Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

РАВНОВЕСИЯ И ПОЛУРАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИКЕ С РАЦИОНИРОВАНИЕМ

П.И.Чугунов

В работе исследуется модель экономики с рационированием, рассматривавшаяся в [1,2]. В первом пункте доказывается существование полуравновесий и их полунепрерывная сверху зависимость от вектора жестких цен. В следующем пункте исследуется специфика сбалансированных состояний, равновесий, полуравновесий и устанавливается существование равновесий. В третьем пункте для равновесий изучается оптимальность по Парето.

1. Существование полуравновесий и их полунепрерывная сверху зависимость от вектора жестких цен

Будем использовать следующие обозначения. Для векторов $x, y \in R^\ell$ $x \cdot y$ - евклидово скалярное произведение; $x \leqq y$ - запись неравенств $x_k \leq y_k, k=1,\dots,\ell$; x_+ - вектор с координатами $(x_+)_k = max\{0, x_k\}$, $k=1,\dots,\ell$.

Рассматриваемая модель экономики $\mathcal{E}$ задается следующей совокупностью объектов:

$$\mathcal{E} = \langle N, L, Q, P, \{\omega^i, X'^i, X''^i, Y^i, u_i, \beta_i, \alpha_i\}_{i \in N} \rangle.$$

Здесь $N=\{1,\dots,n\}$ - множество номеров экономических агентов, $L=\{1,\dots,\ell\}$ - множество номеров продуктов, имеющихся в экономике $\mathcal{E}$; $Q \subset R^\ell$ - множество допустимых векторов цен на первом рынке (рынке с негибкими ценами), $P \subset R^\ell$ - множество допустимых векторов цен на втором рынке (рынке с гибкими ценами). Для каждого $i \in N$ $X'^i \subset R^\ell$ - совокупность наборов продуктов,

доступных для потребления агенту i на первом рынке; $X^{''i} \subset R^{\ell}$ – совокупность наборов продуктов, доступных для потребления агенту i на втором рынке; $Y^i \subset R^{\ell}$ – множество наборов продуктов, которые могут быть произведены агентом i; $\omega^i \in R^{\ell}$ – вектор начальных запасов продуктов агента i; $u_i : X^{'i} \times X^{''i} \times Y^i \times P \times Q \to R^1$ – функция полезности агента i; $\beta_i : Y^i \to R^{\ell}_+$ – функция рационирования агента i; $\alpha_i : Y^i \times P \times Q \to R^1$ – функция дохода агента i.

По мере необходимости будем использовать обозначения

$$Z^i \triangleq X^{'i} \times X^{''i} \times Y^i \subset R^{3\ell},\ z^i \triangleq (x^{'i}, x^{''i}, y^i) \in Z^i,\ i \in N,$$

и следующие условия.

A1. $Q \subset R^{\ell}_+$ – компакт.

A2. $P = \{p \in R^{\ell}_+ \mid \sum_{k \in L} p_k = 1\}$.

A.3. $X^{'i} \subset R^{\ell}_+$, $i \in N$, – выпуклое замкнутое множество.

A4. $X^{''i} \subset R^{\ell}_+$, $i \in N$, – выпуклое замкнутое множество и для каждого $i \in N$ выполнено следующее: либо множество $X^{''i}$ ограничено, либо из неограниченности последовательности $x_s \in X^{''i}$, $s = 1, 2, \ldots$ (по норме пространства R^{ℓ}), следует, что каждая последовательность $\{x_{sk}\}_{s=1}^{\infty}$ не ограничена ($k \in L$).

A5. $Y^i \subset R^{\ell}$, $i \in N$, – выпуклый компакт; $0 \in Y^i$, $i \in N$.

A6. Функция $u_i(x^{'i}, x^{''i}, y^i, p, q)$ непрерывна по совокупности аргументов $(x^{'i}, x^{''i}, y^i, p, q) \in X^{'i} \times X^{''i} \times Y^i \times P \times Q$ и квазивогнута как функция аргумента $(x^{'i}, x^{''i}, y^i) \in X^{'i} \times X^{''i} \times Y^i$ для любых фиксированных $(p, q) \in P \times Q$.

A7. Для любого $i \in N$ и каждого $k \in L$ координатная функция $\beta_{ik} : Y^i \to R^1_+$ является вогнутой и непрерывной.

A8. Функция $\alpha_i(y^i, p, q)$ непрерывна по совокупности аргументов $(y^i, p, q) \in Y^i \times P \times Q$ и вогнута по переменной $y^i \in Y^i$ для любых фиксированных $(p, q) \in P \times Q$.

A9. Условие Слейтера. Для каждого $i \in N$ существует $\bar{x}^{''i} \in X^{''i}$ такой, что для всех $(p, q) \in P \times Q$

$$p \cdot \bar{x}^{''i} < \alpha_i(0, p, q) + (p - q)_+ \cdot \beta_i(0).$$

Напомним кратко, в чем состоит функционирование экономики $\mathcal{E}$. На первом рынке действуют фиксированные цены q (q – одна из допустимых точек множества Q). На втором рынке цены p устанавливаются в результате уравнивания спроса и предложения. Для каждого $i \in N$ компоненты вектора $\beta_i(y^i)$ озна-

чают максимальные объемы продуктов, которые агент i может приобрести на первом рынке по ценам q, если им произведено продуктов в объеме y^i.

Общие доходы агента $i \in N$ складываются из основного дохода $\alpha_i(y^i, p, q)$ и дополнительного дохода, равного $(p-q)_+ \times (\beta_i(y^i) - x'^i)$; при этом в величине α_i учтена сумма денег, которую агент i может получить, продав запасы ω^i. Дополнительный доход агента i образуется следующим образом. Предполагается, что если $p_k > q_k$, то агент i закупает по цене q_k максимальное количество $\beta_{ik}(y^i)$ отведенного ему продукта $k \in L$. Часть его, в объеме x'^i_k, агент потребляет, а оставшуюся часть $\beta_{ik}(y^i) - x'^i_k$ продает на втором рынке по цене p_k, получая доход, равный $(p_k - q_k)(\beta_{ik}(y^i) - x'^i_k)$. Если же $p_k \leq q_k$, то агент i не обязан закупать на первом рынке максимальное количество $\beta_{ik}(y^i)$ продукта k.

В соответствии с этими предположениями для каждого агента $i \in N$ при любых фиксированных ценах $(p,q) \in P \times Q$ определяется бюджетное множество

$$B_i(p,q) \triangleq \{(x'^i, x''^i, y^i) \in X'^i \times X''^i \times Y^i \mid x'^i \leqq \beta_i(y^i),$$

$$q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leq \alpha_i(y^i, p, q) + (p-q)_+ \cdot (\beta_i(y^i) - x'^i)\}.$$

Следуя [I,4], дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть $q \in Q$ произвольно и фиксировано. Набор $((\tilde{x}'^i, \tilde{x}''^i, \tilde{y}^i)_{i \in N}, \tilde{p}) \triangleq (\tilde{x}'^1, \tilde{x}''^1, \tilde{y}^1, \ldots, \tilde{x}'^n, \tilde{x}''^n, \tilde{y}^n, \tilde{p}) \in R^{3\ell_n + \ell}$, для которого $(\tilde{x}'^i, \tilde{x}''^i, \tilde{y}^i) \in B_i(\tilde{p}, q)$, $i \in N$, назовем:

а) полуравновесным состоянием или полуравновесием, соответствующим вектору q, если

$$u_i(\tilde{x}'^i, \tilde{x}''^i, \tilde{y}^i, \tilde{p}, q) = \max\{u_i(x'^i, x''^i, y^i, \tilde{p}, q) \mid$$
$$(x'^i, x''^i, y^i) \in B_i(\tilde{p}, q)\},\ i \in N,$$
$$\sum \tilde{x}'^i + \sum \tilde{x}''^i \leq \sum \omega^i + \sum y^i \,{}^{*)};$$

---

*) Здесь и далее (если явно не указано) суммирование происходит по $i \in N$.

б) сбалансированным состоянием, соответствующим q, если в последнем соотношении выполняется равенство для всех координат $k \in L$ таких, что $\widetilde{p}_k > 0$;

в) равновесием, соответствующим q, если этот набор является полуравновесным и сбалансированным состоянием, соответствующим q.

Через $\widetilde{W}(q), W(q) \subset R^{\varkappa_n+\ell}$ обозначим множество полуравновесий (соответственно множество равновесий), соответствующих вектору $q \in Q$.

В доказательстве существования полуравновесия и некоторых других утверждений существенно используется следующее условие на суммарные доходы в экономике $\mathcal{E}$.

А10. Для всех $(p,q) \in P \times Q, i \in N, y^i \in Y^i$,

$$\sum \alpha_i(y^i,p,q) + (p-q)_+ \cdot \sum \beta_i(y^i) \le p \cdot \sum \omega^i + p \cdot \sum y^i.$$

Это предположение аналогично (см. [1-4]) закону Вальраса для классической модели Эрроу - Дебре. Поэтому условие А10 будем называть законом Вальраса в слабой форме. Если в условии А10 вместо неравенства выполняется равенство, то будем говорить, что закон Вальраса выполняется в сильной форме. Условие А10 (при остальных указанных в теореме 1 условиях) можно рассматривать как ответ на вопрос: какими должны быть суммарные основные доходы $\sum \alpha_i$, чтобы в экономике $\mathcal{E}$ существовало полуравновесие? Как следует из теоремы 1, условие А10 говорит о том, что для этого достаточно, чтобы суммарные основные и дополнительные доходы $\sum \alpha_i(y^i,p,q) + (p-q)_+ \cdot \sum \beta_i(y^i)$ не превосходили стоимости (в ценах p второго рынка) всех имеющихся в экономике $\mathcal{E}$ продуктов.

Примером функций дохода, удовлетворяющих закону Вальраса в сильной форме, являются функции α_i из [2], определяемые следующим условием.

А.10$'$. $\alpha_i(y^i,p,q) = p \cdot \omega^i + p \cdot y^i - (p-q)_+ \cdot \beta_i(y^i)$,

$(y^i,p,q) \in Y^i \times P \times Q, \ i \in N.$

Эти функции удовлетворяют также условию Слейтера А9, если выполнено следующее предположение.

А9$'$. Для каждого $i \in N$ существует $\bar{x}^{iii} \in X^{iii}$ такой, что $\bar{x}^{iii}_k < \omega^i_k, \ k \in L$.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия AI–AI0. Тогда для любого $q \in Q$ существует полуравновесие, соответствующее q.

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

ЛЕММА I. Существуют выпуклые компакты $\Delta^i \subset R^{\varkappa}, i \in N$, такие, что для всех $(p,q) \in P \times Q$ множество $\varphi_i(p,q)$, определяемое соотношением

$$\varphi_i(p,q) = \{(\tilde{x}''^i, \tilde{x}'''^i, \tilde{y}^i) \in B_i(p,q) \mid u_i(\tilde{x}''^i, \tilde{x}'''^i, \tilde{y}^i, p, q) = \\ = \max_{(x''^i, x'''^i, y^i) \in B_i(p,q)} u_i(x''^i, x'''^i, y^i, p, q)\}, i \in N,$$

является непустым выпуклым компактным подмножеством множества Δ^i, а многозначное отображение $\varphi_i : P \times Q \to \Delta^i$ является замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества

$$Z^{\beta_i} \triangleq \{z^i = (x''^i, x'''^i, y^i) \in Z^i \mid x''^i - \beta_i(y^i) \leqq 0\}, i \in N,$$

согласно определению функций β_i и условиям A3, A5, A7, непусты, выпуклы и замкнуты. Для $A \subset Z^i$ через $Pr_{X'''^i} A$ обозначим проекцию A на множество X'''^i:

$$Pr_{X'''^i} A = \{x'''^i \in X'''^i \mid (x''^i, x'''^i, y^i) \in A \text{ для некоторых } x''^i \in X''^i, y^i \in Y^i\}, i \in N.$$

Докажем ограниченность множеств

$$\Delta'''^i \triangleq \bigcup_{(p,q) \in P \times Q} Pr_{X'''^i} B_i(p,q), i \in N.$$

Для каждого $i \in N$ введем функцию

$$f_i(x''^i, x'''^i, y^i, p, q) = -q \cdot x''^i + \alpha_i(y^i, p, q) + (p-q)_+ \cdot (\beta_i(y^i) - x''^i),$$

$$(x''^i, x'''^i, y^i) \triangleq z^i \in Z^{\beta_i}, (p,q) \in P \times Q.$$

Для рассматриваемых значений z^i будет выполнено

$$0 \leqq x''^i_k \leqq \max_{y^i \in Y^i} \beta_{ik}(y^i) < \infty, k \in L. \qquad (max)$$

Поэтому и в силу AI, A2, A5, A7, A8, функция f_i ограничена сверху некоторой константой C_i, $i \in N$.

Непосредственно проверяются следующие включения для всех $i \in N$:

$$B_i(p,q) \subset \{z^i \in Z^{\beta_i} \mid p \cdot x^{m i} \leq C_i\},\ (p,q) \in P \times Q;$$

$$Pr_{X^{mi}} B_i(p,q) \subset Pr_{X^{mi}} \{z^i \in Z^{\beta_i} \mid p \cdot x^{mi} \leq C_i\},\ (p,q) \in P \times Q;$$

$$\Delta^{mi} \triangleq \bigcup_{(p,q) \in P \times Q} Pr_{X^{mi}} B_i(p,q) \subset$$

$$\subset \bigcup_{p \in P} Pr_{X^{mi}} \{z^i \in Z^{\beta_i} \mid p \cdot x^{mi} \leq C_i\} \triangleq \tilde{\Delta}^i.$$

В силу последнего включения для доказательства ограниченности Δ^{mi} достаточно показать ограниченность $\tilde{\Delta}^i$, $i \in N$. Пусть $i \in N$ произвольно и фиксировано. Докажем ограниченность множества $\tilde{\Delta}^i$. Допустим противное. Тогда существует последовательность $p^s \in P$, $s=1,2,\ldots$, и неограниченная последовательность векторов $x^{mi}_s \in Pr_{X^{mi}} \{z^i \in Z^{\beta_i} \mid p^s \cdot x^{mi} \leq C_i\} \subset X^{mi}$, $s=1,2,\ldots$ Если X^{mi} ограничено, то получаем противоречие, и на этом доказательство ограниченности $\tilde{\Delta}^i$ заканчивается. Если же множество X^{mi} не ограничено, то согласно условию A4 для некоторого достаточно большого номера s будет выполнено $x^{mi}_{sk} \geq 2C_i$, $k \in L$. В итоге получаем

$$C_i \geq p^s \cdot x^{mi}_s = \sum_{k \in L} p^s_k \cdot x^{mi}_{sk} \geq 2C_i \sum_{k \in L} p^s_k = 2C_i.$$

Полученное противоречие завершает доказательство ограниченности множества $\tilde{\Delta}^i$, Δ^{mi}.

С учетом (max) проверяется, что множество

$$\Delta^{ni} \triangleq \bigcup_{(p,q) \in P \times Q} Pr_{X^{ni}} B_i(p,q),\ i \in N,$$

является ограниченным. В силу ограниченности Δ^{ni}, Δ^{mi}, $i \in N$, множество $\Delta^i \triangleq Z^{\beta_i} \cap ((cl co \Delta^{ni}) \times (cl co \Delta^{mi}) \times Y^i)$, $i \in N$, является непустым (так как согласно A9 $(0, \bar{x}^{mi}, 0) \in \Delta^i$, $i \in N$) выпуклым компактом ($cl co\, A$ – замкнутая выпуклая оболочка множества A).

Для каждого $i\in N$ рассмотрим следующие функции:

$$F_i(p,q,x^{ii},x^{iii},y^i)=q\cdot x^{ii}+p\cdot x^{iii}-\alpha_i(y^i,p,q)-(p-q)_+\cdot(\beta_i(y^i)-x^{ii}),$$

$$(p,q)\in P\times Q,\ (x^{ii},x^{iii},y^i)\triangleq z^i\in\Delta^i.$$

Непосредственно, с учетом определения Δ^i проверяется справедливость следующих равенств для всех $i\in N,(p,q)\in P\times Q$:

$$B_i(p,q)=\{(x^{ii},x^{iii},y^i)\in\Delta^i \mid F_i(p,q,x^{ii},x^{iii},y^i)\le 0\}.$$

В силу условий на α_i,β_i функция F_i, $i\in N$, непрерывная по совокупности переменных (p,q,z^i) и выпукла по переменной $z^i=(x^{ii},x^{iii},y^i)$ для всех $(p,q)\in P\times Q$. По лемме B2 из [5, с.118] для каждого $i\in N$ множество $B_i(p,q)$ для всех $(p,q)\in P\times Q$ является непустым выпуклым компактом, а отображение $B_i:P\times Q\to\Delta^i,(p,q)\to B_i(p,q)$ является полунепрерывным сверху и полунепрерывным снизу. По лемме B3 из [5, с.119] множество $\varphi_i(p,q)$, определенное в формулировке леммы I, есть непустой выпуклый компакт, а отображение φ_i является замкнутым. Лемма I доказана.

ЛЕММА 2. Используя лемму I, определим для всех $(p,q)\in P\times Q$ множество $\varphi(p,q)=\{x\in R^\ell \mid$ существует $z^i_x=(x^{ii},x^{iii},y^i)\in$ $\in\varphi_i(p,q),i\in N$, такой, что

$$x=\sum\omega^i+\sum y^i-\sum x^{ii}-\sum x^{iii}\}.$$

Верны следующие утверждения:

а) $\varphi(p,q),(p,q)\in P\times Q$ — непустое выпуклое множество;

б) существует компакт $\Gamma\subset R^\ell$ такой, что $\varphi(p,q)\subset\Gamma$, $(p,q)\in P\times Q$;

в) многозначное отображение $\varphi:P\times Q\to R^\ell,(p,q)\longmapsto\varphi(p,q)$ является замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения леммы вытекают из непустоты и выпуклости множеств $\varphi_i(p,q)$ и из включений $\varphi_i(p,q)\subset\Delta^i$ (лемма I).

Докажем последнее утверждение леммы. Пусть $(p,q)\in P\times Q$, $p_n\xrightarrow[n]{}p,q_n\xrightarrow[n]{}q;\ x_n\in\varphi(p_n,q_n),n=1,2,\ldots,\ x_n\xrightarrow[n]{}x$. Докажем, что $x\in\varphi(p,q)$. По определению отображения φ для каждого

$i \in N$ существует последовательность $z_n^i = (x_n^{ii}, x_n^{iii}, y_n^i) \in$ $\in \varphi_i(p_n, q_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$x_n = \sum \omega^i + \sum y_n^i - \sum x_n^{ii} - \sum x_n^{iii}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Так как для всех $i \in N$ множества Δ^i компактны, то существует подпоследовательность номеров $\{n_m\}_{m \geq 1}$, такая, что для каждого $i \in N$ подпоследовательность $\{z_{n_m}^i\}_{m \geq 1}$ является сходящейся, т.е. выполняется

$$z_{n_m}^i = (x_{n_m}^{ii}, x_{n_m}^{iii}, y_{n_m}^i) \xrightarrow[m \to \infty]{} z^i \triangleq (x^{ii}, x^{iii}, y^i) \in Z^i, \; i \in N. \tag{2}$$

В силу замкнутости отображений $\varphi_i, i \in N$ (лемма 1), имеем

$$z^i \in \varphi_i(p, q), i \in N. \tag{3}$$

Согласно (1) для всех $m \geq 1$ выполнено

$$x_{n_m} = \sum \omega^i + \sum y_{n_m}^i - \sum x_{n_m}^{ii} - \sum x_{n_m}^{iii},$$

откуда предельным переходом при $m \to \infty$, учитывая (2), получаем

$$x = \sum \omega^i + \sum y^i - \sum x^{ii} - \sum x^{iii}. \tag{4}$$

В итоге найдены точки z^i, $i \in N$, удовлетворяющие соотношениям (3), (4). Это означает, что $x \in \varphi(p, q)$. Тем самым последнее утверждение, а с ним и лемма 2 доказаны.

ЛЕММА 3. Для всех $(p, q) \in P \times Q$ и всех $(x^{ii}, x^{iii}, y^i) \in B_i(p, q)$, $i \in N$, выполняется неравенство $p \cdot (\sum \omega^i + \sum y^i - \sum x^{ii} - \sum x^{iii}) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $(p, q) \in P \times Q$, (x^{ii}, x^{iii}, y^i), $i \in N$. Из определения $B_i(p, q)$ следует, что

$$(q + (p - q)_+) \cdot x^{ii} + p \cdot x^{iii} \leq \alpha_i(y^i, p, q) + (p - q)_+ \cdot \beta_i(y^i), \; i \in N,$$

откуда, учитывая очевидное неравенство $p \leq q + (p - q)_+$, получаем $p \cdot x^{ii} + p \cdot x^{iii} \leq (q + (p - q)_+) \cdot x^{ii} + p \cdot x^{iii} \leq \alpha_i(y^i, p, q) +$ $+ (p - q)_+ \cdot \beta_i(y^i)$, $i \in N$. Суммируя эти неравенства и учитывая закон Вальраса в слабой форме, получаем

$$p \cdot \sum x^{ii} + p \cdot \sum x^{iii} \leq \sum \alpha_i(y^i, p, q) +$$

$$+(p-q)_+\cdot\sum\beta_i(y^i)\le p\cdot\sum\omega^i+p\cdot\sum y^i,$$

откуда следует утверждение леммы.

Докажем наконец теорему I. Пусть $q\in Q$ – произвольный и фиксированный вектор жестких цен. Рассмотрим определенное в лемме 2 многозначное отображение $p\longmapsto\varphi(p,q)$ из P в R^ℓ. Для него, согласно леммам 2,3, выполнены все условия известной леммы Гейла. Поэтому существуют векторы $\tilde p\in P$, $x\in R^\ell$ такие, что $x\in\varphi(\tilde p,q)$, $x\ge 0$. По определению отображения φ это означает, что существуют векторы $\tilde z^i=(\tilde x''^i,\tilde x'''^i,\tilde y^i)\in\varphi_i(\tilde p,q)$, $i\in N$, такие, что

$$\sum\omega^i+\sum\tilde y^i-\sum\tilde x''^i-\sum\tilde x'''^i=x\ge 0.$$

Учитывая определение отображений φ_i, $i\in N$ (см. лемму I), получаем в итоге, что $((\tilde x''^i,\tilde x'''^i,\tilde y^i)_{i\in N},\tilde p)$ – полуравновесие, соответствующее вектору q. Теорема I доказана.

В следующих двух теоремах устанавливается полунепрерывная сверху зависимость множества полуравновесий и равновесий от вектора жестких цен $q\in Q$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что выполнены условия AI-AI0. Тогда многозначное отображение $\tilde W: Q\to R^{3\ell n+\ell}$ является замкнутым и все его значения лежат в некотором компакте K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q, q_n\in Q$, $n=1,2,\ldots$, произвольны и фиксированы, $q_n\xrightarrow[n]{} q$. Предположим, что $((x''^i_n,x'''^i_n,y^i_n)_{i\in N},p_n)\in\tilde W(q_n)$, $n=1,2,\ldots$, и $p_n\xrightarrow[n]{} p$, $z^i_n\triangleq(x''^i_n,x'''^i_n,y^i_n)\xrightarrow[n]{} z^i\triangleq(x''^i,x'''^i,y^i)$, $i\in N$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $((x''^i,x'''^i,y^i)_{i\in N},p)$ – полуравновесие, соответствующее q. Согласно условиям и определению φ_i, $i\in N$ (см. лемму I), имеем $z^i_n\in\varphi_i(p_n,q_n)$, $i\in N$,

$$\sum\omega^i+\sum y^i_n-\sum x''^i_n-\sum x'''^i_n\ge 0,\ n=1,2,\ldots$$

Отсюда предельным переходом при $n\to\infty$, учитывая замкнутость отображений φ_i, $i\in N$ (лемма I), получаем

$$z^i \in \varphi_i(p,q),\ i \in N;$$

$$\sum \omega^i + \sum y^i - \sum x^{ii} - \sum x^{iii} \geq 0.$$

Это означает, что $((x^{ii}, x^{iii}, y^i)_{i \in N}, p)$ — полуравновесие, соответствующее q, что и требовалось доказать. Существование компакта K с нужными свойствами следует из леммы I. Теорема доказана.

Как видно из примеров, множество $W(q)$ может быть пустым для некоторых $q \in Q$. Положим $Q_0 = \{q \in Q \mid W(q) \neq \emptyset\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия AI-AIO и $Q_0 \neq \emptyset$. Тогда многозначное отображение $W: Q_0 \to R^{3\ell n + \ell}$ имеет замкнутый график в $R^\ell \times R^{3\ell n+\ell}$ и множество Q_0 замкнуто в R^ℓ.

СЛЕДСТВИЕ I. В условиях теоремы 3, если для некоторого $\bar{q} \in Q$ множество $W(\bar{q}) = \emptyset$, то существует некоторая окрестность U точки $\bar{q}$ (в Q) такая, что $W(q) = \emptyset$, $q \in U$.

2. Полуравновесия и равновесия. Существование равновесий

В этом пункте выявляется свойство Λ, характерное для сбалансированных состояний, равновесий и полуравновесий в экономике $\mathcal{E}$ (лемма 5, теорема 4, лемма 6). В теореме 5 доказывается существование равновесия. При этом привлекается следующее понятие ненасыщаемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $i \in N$, $q \in Q$ произвольны и фиксированы. Будем говорить, что агент i ненасыщаем при цене q, если для каждого $p \in P$ выполняется следующее условие: если вектор (x^{ii}, x^{iii}, y^i) максимизирует функцию $u_i(\cdot, p, q)$ на бюджетном множестве $B_i(p,q)$, то "финансовое" ограничение в определении бюджетного множества обращается в равенство.

ЛЕММА 5. Пусть $P, X^{ii} \subset R^\ell_+$, $i \in N$; $q \in Q$ произвольно и фиксировано; $((x^{ii}, x^{iii}, y^i)_{i \in N}, p)$ - сбалансированное состояние, со-

ответствующее q, и выполнен закон Вальраса в слабой форме. Тогда для любого $k \in L$ выполнены следующие эквивалентные утверждения.

I. Если $p_k < q_k$, то $x_k^{\prime i} = 0,\ i \in N$.

2. Свойство Λ: либо $p_k \geqslant q_k$, либо $p_k < q_k$ и $x_k^{\prime i} = 0,\ i \in N$.

3. $(q_k - p_k)_+ \cdot (\sum_{i \in N} x_k^{\prime i}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как эквивалентность утверждений I-3 очевидна, докажем утверждение I. По условию имеем

$$(x^{\prime i}, x^{\prime\prime i}, y^i) \in B_i(p,q),\ i \in N;$$

$$\sum x_k^{\prime i} + \sum x_k^{\prime\prime i} = \sum \omega_k^i + \sum y_k^i \tag{5}$$

для таких $k \in L$, что $p_k > 0$. Первое из этих соотношений дает

$$(q + (p-q)_+) \cdot x^{\prime i} + p \cdot x^{\prime\prime i} \leqslant \alpha_i(y^i, p, q) + (p-q)_+ \cdot \beta_i(y^i),\ i \in N,$$

откуда в силу равенств

$$(q + (p-q)_+) = \begin{cases} q_k, & \text{если } p_k < q_k, \\ p_k, & \text{если } p_k \geqslant q_k, \end{cases}$$

$$(q + (p-q)_+) \cdot x^{\prime i} = \sum_{k: p_k < q_k} q_k x_k^{\prime i} + \sum_{k: p_k \geqslant q_k} p_k x_k^{\prime i},\ i \in N,$$

получаем для каждого $i \in N$

$$\sum_{k: p_k < q_k} q_k x_k^{\prime i} + \sum_{k: p_k \geqslant q_k} p_k x_k^{\prime i} + p \cdot x^{\prime\prime i} \leqslant \alpha_i(y^i, p, q) + (p-q)_+ \cdot \beta_i(y^i).$$

Суммируя эти неравенства по $i \in N$, производя перемену порядка суммирования и привлекая закон Вальраса, получаем

$$\sum_{k: p_k < q_k} q_k (\sum_{i \in N} x_k^{\prime i}) + \sum_{k: p_k \geqslant q_k} p_k (\sum_{i \in N} x_k^{\prime i}) + p \cdot \sum_{i \in N} x^{\prime\prime i} \leqslant$$

$$\leq \sum_{i\in N} \alpha_i(y^i,p,q)+(p-q)_+\cdot\sum_{i\in N}\beta_i(y^i)\leq p\cdot\sum_{i\in N}\omega^i+p\cdot\sum_{i\in N}y^i. \quad (6)$$

Допустим, утверждение 1) не выполнено, т.е. существует $k\in L$ такой, что $p_k<q_k$ и $\sum_{i\in N} x_k^{ii}>0$. Используя это обстоятельство и равенство (5), оценим снизу левую часть неравенства (6):

$$p\cdot\sum_{i\in N}\omega^i+p\cdot\sum_{i\in N}y^i=p\cdot\sum_{i\in N}x^{ii}+p\cdot\sum_{i\in N}x^{iii}<$$

$$<\sum_{k:p_k<q_k} q_k(\sum_{i\in N}x_k^{ii})+\sum_{k:p_k\geq q_k} p_k(\sum_{i\in N}x_k^{ii})+p\cdot\sum_{i\in N}x^{iii}$$

– противоречие с (6). Лемма доказана.

Экономический смысл свойства Λ очевиден. Агент i приобретает на первом рынке положительное количество $x_k^{ii}>0$ товара k только в том случае, если его цена на первом рынке не больше цены на втором рынке: $p_k\geq q_k$. Как показывают примеры, может реализоваться каждый из двух случаев, фигурирующих в свойстве Λ.

Следующая теорема показывает (при некоторых условиях), что равновесие отличается от полуравновесия только свойством Λ.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $P, X^{ii}\subset P_+^{\ell}$, $i\in N$; $q\in Q$ *произвольно и фиксировано; каждый агент* $i\in N$ *ненасыщаем при цене* q; *выполнен закон Вальраса в сильной форме;* $W\triangleq((x^{ii},x^{iii},y^i)_{i\in N},p)$ – *полуравновесие, соответствующее* q. *Тогда* W *является равновесием в том и только в том случае, когда для любого* $k\in L$ *выполнено свойство* Λ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость свойства Λ следует из леммы 5. Докажем его достаточность. В силу ненасыщаемости имеем для $i\in N$ равенства

$$(q+(p-q)_+)\cdot x^{ii}+p\cdot x^{iii}=\alpha_i(y^i,p,q)+(p-q)_+\cdot\beta_i(y^i),$$

суммируя которые и учитывая закон Вальраса, получаем

$$(q+(p-q)_+)\cdot\sum_{i\in N} x'^i+p\cdot\sum_{i\in N} x'''^i=p\cdot(\sum_{i\in N}\omega^i+\sum_{i\in N} y^i). \tag{7}$$

Согласно свойству Λ справедлива цепочка равенств

$$(q+(p-q)_+)\cdot\sum_{i\in N} x'^i=\sum_{k:p_k<q_k}(q+(p-q)_+)_k(\sum_{i\in N} x'^i_k)+$$

$$+\sum_{k:p_k\geq q_k}(q+(p-q)_+)_k(\sum_{i\in N} x'^i_k)=\sum_{k:p_k<q_k} p_k(\sum_{i\in N} x'^i_k)+$$

$$+\sum_{k:p_k\leq q_k} p_k(\sum_{i\in N} x'^i_k)=p\cdot\sum_{i\in N} x'^i,$$

в силу которых (7) запишется в виде

$$p\cdot(\sum x'^i+\sum x'''^i)=p\cdot(\sum\omega^i+\sum y^i). \tag{8}$$

В силу полуравновесности w, имеем для каждого $k\in L$

$$\sum x'^i_k+\sum x'''^i_k\leq\sum\omega^i_k+\sum y^i_k. \tag{9}$$

Допустим, что для некоторого $k\in L$ такого, что $p_k>0$, в (9) выполняется строгое неравенство. Тогда, умножая неравенство (9) на p_k и суммируя по всем $k\in L$, получим $p\cdot(\sum x'^i+\sum x'''^i)<p\cdot(\sum\omega^i+\sum y^i)$ – противоречие с (8). Следовательно, допущение неверно и w сбалансированное, а значит, и равновесное состояние. Теорема доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $k\in L, i\in N$, фиксированы, $p, X'^i, X'''^i\subset R^{\ell}_+$, ξ_k – некоторое число или $+\infty$ и выполнены следующие условия:

1) если $x\in X'^i$, $x_k>0$, то существует $\delta>0$ такое, что $(x_1,\ldots,x_k-s,\ldots,x_\ell)\in X'^i$ для всех $s\in[0,\delta]$;

2) если $x\in X'''^i$, $x_k<\xi_k$, то существует $\delta>0$ такое, что $(x_1,\ldots,x_k+s,\ldots,x_\ell)\in X'''^i$ для всех $s\in[0,\delta]$;

3) $u_i: U'^i\times U'''^i\times Y^i\times P\times Q\to R^1$, где $U'^i, U'''^i\subset R^\ell$ – открытые множества такие, что

$$X^{\prime\prime i} \subset U^{\prime\prime i}, \; X^{\prime\prime\prime i} \subset U^{\prime\prime\prime i};$$

4) для всех $(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y^i, p, q)$ таких, что $(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y^i) \in B_i(p,q)$ и $\bar{x}_k^{\prime\prime i} > 0$, функция u_i, рассматриваемая как функция пары переменных $(x_k^{\prime\prime i}, x_k^{\prime\prime\prime i})$, дифференцируема в точке $(\bar{x}_k^{\prime\prime i}, \bar{x}_k^{\prime\prime\prime i})$, причем если

$$\frac{\partial u_i(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime i}} \geqslant 0, \text{ то } \frac{\partial u_i(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime\prime i}} > 0$$

и

$$\frac{\partial u_i(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime\prime i}} \geqslant \frac{\partial u_i(\bar{x}^{\prime\prime i}, \bar{x}^{\prime\prime\prime i}, y^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime i}}.$$

Пусть $(p,q) \in P \times Q$ фиксированы, точка $(\tilde{x}^{\prime\prime i}, \tilde{x}^{\prime\prime\prime i}, \tilde{y}^i)$ максимизирует функцию $u_i(\cdot, p, q)$ на множестве $B_i(p,q)$ и $\tilde{x}_k^{\prime\prime\prime i} < \xi_k$.

Тогда либо $p_k \geqslant q_k$, либо $p_k < q_k$ и $\tilde{x}_k^{\prime\prime i} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из $p_k < q_k$ следует $\tilde{x}_k^{\prime\prime i} = 0$. Допуская противное, рассмотрим два возможных случая:

а) $\dfrac{\partial u_i(\tilde{x}^{\prime\prime i}, \tilde{x}^{\prime\prime\prime i}, \tilde{y}^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime i}} < 0$; б) $\dfrac{\partial u_i(\tilde{x}^{\prime\prime i}, \tilde{x}^{\prime\prime\prime i}, \tilde{y}^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime i}} \geqslant 0.$

В случае а) определим векторы $\nu, z^i(t) \in R^{3\ell}$:

$$\nu_j = \begin{cases} -1, & j = k; \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \quad \tilde{z}^i \triangleq (\tilde{x}^{\prime\prime i}, \tilde{x}^{\prime\prime\prime i}, \tilde{y}^i); \; z^i(t) \triangleq \tilde{z}^i + t\nu, \; t \geqslant 0.$$

Согласно 3) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $t \in [0, \varepsilon]$ определена суперпозиция $f(t) \triangleq u_i(z^i(t), p, q)$. Учитывая 4а), имеем

$$f'(0) = \frac{\partial u_i(\tilde{x}^{\prime\prime i}, \tilde{x}^{\prime\prime\prime i}, \tilde{y}^i, p, q)}{\partial x_k^{\prime\prime i}} \cdot \nu_k > 0,$$

, откуда в силу I) существует $t \in (0, \varepsilon)$ такое, что $z^i(t) \in$

$\in B_i(p,q)$, $f(t) > f(0)$ или $u_i(z^i(t),p,q) > u_i(\tilde{z}^i,p,q)$ – противоречие с тем, что $\tilde{z}^i$ максимизирует функцию $u_i(\cdot,p,q)$ на $B_i(p,q)$. Тем самым лемма доказана в случае а).

Рассмотрим случай б). Определим векторы ν, $z^i(t) \in R^{3\ell}$:

$$\nu_j = \begin{cases} -p_k, & j = k; \\ q_k, & j = \ell + k; \\ 0, & j \neq k, j \neq \ell + k; \end{cases} \quad z^i(t) = \tilde{z}^i + t \cdot \nu, \; t \geq 0.$$

Согласно 3) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $t \in [0,\varepsilon]$ определена суперпозиция $f(t) \triangleq u_i(z^i(t),p,q)$. Учитывая 4б), имеем

$$f'(0) = \frac{\partial u_i(\tilde{x}^{ii},\tilde{x}^{iii},\tilde{y}^i,p,q)}{\partial x_k^{ii}} \cdot (-p_k) + \frac{\partial u_i(\tilde{x}^{ii},\tilde{x}^{iii},\tilde{y}^i,p,q)}{\partial x_k^{iii}} \cdot q_k > 0,$$

так как согласно 4б)

$$\frac{\partial u_i(\tilde{z}^i,p,q)}{\partial x_k^{iii}} > \frac{\partial u_i(\tilde{z}^i,p,q)}{\partial x_k^{ii}} \cdot \frac{p_k}{q_k}.$$

Поэтому, ввиду I), 2), существует $t \in (0,\varepsilon)$ такое, что $z^i(t) \in B_i(p,q)$, $f(t) > f(0)$ или $u_i(z^i(t),p,q) > u_i(\tilde{z}^i,p,q)$ – противоречие с условием леммы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $P \subset R_+^\ell$; для всех $i \in N$, $k \in L$, существуют числа $r_k^i \geq 0$, ограничивающие сверху координату k любого вектора $y^i \in Y^i$, выполнены условия I) – 4) леммы 6 при $\xi_k \triangleq \sum_{i \in N} \omega_k^i + \sum_{i \in N} r_k^i$ и $X^{ii}, X^{iii} \subset R_+^\ell$. Предположим, что $q \in Q$ фиксировано, а $((\tilde{x}^{ii},\tilde{x}^{iii},\tilde{y}^i)_{i \in N}, p)$ – полуравновесие, соответствующее q. Тогда для любого $k \in L$ выполняется свойство Λ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $k \in L$. Достаточно показать, что из $p_k < q_k$ следует $\tilde{x}_k^{ii} = 0$, $i \in N$. Допустим противное, т.е. $\tilde{x}_k^{ii_0} > 0$ для некоторого $i_0 \in N$. Тогда в силу неравенства

$$\sum \tilde{x}_k^{''i} + \sum \tilde{x}_k^{'''i} \leq \sum \omega_k^i + \sum \tilde{y}_k^i \leq \sum \omega_k^i + \sum \tau_k^i = \xi_k$$

имеем $\tilde{x}_k^{'''i_0} < \xi_k$. Теперь для k, i_0 выполнены все условия леммы 6, согласно которой $\tilde{x}_k^{''i_0} = 0$ - противоречие с допущением. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия AI-A9 и закон Вальраса в сильной форме. Предположим, что каждый агент $i \in N$ ненасыщаем при любом $q \in Q$ и для всех $i \in N$, $k \in L$ выполнены условия I) - 4) леммы 6 при $\xi_k \overset{\Delta}{=} \sum_{i \in N} \omega_k^i + \sum_{i \in N} \tau_k^i$, где $\tau_k^i \geq 0$ - числа, ограничивающие сверху координату k любого вектора $y^i \in Y^i$. Тогда для любого $q \in Q$ существует равновесие, соответствующее q .

Доказательство следует из теоремы I, следствия 2 и теоремы 4.

3. Парето-оптимальность равновесий

В этом пункте при различных условиях устанавливается оптимальность по Парето равновесных состояний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $(p,q) \in P \times Q$ фиксированы. Набор $(x^{''i}, x^{'''i}, y^i)_{i \in N} \subset R^{3\ell n}$ **назовем Парето-оптимальным состоянием, соответствующим** (p,q) **, если**

$$(x^{''i}, x^{'''i}, y^i) \in X^{''} \times X^{'''} \times Y^i,\ x^{''i} \leqq \beta_i(y^i),\ i \in N, \tag{I0}$$

$$\sum x^{''i} + \sum x^{'''i} \leqq \sum y^i + \sum \omega^i \tag{II}$$

и не существует другого набора $(\bar{x}^{''i}, \bar{x}^{'''i}, \bar{y}^i)_{i \in N}$, удовлетворяющего (I0), (II) и такого, что

$$u_i(\bar{x}^{''i}, \bar{x}^{'''i}, \bar{y}^i, p, q) \geq u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q),\ i \in N,$$

$$u_j(\bar{x}^{''j}, \bar{x}^{'''j}, \bar{y}^j, p, q) > u_j(x^{''j}, x^{'''j}, y^j, p, q)$$

для некоторого $j \in N$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $P \subset R_+^\ell$, $q \in Q$ произвольно

и фиксировано, каждый агент $i \in N$ ненасыщаем при цене q и выполняется закон Вальраса в сильной форме. Предположим, что $((\bar{x}'^i, \bar{x}''^i, \bar{y}^i)_{i \in N}, p)$ – равновесие, соответствующее q, и $p \geq q$. Тогда $(\bar{x}'^i, \bar{x}''^i, \bar{y}^i)_{i \in N}$ – Парето-оптимальное состояние, соответствующее (p, q).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $q \in Q$ произвольно и фиксировано, $P \subset R^l_+$, выполняется закон Вальраса в сильной форме и для любого $i \in N$ выполнены условия:

1) каждый агент $i \in N$ ненасыщаем при цене q;

2) $0 \in X'^i \subset R^l_+$, $X''^i \subset R^l_+$;

3) если набор $(x'^i, x''^i, y^i)_{i \in N}$ удовлетворяет (10), (11), то $(x'^i + x''^i) \in X''^i$;

4) функция полезности агента i представима в виде

$$u_i(x'^i, x''^i, y^i, p, q) = v_i(x'^i + x''^i, y^i, p, q), \ (x'^i, x''^i, y^i, p, q) \in X'^i \times X''^i \times Y^i \times P \times Q,$$

где $v_i : R^l_+ \times Y^i \times P \times Q \to R^1$ – некоторая функция.

Предположим, что $((\bar{x}'^i, \bar{x}''^i, \bar{y}^i)_{i \in N}, p)$ – равновесие, соответствующее q. Тогда $(\bar{x}'^i, \bar{x}''^i, \bar{y}^i)_{i \in N}$ – Парето-оптимальное состояние, соответствующее (p, q).

Схема доказательства теорем 6,7 аналогична приведенной в [1].

В следующей теореме, в отличие от предыдущей, функции u_i, $i \in N$, не обязаны иметь специальный вид, но должны быть дифференцируемы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $q \in Q$ произвольно и фиксировано; $P \subset R^l_+$; выполнен закон Вальраса в сильной форме; для любого $i \in N$ X'^i, X''^i – выпуклые мно-

жества, выполнены условия I)–3) теоремы 7 и следующее условие:

4′) $u_i : U^{''i} \times U^{'''i} \times Y^i \times P \times Q \to R^1$, $U^{''i}, U^{'''i}$ – непустые открытые множества, $X^{''i} \subset U^{''i}$, $X^{'''i} \subset U^{'''i}$; для всякого $(y^i, p) \in Y^i \times P$ функция $u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q)$, рассматриваемая как функция переменного $(x^{''i}, x^{'''i}) \in X^{''i} \times X^{'''i}$, дифференцируема в каждой точке $(x^{''i}, x^{'''i}) \in X^{''i} \times X^{'''i}$ и

$$\frac{\partial u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q)}{\partial x_k^{'''i}} \geq \frac{\partial u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q)}{\partial x_k^{''i}}, \quad k \in L.$$

Предположим, что $((\bar{x}^{''i}, \bar{x}^{'''i}, \bar{y}^i)_{i \in N}, p)$ – равновесие, соответствующее q. Тогда $(\bar{x}^{''i}, \bar{x}^{'''i}, \bar{y}^i)_{i \in N}$ – Парето-оптимальное состояние, соответствующее (p, q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, что существует набор $(x^{''i}, x^{'''i}, y^i)_{i \in N}$, удовлетворяющий (I0), (II) и соотношениям

$$u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q) \geq u_i(\bar{x}^{''i}, \bar{x}^{'''i}, \bar{y}^i, p, q), \; i \in N, \tag{I2}$$

$$u_j(x^{''j}, x^{'''j}, y^j, p, q) > u_j(\bar{x}^{''j}, \bar{x}^{'''j}, \bar{y}^j, p, q) \tag{I3}$$

для некоторого $j \in N$. Покажем, что

$$u_i(0, x^{''i} + x^{'''i}, y^i, p, q) \geq u_i(x^{''i}, x^{'''i}, y^i, p, q), \; i \in N. \tag{I4}$$

Для каждого $i \in N$ определим векторы $z^i \triangleq (x^{''i}, x^{'''i})$, $\nu_i \triangleq (-x^{''i}, x^{''i}) \in R^{2l}$ и рассмотрим отрезок $z^i(t) \triangleq z^i + t \cdot \nu_i \triangleq (x^{''i}, x^{'''i}) + t \cdot (-x^{''i}, x^{''i}) = (x^{''i} + t \cdot (-x^{''i}), x^{'''i} + t \cdot x^{''i})$, $t \in [0,1]$. В силу выпуклости $X^{''i}, X^{'''i}$ имеем для всех $i \in N$, $t \in [0,1]$ $x^{''i} + t \cdot (-x^{''i}) = t \cdot 0 + (1-t) x^{''i} \in X^{''i}$, $x^{'''i} + t \cdot x^{''i} = (1-t) x^{'''i} + t \cdot (x^{'''i} + x^{''i}) \in X^{'''i}$.

Поэтому для всех $i \in N$ определена суперпозиция

$$f_i(t) \triangleq u_i(z^i(t), y^i, p, q) = u_i(x^{''i} + t \cdot (-x^{''i}), x^{'''i} + t \cdot x^{''i}, y^i, p, q), \; t \in [0,1].$$

Учитывая 4′), имеем для всех $i \in N$, $t \in [0,1]$

$$\frac{d f_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i(z^i(t), y^i, p, q)}{\partial x_k^{''i}} \cdot (-x_k^{''i}) + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i(z^i(t), y^i, p, q)}{\partial x_k^{'''i}} \cdot x_k^{''i} =$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell} x_k^{''i}\left(\frac{\partial u_i(z^i(t),y^i,p,q)}{\partial x_k^{''}}-\frac{\partial u_i(z^i(t),y^i,p,q)}{\partial x_k^{''}}\right)\geq 0.$$

Поэтому $f_i(1)\geq f_i(0),\ i\in N$, а это и есть (I4). Из соотношений (I2)-(I4) получаем $u_i(0,x^{'i}+x^{''i},y^i,p,q)\geq u_i(\bar{x}^{'i},\bar{x}^{'''i},\bar{y}^i,p,q), i\in N$;

$u_j(0,x^{'j}+x^{''j},y^j,p,q)>u_j(\bar{x}^{'j},\bar{x}^{''j},\bar{y}^j,p,q)$ для некоторого $j\in N$.

Для завершения доказательства остается заметить, что последние соотношения с учетом ненасыщаемости агентов противоречат закону Вальраса*).

Заметим, что условие 3) теоремы 7 выполнено, если $X^{''i}, X^{'''i}\subseteq R_+^{\ell}$, $i\in N$, существует число $r_k^i\geq 0, i\in N, k\in L$, ограничивающее сверху координату k любого вектора $y^i\in Y^i$ и

$$\{x\in R^{\ell}\,|\,0\leq x_k\leq \xi_k,\ k\in L\}\subset X^{'''i},\ i\in N,$$

где

$$\xi_k\triangleq\sum_{i\in N}\omega_k^i+\sum_{i\in N} r_k^i .$$

Л и т е р а т у р а

I. Макаров В.А., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики//Оптимизация. - 1982. - Вып.30(47). - С.5-86.
2. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация.- 1986. - Вып.38(55). - С.7-120.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972.
4. Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Современные проблемы математики. Т.19. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). - М., 1982. - С. 23-58.
5. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.10.1987 г.

---

*) Аналогично устанавливается эффективность производства $(y_1,\ldots,y_n)$ в состоянии равновесия $((x^{''i},x^{'''i},y^i)_{i\in N},p)$.