построения дележа Шепли будет распространяться на бесконечный случай.

2. Пусть X - носитель некоторой вероятностной меры μ, заданной на σ-алгебре борелевских множеств отрезка $[0,1]$. Обозначим через Ω топологическое пространство классов борелевских μ-эквивалентных подмножеств множества X. Топология на Ω определяется метрикой $\rho(s,t) = \mu(s \triangle t)$, где $s,t \in \Omega$, а $\mu(s \triangle t)$ - мера симметрической разности элементов s и t (более точно, $\mu(s \triangle t)$ полагается равной $\mu(\bar{s} \triangle \bar{t})$, где $\bar{s}$ и $\bar{t}$ - соответственно представители классов s и t; очевидно, что величина $\mu(s \triangle t)$ определена, т.е. не зависит от множеств $\bar{s}$ и $\bar{t}$). На множестве Ω можно задать частичный порядок следующим образом: $s \leq t$ тогда и только тогда, когда найдутся такие представители $\bar{s}$ и $\bar{t}$, что $\bar{s} \subset \bar{t}$. Через $s+t$ будем обозначать класс, представителем которого является множество $\bar{s} \cup \bar{t}$, а через $s \cdot t$ - класс, представителем которого является множество $\bar{s} \cap \bar{t}$.

Пусть v - вещественнозначная функция, заданная на Ω. Везде далее будем считать, что $v(\emptyset) = 0$, где $\emptyset$ - пустое множество. Кроме того, будем считать, что функция v непрерывна сверху относительно частичного порядка на Ω, т.е. если $s_n \to s$, $s_{n+1} \leq s_n$, то $v(s_n) \longrightarrow v(s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пара (Ω, v) называется кооперативной игрой, а функция v - характеристической функцией этой игры.

3. Положим $\Omega_s=\{t: t\leq s, t\in\Omega\}, s\in\Omega$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, которая порождается всеми подмножествами пространства Ω вида Ω_s, $s\in\Omega$. Любой элемент $a\in\mathcal{A}$ определяет индикаторную функцию

$$\chi_a(s)=\begin{cases}1, & s\in a,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любого элемента $a\in\mathcal{A}, a\neq\emptyset$, его индикаторная функция χ_a единственным образом представляется в виде

$$\chi_a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{\Omega_{s_i}},\ s_i\neq\emptyset, \tag{3}$$

где n – натуральное число, зависящее от элемента $a\in\mathcal{A}$, $s_i\in\Omega$, s_i попарно различны, $\{\alpha_i\}$ – набор целых чисел, отличных от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала существование представления (3) для любого элемента $a\in\mathcal{A}$. Если $a=\Omega_s$, то $\chi_a=\chi_{\Omega_s}$ и, следовательно, представление (3) для таких элементов алгебры существует. Далее, если

$$\chi_{a_1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^1\chi_{\Omega_{s_i^1}} \quad\text{и}\quad \chi_{a_2}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2\chi_{\Omega_{s_j^2}},$$

$$s_i^1, s_i^2\in\Omega,$$

то

$$\chi_{a_1\cap a_2}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^1\chi_{\Omega_{s_i^1}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2\chi_{\Omega_{s_j^2}}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i^1\alpha_j^2\chi_{\Omega_{s_i^1}}\chi_{\Omega_{s_j^2}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i^1\alpha_j^2\chi_{\Omega_{s_i^1\cdot s_j^2}},$$

так как $\chi_{\Omega_s}\cdot\chi_{\Omega_t}=\chi_{\Omega_{s\cdot t}}$.

Следовательно, индикаторная функция пересечения элементов алгебры a_1 и a_2 представима в виде (3), если каждый из этих элементов представим в таком виде. Ввиду того, что $\chi_{a_1\cup a_2}=$ $=\chi_{a_1}+\chi_{a_2}-\chi_{a_1\cap a_2}$ аналогичное утверждение справедливо и для объединения элементов алгебры $\mathcal{A}$. Представимость дополнения очевидна.

Докажем единственность представления (3). Пусть для некоторого элемента $a \in \mathcal{A}$ представление (3) не единственно. Тогда существует набор целых не равных нулю чисел $\beta_i, i=1,\dots,n$, и набор непустых попарно различных элементов t_i, $t_i \in \Omega$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{\Omega_{t_i}} = 0.$$

Пусть t_{i_0} - максимальный из элементов t_i относительно порядка $\leq$. Очевидно, что значение функции, стоящей слева, в точке t_{i_0} равно β_{i_0}, что приводит к противоречию $\beta_{i_0} = 0$. Это доказывает предложение I.

В силу предложения I на алгебре $\mathcal{A}$ можно задать, вообще говоря, конечно-аддитивную меру ν, полагая

$$\nu(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v(s_i),$$

где s_i - элементы правой части формулы (3).

Элемент $b \in \mathcal{A}$ назовем правильным, если он равен $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{s_i}$, $s_i \in \Omega$, и каждое s_i максимально по отношению $\leq$ в семействе $\{s_i\}_1^n$. Очевидно, что индикаторная функция правильного элемента представима в виде

$$\chi_b = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Omega_{s_i}} - \sum_{i>j}^{n} \sum^{n} \chi_{\Omega_{s_i \cdot s_j}} + \dots + (-1)^{n-1} \chi_{\Omega_{s_1 \cdot \ldots \cdot s_n}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Индикаторная функция каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ единственным образом представима в виде

$$\chi_a = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \chi_{b_i}, \quad b_i \supset b_{i+1}, \tag{4}$$

где b_i - правильные элементы алгебры $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения I индикаторная функция χ_a элемента $a \in \mathcal{A}$ единственным образом представима в виде

$$\chi_a = \sum_{i=1}^{z} \alpha_i \chi_{\Omega_{s_i}}.$$

Обозначим через $\{\chi\}_a$ семейство индикаторных функций, соответствующих множествам Ω_{s_i} и всевозможным их конечным пересечениям. Очевидно, что семейство $\{\chi\}_a$ конечно.

Пусть $S_{i_1},\dots,S_{i_m}$ - максимальные элементы семейства $\{S_i\}_1^{r}$. Тогда, очевидно, элемент алгебры $b_1=\bigcup_{k=1}^{m}\Omega_{S_{i_k}}$ правильный, при этом $\alpha_{i_k}=1$ для всех $k,\dots,m$.

Легко видеть, что $\chi_{b_1}\geq\chi_a$, так как любой элемент $s\in a$ содержится в одном из множеств S_{i_k}, $k=1,\dots,m$, а значит, и в множестве b_1. Положим $\chi_{a_1}=\chi_{b_1}-\chi_a$. В силу предложения I индикаторная функция χ_{a_1} представима в виде

$$\chi_{a_1}=\sum_{i=1}^{r_1}\alpha_i^1\chi_{\Omega_{S_i^1}},$$

где каждая из функций $\chi_{\Omega_{S_i^1}}$ принадлежит семейству $\{\chi\}_a$. Заметим, что семейства $\{S_{i_k}\}_1^m$ и $\{S_i^1\}_1^{r_1}$ не пересекаются. Применяя описанную выше процедуру к функции χ_{a_1}, получим $\chi_{a_2}=\chi_{b_2}-\chi_{a_1}$, где b_2 - правильный элемент алгебры $\mathcal{A}$. Через конечное число шагов получим

$$\chi_{a_m}=\chi_{b_m}-\chi_{a_{m-1}}=0,$$

так как в разложении (3) функции χ_{a_j} могут лишь участвовать функции семейства $\{\chi\}_a$ и на каждом шаге по крайней мере одна из них пропадает с тем, чтобы никогда не возникнуть. Таким образом,

$$\chi_a=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\chi_{b_i}.$$

Единственность представления (4) доказывается непосредственно.

4. Положим

$$\|v\|=\sup\sum_{i=1}^{n}|\nu(a_i)|, \tag{5}$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам $\{a_i\}_1^n$ попарно-непересекающихся элементов алгебры $\mathcal{A}$, т.е. $\|v\|$ - полная вариация меры ν. Обозначим через M множество функций v, для которых $\|v\|<\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пространство M является полным нормированным пространством с нормой, определенной равенством (4). Оно изоморфно пространству $ba(\Omega,\mathcal{A},R^1)$ ограниченных вещественнозначных конечно-аддитивных функций множества, заданных на $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу предложения I каждый элемент $\vartheta \in M$ определяет на $\mathcal{A}$ ограниченную меру ν (это уже указывалось выше). С другой стороны, каждая мера $\vartheta \in \in ba(\Omega, \mathcal{A}, R^1)$ определяет некоторую характеристическую функцию ϑ с равенством $\vartheta(S) = \nu(\Omega_S)$; причем эта функция ϑ, очевидно, определяет в силу предложения I ту же самую меру ν. Теперь предложение 3 следует из полноты пространства $ba(\Omega, \mathcal{A}, R^1)$ (см. [8, с.177-178]).

Заметим, что каждая ограниченная мера ν, заданная на алгебре, представима в виде разности неотрицательных мер $\nu^+ - \nu^-$, где

$$\nu^+(a) = \sup_{a_1 \subset a} \nu(a_1), \quad \nu^-(a) = -\inf_{a_1 \subset a} \nu(a_1)$$

([8, с.113]). Следовательно, функция множества ϑ представима в виде разности двух неотрицательных функций ϑ^+ и ϑ^-, где

$$\vartheta^+(S) = \sup_{a \in \Omega_S} \nu(a), \quad \vartheta^-(S) = \inf_{a \subset \Omega_S} \nu(a).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неотрицательная мера ν называется чисто конечно-аддитивной, если из неравенств $0 \le \nu_c(a) \le \nu(a)$, $a \in \mathcal{A}$, где ν_c - счетно-аддитивная мера, следуют равенства $\nu_c(a) = 0$, $a \in \mathcal{A}$, т.е. $\nu_c \equiv 0$. Если ν - произвольная ограниченная мера на $\mathcal{A}$, то она называется чисто конечно-аддитивной, если меры ν^+ и ν^- являются чисто конечно-аддитивными мерами.

Из предложения 3 и теорем I.14, I.17 и I.24 работы [6] следует, что множества характеристических функций $M_c \subset M$ и $M_p \subset M$, порождающих соответственно счетно-аддитивные и чисто конечно-аддитивные меры на $\mathcal{A}$, являются линейными подпространствами пространства M и пространство M является прямой суммой пространств M_c и M_p, т.е. $M = M_c \oplus M_p$. Из этого следует следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Отображения $\psi_c : M \to M_c$ и $\psi_p : M \to M_p$, определяемые формулами $\psi_c \vartheta \to \vartheta_c$, $\psi_p \vartheta \to \vartheta_p$, где $\vartheta = \vartheta_c + \vartheta_p$, линейны и являются проекторами пространства M на M_c и M_p соответственно.

5. Последовательность элементов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ алгебры $\mathcal{A}$ будем называть исчезающей, если $a_{n+1} \subseteq a_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset$. Пусть функция множеств v порождает неотрицательную меру ν на $\mathcal{A}$. Для $s \in \Omega$ положим

$$v_H(s) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu(a_n),$$

где верхняя граница берется по всем исчезающим последовательностям алгебры $\mathcal{A}$, содержащимся в множестве Ω_s. Через v_g обозначим $v - v_H$. Таким образом, $v(s) = v_g(s) + v_H(s)$. Далее мы покажем, что функция $v_g = \psi_c v = v_c$ и, следовательно, порождает на алгебре $\mathcal{A}$ счетно-аддитивную меру $\nu_c = \nu_g$, а функция $v_H = \psi_p v = v_p$ порождает чисто конечно-аддитивную меру ν_p. Однако сначала установим ряд свойств функции v_H.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* $a \in \mathcal{A}$, *а исчезающая последовательность* $\{h_n\}$ *элементов алгебры* $\mathcal{A}$ *содержится в* a. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая исчезающая последовательность* $\{a_n\}$, *содержащаяся в* a, *что*

$$\nu_H(a) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(a_n) \le \nu_H(a), \quad h_n \subset a_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 индикаторная функция элемента $a \in \mathcal{A}$ представима в виде

$$\chi_a = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \chi_{b_i}, \quad b_{i+1} \subset b_i, \tag{6}$$

где b_i - правильные элементы алгебры, т.е. $b_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} \Omega_{s_k^i}$ (s_k^i - попарно различные элементы пространства Ω).

Пусть $\{X\}_a$ - семейство всех множеств вида $\Omega_{s_k^i}$ и их всевозможных пересечений, а $\{d_k^s\}$ - такие исчезающие последовательности элементов алгебры, содержащиеся в $\Omega_s \in \{X\}_a$, что $v_H(s) - \varepsilon_1 \le \lim_{k\to\infty} \nu(d_k^s) \le v_H(s)$. (Заметим, что каждый элемент семейства $\{X\}_a$ имеет вид Ω_s.)

Обозначим через c_n элемент $\bigcup_s d_n^s \cup h_n$, где объединение производится по тем s, для которых $\Omega_s \in \{X\}_a$. Вследствие конечности семейств $\{X\}_a$ последовательность $\{c_n\}$ является исчезающей.

Положим $\quad a_n^i = c_n \cap b_i, \quad i = 1, \dots, m.$

Очевидно, что $a_n^i \supset a_n^{i+1}$, так как $b_i \supset b_{i+1}$. Пусть a_n - элемент алгебры $\mathcal{A}$, определяемый равенством

$$\chi_{a_n} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \chi_{a_n^i}, \tag{7}$$

тогда $h_n \subset a_n$. Действительно, если $s \in h_n$, то $s \in a_n^1 = c_n$. Пусть $s \in a_n^{i_0}$, $s \notin a_n^{i_0+1}$. Тогда $s \in a_n^i$, $i \le i_0$, $s \notin a_n^i$, $i > i_0$, вследствие того, что $a_n^i \supset a_n^{i+1}$. Это значит, что $s \in b_i, i \le i_0, s \notin b_i, i > i_0$. При четном i_0 получим $\chi_a(s) = 0$ и $s \notin a$. Последнее противоречит включению $s \in h_n \subset a$. Таким образом, i_0 нечетно. В этом случае $\chi_{a_n}(s) = 1$ и $s \in a_n$ при любом $s \in h_a$. Следовательно, $h_n \subset a_n$.

Заметим, далее, что

$$\chi_a \cdot \chi_{a_n} = \Big(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \chi_{b_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \chi_{a_n^i}\Big) = \chi_{a_n}. \tag{8}$$

Это равенство непосредственно следует из легко проверяемых равенств

$$(\chi_{b_{2i+1}} - \chi_{b_{2i+2}})(\chi_{a_n^{2k+1}} - \chi_{a_n^{2k+2}}) = \delta_i^k (\chi_{a_n^{2k+1}} - \chi_{a_n^{2k+2}}),$$

δ_i^k - символ Кронекера. Из формулы (8) следует $a_n \subset a$. Аналогично показывается, что $\chi_{a_n} \cdot \chi_{a_{n+1}} = \chi_{a_{n+1}}$, поэтому $a_n \supset a_{n+1}$. Так как $a_n \subset c_n$, а $\cap c_n = \emptyset$, то $a_n \supset h_n$. Таким образом, мы построили исчезающую последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \supset h_n$.

Покажем, что $\nu_H(a) - \varepsilon \le \lim_{n \to \infty} \nu(a_n) \le \nu_H(a)$ при достаточно малом ε_1.

Действительно, в силу (7) справедливо равенство

$$\nu(a_n) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \nu(a_n^i). \tag{9}$$

Так как $a_n^i = a_n \cap b_i$, $b_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} \Omega_{s_k^i}$, а $\Omega_{s_k^i} \cdot \Omega_{s_j^i} = \Omega_{s_k^i \cdot s_j^i}$, то

$$\nu(a_n^i) = \sum_{k=1}^{m_i} \nu(a_n \cap \Omega_{s_k^i}) - \sum_{k > \ell} \nu(a_n \cap \Omega_{s_k^i \cdot s_k^\ell}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m_i - 1} \nu(a_n \cap \Omega_{s_1^i \cdot s_2^i \cdot \ldots \cdot s_{m_i}^i}). \tag{10}$$

По построению каждый из аргументов меры ν в правой части

равенства (10) содержится в некотором $\Omega_s \in \{\mathcal{X}\}_a$ и содержит $d_n^s \in \mathcal{A}$. Поэтому ν-мера этого элемента при $n \to \infty$ стремится к некоторой величине, содержащейся в отрезке

$$[\upsilon_H(s) - \varepsilon_1,\ \upsilon_H(s)].$$

($\upsilon_H(s) - \varepsilon_1 \le \lim_{n\to\infty} \nu(d_n^s) \le \upsilon_H(s)$, мера ν неотрицательна, $\upsilon_H(s)$ равна верхней грани пределов меры ν на исчезающих последовательностях).

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \nu(a_n^i) = \sum_{k=1}^{m_i} \upsilon_H(s_k^i) - \sum_{k>\ell} \upsilon_H(s_k^i \cdot s_\ell^i) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m_i-1} \upsilon_H(s_1^i \cdot s_2^i \cdot \dots \cdot s_{m_i}^i) + \varepsilon(\varepsilon_1) = \upsilon_H(b_i) + \varepsilon(\varepsilon_1),$$

где $\varepsilon(\varepsilon_1) \to 0$ при $\varepsilon_1 \to 0$.

Из последнего соотношения и равенства (9) при достаточно малом ε_1 получим

$$\nu_H(a) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(a_n) \le \nu_H(a).$$

Предложение 5 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. М е р а ν_H н е о т р и ц а т е л ь н а н а а л г е б р е $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5 для любого $a \in \mathcal{A}$ существует такая исчезающая последовательность $\{a_n\}$, $a_n \subset a$, что $\nu_H(a) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(a_n) \le \nu_H(a)$. (Здесь мы полагаем $h_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$) Так как ε произвольно, мера ν неотрицательна, а последовательность a_n убывает, мера ν_H также неотрицательна. Предложение 6 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. М е р а ν_g н е о т р и ц а т е л ь н а н а а л г е б р е $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такая же, как при доказательстве предыдущего предложения. Тогда

$$\nu_g(a) = \nu(a) - \nu_H(a) \ge \lim_{n\to\infty} \nu(a \setminus a_n) - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, а ν неотрицательна, $\nu_g(a) \ge 0$. Предложение 7 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. М е р а ν_g с ч е т н о - а д д и т и в н а н а а л г е б р е $\mathcal{A}^g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать предложение 8, достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} \nu_g(f_n) = 0$, если $\{f_n\}$ - ис-

чезающая последовательность. Докажем это. Пусть $\{g_n\}$ – такая исчезающая последовательность, что $v_H(X)-\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(g_n) \le v_H(X)$. Тогда последовательность $\{g_n \cup f_n\}$ исчезающая и $v_H(X)-\varepsilon \le \le \lim_{n\to\infty} \nu(g_n \cup f_n) \le v_H(X)$. Возьмем такое n_0, что при $n \ge n_0$ выполняются неравенства

$$v_H(X)-\varepsilon \le \nu(g_n \cup f_n) \le v_n(X)+\varepsilon. \qquad (11)$$

В силу предложения 5 существует такая исчезающая последовательность $\{a_k\}$, для которой

$$\nu_H(g_{n_0} \cup f_{n_0}) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(a_n) \le \nu_H(g_{n_0} \cup f_{n_0}),$$

$$a_k \subset g_{n_0} \cup f_{n_0},\ a_k \supset g_n \cup f_n,\ n > n_0.$$

С другой стороны, так как $a_k \supset g_n$, справедливы неравенства

$$v_H(X)-\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \nu(a_k) \le v_H(X).$$

Таким образом, $|v_H(X) - \nu_H(g_{n_0} \cup f_{n_0})| < \varepsilon$ и, учитывая (11), получим

$$\nu(g_{n_0} \cup f_{n_0}) - \nu_H(g_{n_0} \cup f_{n_0}) = \nu_g(g_{n_0} \cup f_{n_0}) \le 2\varepsilon.$$

Тем более

$$\nu_g(f_{n_0}) \le 2\varepsilon,$$

так как в силу предложения 7 мера ν_g неотрицательная на алгебре $\mathcal{A}$. Вследствие того, что $f_{n_0} \supset f_n$, $n > n_0$, получим

$$\nu_g(f_n) \le 2\varepsilon \quad \text{при} \quad n \ge n_0,$$

что и доказывает предложение 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть v порождает неотрицательную меру ν, $Tv = v_H$. Тогда $T^2 v = v_H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для любого $s \in \Omega$ выполняется равенство $Tv_H(s) = v_H(s)$. Действительно, пусть $\{g_n\}$, $g_n \subset \Omega$, и $\{f_n\}$, $f_n \subset \Omega$, – исчезающие последовательности, для которых

$$v_H(s) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(g_n) \le v_H(s),$$

$$Tv_H(s) - \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu_H(f_n) \le Tv_H(s).$$

Тогда в силу положительности мер ν и ν_H

$$v_H(S)-\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu(g_n \cup f_n) \le v_H(S),$$

$$Tv_H(S)-\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} \nu_H(g_n \cup f_n) \le Tv_H(S),$$

и найдется такое n_0, что при $n > n_0$

$$Tv_H(S)-\varepsilon \le \nu_H(g_n\cup f_n) \le Tv_n(S)+\varepsilon . \tag{I2}$$

Вследствие предложения 5 существует такая исчезающая последовательность $\{a_\kappa\}, a_\kappa \subset g_{n_0} \cup f_{n_0}$, для которой

$$\nu_H(g_{n_0}\cup f_{n_0})-\varepsilon \le \lim_{\kappa\to\infty}\nu(a_\kappa) \le \nu_H(g_{n_0}\cup f_{n_0}),$$
$$a_\kappa \supset g_n \cup f_n,\quad n > n_0. \tag{I3}$$

С другой стороны, так как $g_n \subset a_n$,

$$v_n(S)-\varepsilon \le \lim_{\kappa\to\infty}\nu(a_\kappa) \le v_H(S). \tag{I4}$$

Вследствие того, что ε можно взять сколько угодно малым, из (I2), (I3) и (I4) получим

$$Tv_H(S)=v_H(S).$$

Предложение 9 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IO. Если $v \in M$ – характеристическая функция, порождающая неотрицательную меру ν на $\mathcal{A}$, то

$$\nu_H(a) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu(a_n), \tag{I5}$$

где верхняя грань берется по всем исчезающим последовательностям, содержащимся в a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5 для любого $\varepsilon > 0$ и любой исчезающей последовательности $\{g_n\}, g_n \subset a$, существует такая исчезающая последовательность $\{a_n\}, g_n\subset a_n \subset a$, для которой

$$\nu_H(a)-\varepsilon \le \lim_{n\to\infty}\nu(a_n) \le \nu_H(a). \tag{I6}$$

Так как ε и $\{g_n\}, g_n \subset a$, произвольны, из неравенств (I6) следует равенство (I5). Предложение IO доказано.

Обозначим через $M_c^+ \subset M$ семейство таких характеристи-

ческих функций $v_c \in M$, порождающих на алгебре $\mathcal{A}$ неотрицательные счетно-аддитивные меры ν_c , для которых характеристическая функция $v - v_c$ порождает неотрицательную меру на $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА I. Если характеристическая функция v порождает на алгебре $\mathcal{A}$ неотрицательную меру, то

$$\psi_c v = v_c = v_g, \quad \psi_p v = v_p = v_H,$$

$$v_p(s) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu(a_n),$$

где верхняя граница берется по всем исчезающим последовательностям, содержащимся в Ω_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 2 и предложений 6 и 7 достаточно доказать, что $v_g(a) \geq \nu_c(a)$, $a \in \mathcal{A}$. Положим $v^1 = v - v_c$. Тогда $v = v^1 + v_c$. На основании предложений 6–8 функция v^1 представима в виде суммы функций $v_g^1 + v_H^1$, каждая из которых порождает неотрицательную меру на алгебре $\mathcal{A}$. Кроме того, мера ν_g^1 будет счетно-аддитивной. Таким образом, $v = v_g + v_H = v_c + v_g^1 + v_H^1$. В силу предложения I0 справедливы равенства

$$v_H(a) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu(a_n) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} (\nu_g(a_n) + \nu_H(a_n)) =$$

$$= \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} (\nu_c(a_n) + \nu_g^1(a_n) + \nu_H^1(a_n)),$$

где $\{a_n\}$ - исчезающая последовательность, $a_n \subset a$. Так как меры ν_g , ν_c и ν_g^1 счетно-аддитивны на $\mathcal{A}$, последние равенства дают

$$\nu_H(a) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu_H(a_n) = \sup_{\{a_n\}} \lim_{n\to\infty} \nu_H^1(a_n).$$

Принимая во внимание предложение 9, получим

$$\nu_H(a) = \nu_H^1(a).$$

Таким образом, $\nu_g = \nu_c + \nu_g^1$, где ν_c и ν_g^1 - неотрицательные счетно-аддитивные меры на $\mathcal{A}$ и, значит, $\nu_g(a) \geq \nu_c(a)$ для любого элемента $a \in \mathcal{A}$. Теперь из определений ν_c и v_c следует $\nu_c = \nu_g$, $v_c = v_g$, что с учетом предложения I0 и завершает доказательство теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ. Для $v \in M$ справедливы ра-

венства

$$\psi_p v(s) = v_p(s) = \sup_{\{a_n^1\}} \lim_{n\to\infty} \nu^+(a_n^1) - \sup_{\{a_n^2\}} \lim_{n\to\infty} \nu^-(a_n^2),$$

где верхняя граница берется по всем исчезающим последовательностям $\{a_n^1\}$ и $\{a_n^2\}$, $a_n^1 \in \Omega_s$, $a_n^2 \in \Omega_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт сразу следует из предложения 4 и теоремы I.

Теорема I и ее следствие полезны для вычисления по функции v функций v_c и v_p, и они будут использованы в последующих работах.

В дальнейшем в этой работе будут рассматриваться лишь $v \in M_c$.

ТЕОРЕМА 2. Каждая характеристическая функция $v \in M_c$ однозначно определяет некоторую счетно-аддитивную меру $\bar{\nu}$ на σ-алгебре, порожденной алгеброй $\mathcal{A}$. Эта мера является продолжением меры ν, определяемой на алгебре $\mathcal{A}$ характеристической функцией v.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано выше, каждая функция $v \in M_c$ определяет на $\mathcal{A}$ ограниченную счетно-аддитивную меру ν. Как известно, такая мера имеет единственное счетно-аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$ (см. [8, с.152-153]). Доказательство завершено.

6. В этом пункте будет показано, как строится дележ Шепли для характеристических функций $v \in M_c$ при некоторых предположениях об измеримости. На самом деле эти предположения об измеримости можно опустить. Однако здесь, чтобы выпуклее обозначить схему построения дележа Шепли и не вводить в рассмотрение громоздкие конструкции, будем требовать больше, чем необходимо.

Пусть

$$v_t(s) = \begin{cases} 1, \text{ если } s \geq t,\ s,t \in \Omega, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение φ подмножества $M_\varepsilon \subset M$ на пространство счетно-аддитивных мер, заданных на σ-алгебре борелевских подмножеств X, называется отображением Шепли, если

1) $\varphi v(X) = v(X)$;

2) $\Phi v_t(s) = \mu(s\cdot t)/\mu(t)$;

3) пусть $v = v^1 + v^2$, $v^1 \in M_0$, $v^2 \in M_0$, $v \in M_0$, тогда $\Phi v = \Phi v^1 + \Phi v^2$;

4) если при каждом $s \in \Omega$ имеет смысл равенство

$$v(s) = \int_\Omega v_t(s)\bar{\nu}(dt),$$

где $\bar{\nu}$ - мера, порожденная функцией v на σ-алгебре, порожденной алгеброй $\mathcal{A}$ (см. теорему 2), то

$$\Phi v = \int_\Omega \Phi v_t \,\bar{\nu}(dt) \tag{17}$$

(первая часть равенства (2) представляет собой интеграл в смысле Бохнера). Образ функции v при отображении Φ называется дележом Шепли.

ТЕОРЕМА 3. *Если множество* $M_0 = M_c$, *а мера* μ *такова, что функция* $\|\Phi v_t - \Phi v_{t_1}\|$ *(здесь* $\|\cdot\|$ *- норма в пространстве мер) измерима как функция* t *при любом* $t_1 \in \Omega$, *то существует единственное отображение Шепли* $\Phi: M_c \to ca(X,\mathcal{B},R^1)$*- пространство счетно-аддитивных мер на* σ*- алгебре* $\mathcal{B}$ *борелевских множеств пространства* X *со значениями в* R^1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала характеристическая функция $v \in M_c$ такова, что она задает на алгебре $\mathcal{A}$ неотрицательную меру ν. Покажем в этом случае, что условия 2 и 4 однозначно определяют счетно-аддитивную меру Φv на σ-алгебре борелевских множеств пространства X. Для этого заметим, что

$$v(s) = \int_\Omega v_t(s)\bar{\nu}(dt), \tag{18}$$

где $\bar{\nu}$ - мера, порожденная функцией v на σ-алгебре, порожденной алгеброй $\mathcal{A}$ (теорема 2). Действительно, при фиксированном s функция $v_t(s)$ равна единице для $t \le s$ и нулю в противном случае. По определению, $\bar{\nu}$-мера множества Ω_s как раз и равна $v(s)$, что и доказывает равенство (18).

Покажем далее, что интеграл в первой части равенства (17) имеет смысл. Для этого рассмотрим отображение $\varphi: \Omega \to ca(X,\mathcal{B},R^1)$, определяемое равенством

$$\varphi(t) = \Phi v_t,$$

где $ca(X, \mathcal{B}, R^1)$ – пространство ограниченных счетно-аддитивных мер, заданных на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств пространства X, а Φv_t задано равенством (I6).

Легко видеть, что множество значений функции φ сепарабельно. Следовательно, для любого $n > 0$ его можно покрыть счетной системой открытых шаров O_j^n радиусом меньше, чем $1/n$. Так как функция $\|\Phi v_t - \Phi v_{t_1}\|$ измерима, измеримы множества $a_j^n \in \Omega$,

$$a_j^n = \{s \in \Omega,\ \varphi(s) \in O_j^n\}.$$

Для $t \in b_j^n = a_i^n - \bigcup_{j=1}^{i-1} a_j^n$ положим $z_n(t) = q_i^n$, где q_i^n – центр шара O_i^n. Тогда $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i^n$, а

$$\|\varphi(t) - z_n(t)\| \leq 1/n.$$

Таким образом, функция φ является поточечным пределом функций z_n, причем при фиксированном t последовательность $z_n(t)$ сходится по норме. Но функции z_n являются сильно измеримыми, так как каждое из множеств b_i^n измеримо ([7, с.187]). Поэтому и функция φ, являющаяся сильным пределом последовательности z_n, сильно измерима. В силу этого и теоремы I ([7, с.190]) функция φ является интегрируемой по Бохнеру, так как ее норма при каждом t равна единице и, следовательно, измерима. Вследствие условия 4 определения 2 мера Φv необходимо должна определяться формулой (I7).

Кроме того,

$$\int_\Omega z_n(t)\bar{\nu}(dt) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^n\, \bar{\nu}(b_i^n),$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega z_n(t)\bar{\nu}(dt)(X) = \sum q_i^n(X)\bar{\nu}(b_i^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\nu}(b_i^n) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(b_i^n) = \nu(\Omega) = v(X).$$

Поэтому

$$|\Phi v(X) - v(X)| = \left|\int_\Omega v_t \bar{\nu}(dt)(X) - \int_\Omega z_n(t)\bar{\nu}(dt)(X)\right| \leq \left\|\int_\Omega v_t \bar{\nu}(dt) - \right. \\ \left. - \int_\Omega z_n(t)\bar{\nu}(dt)\right\| \leq \int_\Omega \|v_t - z_n(t)\|\bar{\nu}(dt) \leq v(X)/n.$$

Ввиду произвольности n из полученного неравенства следует условие I определения 2. Выполнение оставшихся трех требований очевидно. Единственность дележа Шепли следует из доказательства.

Литература

I. Shapley L.S. A value for n-person games // Contributions on the theory games. - V.II. - Princeton: Univ. Press, 1953.- P.307-317.
2. Ауман Р., Шепли Л. Значение для математических игр. - М.: Мир, 1977.
3. A survey of cooperative games without side payments //Essays in mathematical economics in Honor of Oskar Morgenstern / Ed. by M.Shubic) - Princeton: Univ. Press,1967.- P.3-27.
4. Дюбин Г.Н. О существовании дележа Шепли для игр со счетным числом игроков // Математические методы в социальных науках.- Вильнюс, 1980. - Вып. 13. - С.9-19.
5. Васильев В.А. Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация. - 1975. - Вып. 17(34). - С.5-26.
6. Iosida K., Hewitt E. Finitely additive measures // Trans. Amer. Soc. - 1952. - V.72. - P.46-66.
7. Иосида К. Функциональный анализ. - Москва.: Мир, 1967.
8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.I. - М.: ИЛ, 1962.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.II.1987 г.