Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.862.64:67

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ УПОРЯДОЧЕННОГО УКРУПНЕНИЯ ЕЕ МНОГОСЛОЙНОЙ БЛОЧНОСТИ

Р.А.Звягина

Одним из ключевых моментов в конечных методах линейного программирования является, как известно, решение двух систем линейных уравнений с одной и той же (с точностью до транспонирования) матрицей. Многообразие алгоритмов, основанных на методе последовательного улучшения [1], определяется степенью учета в них той или иной специфики этих систем. Здесь по заданной блочной структуре матрицы [2] строится некоторое "расслоение" множества содержащихся в ней блоков, легко преобразуемое в линейный порядок их перебора, начиная с концевых, в процессе приведения системы к блочно-треугольному виду [3]. При этом преобразованная матрица "наследует" [3,4] блочную структуру исходной, включая специфику концевых блоков. Средством проявления блочной треугольности матрицы служит некоторое многоуровневое разбиение множества ее главных подматриц, также легко преобразуемое в линейный порядок их перебора в процессе решения системы линейных уравнений в виде подсистем.

1. Рассмотрим квадратную невырожденную матрицу $A[M,N]$ с разветвленной блочностью, определяемой индуктивно: для любого k, в частности для $k=\bar{k}$ и $M^{\bar{k}}=M$, $N^{\bar{k}}=N$, выделим множество $M_k \subset M^k$ номеров строк и множество $N_k \subset N^k$ номеров столбцов, при которых клетки $A[M^k \setminus M_k, N_k]$ и $A[M_k, N^k \setminus N_k]$ в матрице

$$A[M^k,N^k]=\left[\begin{array}{c|c} A[M^k\setminus M_k, N_k] & O \\ \hline A[M_k,N_k] & A[M_k, N^k\setminus N_k] \end{array}\right]$$

распадаются на независимые блоки $A[M^\tau,N^\tau]$, $\tau\in Z_{\sigma|k|}$, соответственно при $\sigma=-1$ и $\sigma=1$. Индуктивный переход в определении разветвленной блочности при непустом множестве

$$Z(k)=Z_{-|k|}\dot\cup Z_{|k|}=Z_{-k}\cup Z_k \quad (Z_k\cap Z_{-k}=\emptyset)$$

номеров блоков состоит в замене k на $\tau\in Z(k)$, и для очередного k процесс заканчивается, если $Z(k)=\emptyset$. Исходный порядок в множестве Z всех номеров блоков, включая $\bar k$, т.е. б л о ч н а я с т р у к т у р а матрицы $A[M,N]$, представляется в виде связного дерева с коренм $\bar k$, множеством вершин Z и множеством направленных дуг (τ,k), каждая из которых определяется началом $\tau\in Z(k)$ и концом k при любом $k\in Z$ (рис. I). Не нарушая общности, будем предполагать, что $\bar k<0$, а $sign\,\tau=\sigma$, если $\tau\in Z_{\sigma|k|}$ ($\sigma=-1,1$). При этом каждое из множеств Z_k, Z_{-k} ($k\in Z$) считается линейно упорядоченным, например, по возрастанию его элементов. Кроме того, будем предполагать, что семейство M^τ, $\tau\in Z_{|k|}$, является разбиением множества M_k, а семейство N^τ, $\tau\in Z_{-|k|}$, - разбиением множества N_k, если соответственно $Z_{|k|}\neq\emptyset$ или $Z_{-|k|}\neq\emptyset$.

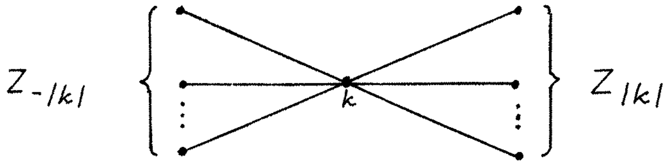

Рис. I

2. В каждой вершине $k\in Z$, начиная с концевых ($Z(k)=\emptyset$), рекуррентными соотношениями

$$Z^{\sigma|k|}=Z_{\sigma|k|}\cup\left(\bigcup_{\tau\in Z_{\sigma|k|}} Z^{\sigma|\tau|}\right),\quad \tilde Z^k=Z(k)\cup\left(\bigcup_{\tau\in Z(k)}\tilde Z^\tau\right)$$

определим ее зоны $Z^{\sigma|k|}$ знака $\sigma=-1,1$ и полную зону $\tilde{Z}^k$. Как будет видно из дальнейшего, зоны Z^k, Z^{-k} ($k\in Z$) являются основным средством алгоритмического учета исходной блочной структуры в матрице $A[M,N]$.

При любом $k\in Z$ представим множество $\tilde{Z}^k\cup\{k\}$, совпадающее с Z при $k=\bar{k}$, как объединение подмножеств (слоев)

$$L_{k0}=\{k\}\cup Z^k;\quad L_{k\rho}=\bigcup_{\alpha\in L_{k,\rho-1}} Z^{-\alpha},\ \rho=1,2,\dots,r_k, \qquad (1)$$

где r_k – наибольший номер, для которого $L_{kr_k}\neq\emptyset$, т.е. в начальный слой отнесем вершину k и ее зону того же знака, а в каждый следующий слой $L_{k\rho}$ с номером ρ в пределах $1\le\rho\le r_k$ отнесем зоны вершин из слоя $L_{k,\rho-1}$, противоположного по отношению к этим вершинам знака.

Обозначим через $\bar{s}$ наибольшую из длин s в путях

$$\bar{k}=\tau_0\longleftarrow\tau_1\longleftarrow\cdots\longleftarrow\tau_{s-1}\longleftarrow\tau_s=\tau \qquad (2)$$

при $\tau\in Z$. Положим $V_0=\{\bar{k}\}$ и предположим, что для некоторого $t\geqslant 0$, в частности для $t=0$, построены линейно упорядоченные множества (уровни)

$$V_{h(t,i)},\quad h(t,i)=-2^{\bar{s}-t}(2^t-1)+2^{\bar{s}-t}i,\quad i=0,1,\dots,2(2^t-1). \qquad (3)$$

Если $t<\bar{s}$, то по каждому из уровней $V_{h(t,i)}$ с нулевым и четным индексом $i=0,2,\dots,2(2^t-1)$ построим (рис.2) пару множеств

$$V_{h(t+1,2i)}=V_{h(t,i)-2^{\bar{s}-t-1}}=\bigcup_{k\in V_{h(t,i)}} Z_{-|k|},$$

$$V_{h(t+1,2i+2)}=V_{h(t,i)+2^{\bar{s}-t-1}}=\bigcup_{k\in V_{h(t,i)}} Z_{|k|}, \qquad (4)$$

располагая в них подмножества $Z_{-|k|}$ и $Z_{|k|}$, например, в порядке следования k в уровне $V_{h(t,i)}$. Множества (4) для

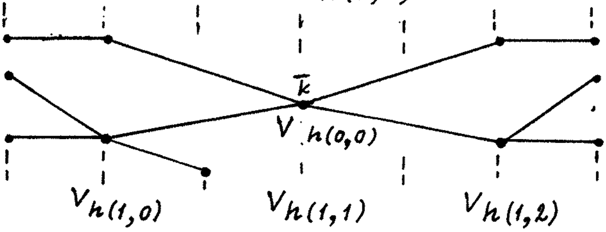

Рис.2

всех $i=0,2,\dots,2(2^t-1)$ объединим с семейством (3), полагая

$$V_{h(t+1,2i+1)} = V_{h(t,i)}, \quad i=0,1,\dots,2(2^t-1).$$

Тогда, очевидно, в семействе (3) номер t можно увеличить на I. При $t=\bar{s}$ объединение множеств (3) совпадает с Z. Если из семейства (3) при $t=\bar{s}$ выбросить пустые множества, сохраняя упорядоченность оставшихся элементов по возрастанию $h(\bar{s},i)$, и заменить оставшиеся индексы $h(\bar{s},i_1)<$ $<h(\bar{s},i_2)<\dots<h(\bar{s},i_\ell)$ номерами их позиций $1,2,\dots,\ell$ соответственно, то получим разбиение $U_\rho = V_{h(\bar{s},i_\rho)}, 1\le\rho\le\ell,$ множества Z. Заметим, что уровни U_ρ, $1\le\rho\le\ell$, позволяют алгоритмически вычислять расширенную зону $Z^{\sigma|\alpha|}\cup\{\alpha\}$ (а тем самым и зону $Z^{\sigma|\alpha|}$) при любых $\alpha\in Z$ и $\sigma=\pm1$ линейно упорядоченной в виде семейства сечений $U_\rho\cap(Z^{\sigma|\alpha|}\cup\{\alpha\})$, $1\le\rho\le\ell$, перебор которых по убыванию $\sigma\cdot\rho$ соответствует приближению вершин $\tau\in Z^{\sigma|\alpha|}\cap U_\rho$ к корню α, а по возрастанию $\sigma\cdot\rho$ – удалению от α.

3. Пусть разбиение $L_{\bar{k}\rho}$, $0\le\rho\le z_{\bar{k}}$, множества Z упорядочено по убыванию $\rho=z_{\bar{k}},\dots,1,0$, а порядок перебора линейно упорядоченных (по приближению к корню) зон $Z^{-\alpha}$, $\alpha\in L_{\bar{k}\rho}$, составляющих слой $L_{\bar{k}\rho}$ $(\rho>1)$, произвольный, например, индуцируемый упорядочением слоя $L_{\bar{k},\rho-1}$ при каждом $\rho=1,2,\dots,z_{\bar{k}}$.

Предположим, что для всех $k\in Z$ в указанном линейном порядке перебора выделены множества

$$I_k\subset\tilde{M}_k = M^k\setminus\Big(\bigcup_{\beta\in\tilde{Z}^k} I_\beta\Big),\quad J_k\subset\tilde{N}_k = N^k\setminus\Big(\bigcup_{\beta\in\tilde{Z}^k} J_\beta\Big)$$

и построены такие преобразования $T_k[M,M]$, $R_k[N,N]$, что при

$$I^k = I_k\cup\Big(\bigcup_{\tau\in\tilde{Z}^k} I_\tau\Big),\qquad J^k = J_k\cup\Big(\bigcup_{\tau\in\tilde{Z}^k} J_\tau\Big)$$

выполняются условия

$$I^k = M^k,\ k\in Z^{\bar{k}}\cup\{\bar{k}\},\quad J^k = N^k,\ k\in Z^{-\bar{k}}\cup\{\bar{k}\},\tag{5}$$

а невырожденная матрица

$$B_k[I^k,J^k] = T_k[I^k,M^k]\cdot A[M^k,N^k]\cdot R_k[N^k,J^k]\tag{6}$$

с главными подматрицами $B_k[I_\tau,J_\tau]$, $\tau\in\tilde{Z}^k\cup\{k\}$, является блочно-треугольной для любого $k\in Z$. В частности, при $k=\bar{k}$ последнее означает [4], что для каждого $\tau\in U_+$

($1 \le t \le \ell$) в полосе $B_{\bar{k}}[I_\tau, N]$ отличны от нуля разве лишь части

$B_{\bar{k}}[I_\tau, J_\tau]$, $B_{\bar{k}}[I_\tau, J_\alpha]$, $\alpha \in U_\rho$, $1 \le \rho < t$,

а в полосе $B_{\bar{k}}[M, J_\tau]$ (по симметрии) отличны от нуля разве лишь части

$B_{\bar{k}}[I_\tau, J_\tau]$, $B_{\bar{k}}[I_\alpha, J_\tau]$, $\alpha \in U_\rho$, $t < \rho \le \ell$.

Преобразования $T_k[M,M]$ и $R_k[N,N]$, учитывающие при любом $k \in Z$ все перечисленные относительно матриц (6) требования и обладающие описываемой ниже структурой, можно связать рекуррентно [3] через некоторые переходные множители

$$T'_k[M,M] = \tilde{T}_k[M,M] \cdot P_k[M,M], \tag{7}$$

$$R'_k[N,N] = Q_k[N,N] \cdot \tilde{R}_k[N,N] \tag{8}$$

с произведениями аналогичных преобразований в вершинах $\tau \in Z(k)$. Здесь линейные преобразования $P_k[M,M]$ и $Q_k[N,N]$, ортогональные в случае $k \notin Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\} \cup Z^{-\bar{k}}$, отличаются от единичных матриц $E[M,M]$ и $E[N,N]$ разве лишь блоками $P_k[\tilde{M}_k, \tilde{M}_k]$ и $Q_k[\tilde{N}_k, \tilde{N}_k]$; матрица $\tilde{T}_k[M,M]$ – единичная в случае $k < 0$ и отличается от нее разве лишь блоками $\tilde{T}_k[\tilde{M}_k \setminus I_k, I^\beta]$, $\beta \in Z_{-k}$, в случае $k > 0$; по симметрии матрица $\tilde{R}_k[N,N]$ – единичная в случае $k > 0$ и отличается от нее разве лишь блоками $\tilde{R}_k[J^\beta, \tilde{N}_k \setminus J_k]$, $\beta \in Z_{-k}$, в случае $k < 0$ [3].

Однако при алгоритмической реализации процесса произведения накапливаемых в вершине k множителей $T'_\tau[M,M]$ и $R'_\tau[N,N]$ с номерами τ из зоны $\tilde{Z}^k \cup \{k\}$ необходимо вычислять явно в соответствии с некоторым упорядочением последней на основе семейства (I) и упорядочения зон $Z^{\sigma|\alpha|}$, $\alpha \in Z$. Другими словами, если $T_k(Z^{\sigma|\alpha|})$ – произведение матриц $T'_\tau[M,M]$ в порядке у д а л е н и я τ от корня зоны $Z^{\sigma|\alpha|}$ при любом $\alpha \in \tilde{Z}^k \cup \{k\}$ и любом $\sigma = -1, 1$, а $T(L_{k\rho})$ – произведение перестановочных матриц $T_k(Z^{-\alpha})$, $\alpha \in L_{k,\rho-1}$, при любом ρ в пределах $0 < \rho \le \tau_k$, то

$$T_k[M,M] = T'_k[M,M] \cdot T_k(Z^k) \cdot T(L_{k1}) \cdot \ldots \cdot T(L_{k\tau_k}). \tag{9}$$

Аналогично, если $R_k(Z^{\sigma|\alpha|})$ – произведение матриц $R'_\tau[N,N]$ в порядке п р и б л и ж е н и я τ к корню зо-

ны $Z^{\sigma|\alpha|}$ при любом $\alpha \in \tilde{Z}^k \cup \{k\}$ и $\sigma = \pm 1$, а $R(L_{k\rho})$ – произведение перестановочных матриц $R_k(Z^{-\alpha})$, $\alpha \in L_{k,\rho-1}$, при $0 < \rho \le z_k$, то

$$R_k[N,N] = R(L_{kz_k}) \cdot \ldots \cdot R(L_{k1}) \cdot R_k(Z^k) \cdot R_k'[N,N]. \tag{10}$$

Заметим, что перебор сечений $(\tilde{Z}^\beta \cup \{\beta\}) \cap U_\rho$ в порядке возрастания или убывания ρ в пределах $1 \le \rho \le \ell$ является средством алгоритмического выявления блочной треугольности соответственно в прямой и транспонированной системах с матрицей $B_\beta[I^\beta, J^\beta]$ ($\beta \in Z_{-k}$), используемых для вычисления тех частей матриц $\tilde{R}_k[N,N]$ и $\tilde{T}_k[M,M]$, которыми они отличаются от единичных [3]. Кроме того, из структуры этих матриц и представлений (7), (8) следуют равенства

$$T_k'[I^k, M^k] = P_k[I^k, M^k], \quad R_k'[N^k, J^k] = Q_k[N^k, J^k]. \tag{11}$$

4. Поскольку объединение попарно непересекающихся множеств J_k, $k \in Z$, равно множеству N, то система

$$A[M,N] \cdot x[N] = b[M] \tag{12}$$

эквивалентна соотношениям

$$B_{\bar{k}}[M,N] \cdot g[N] = T_{\bar{k}}[M,M] \cdot b[M], \tag{13}$$

$$x[N] = R_{\bar{k}}[N] \cdot g[N] = \sum_{1 \le t \le \ell} \sum_{k \in U_t} R_{\bar{k}}[N, J_k] \cdot g[J_k], \tag{14}$$

что очевидным образом следует из представления (6), если заменить в нем k на корень $\bar{k}$. Поэтому вычислительный процесс решения системы (12) сводится к перебору (решению) в порядке возрастания $t = 1, 2, \ldots, \ell$ подсистем

$$B_k[I_k, J_k] \cdot g[J_k] = T_k[I_k, M^k] \cdot b_t[M^k], \quad k \in U_t, \tag{15}$$

с учетом в (9) первого из равенств (11) и к попутному вычислению, начиная с $x_0[N] = 0$, вектора

$$x_t[N] = x_{t-1}[N] + \sum_{k \in U_t} E[N, N^k] \cdot R_k[N^k, J_k] \cdot g[J_k] \tag{16}$$

с учетом в (10) второго из равенств (11). Подправление правых частей в системах (15) определяется формулами

$$b_t[M] = u_{t-1}[M] - \sum_{k \in U_t} E[M, M_k] \cdot \Big\{ \sum_{\alpha \in Z_{-|k|}} A[M_k, N^\alpha] \cdot g_\alpha[N^\alpha] \Big\}, \tag{17}$$

$$g_\alpha[N^\alpha] = \sum_{\beta \in \tilde{Z}^\alpha \cup \{\alpha\}} E[N^\alpha, N^\beta] \cdot R_\beta[N^\beta, J_\beta] \cdot g[J_\beta], \quad \alpha \in Z_{-|k|}, \tag{18}$$

начиная с $u_0[M]=b[M]$. Решив при некотором $t \geq 1$, в частности при $t=1$, в произвольном порядке системы (I5), вычислим столбец (I6). Если $t<\ell$, то, вычислив столбец

$$u_t[M]=b_t[M]-\sum_{k\in U_t} E[M,M^k]\cdot A[M^k,N^k]\cdot\{R_k[N^k,J_k]\cdot g[J_k]\}, \qquad (\text{I9})$$

увеличим t на I в формулах (I5)-(I9). Как будет показано в п.5, вектор (I6) при $t=\ell$ является решением системы (I2).

Алгоритм решения транспонированной по отношению к (I2) системы

$$y[M]\cdot A[M,N]=c[N] \qquad (20)$$

строится по симметрии с процессом (I5)-(I9). Положим $v_{\ell+1}[N]= = c[N]$ и решим при некотором $t\leq \ell$, в частности при $t=\ell$, в произвольном порядке системы

$$h[I_k]\cdot B_k[I_k,J_k]=c_t[N^k]\cdot R_k[N^k,J_k],\ k\in U_t, \qquad (\text{2I})$$

перевычисляя в них правую часть по формуле

$$c_t[N]=v_{t+1}[N]-\sum_{k\in U_t}\Big\{\sum_{\alpha\in Z_{/k/}} h_\alpha[M^\alpha]\cdot A[M^\alpha,N_k]\Big\}\cdot E[N_k,N], \qquad (22)$$

где

$$h_\alpha[M^\alpha]=\sum_{\beta\in \bar Z^\alpha\cup\{\alpha\}} h[I_\beta]\cdot T_\beta[I_\beta,M^\beta]\cdot E[M^\beta,M^\alpha],\quad \alpha\in Z_{/k/}.$$

Тогда, начиная с $y_{\ell+1}[M]=0$, в порядке убывания $t= =\ell,\dots,2,1$ попутно можно вычислять вектор

$$y_t[M]=y_{t+1}[M]+\sum_{k\in U_t} h[I_k]\cdot T_k[I_k,M^k]\cdot E[M^k,M], \qquad (23)$$

удовлетворяющий системе (20) при $t=1$. Если $t>1$, то, вычислив строку

$$v_t[N]=c_t[N]-\sum_{k\in U_t}\{h[I_k]\cdot T_k[I_k,M^k]\}\cdot A[M^k,N^k]\cdot E[N^k,N], \qquad (24)$$

уменьшим t на I в формулах (2I)-(24).

5. Ввиду симметрии описанных процессов достаточно доказать, что алгоритм (I5)-(I9) дает решение системы (I2). Для этого необходимо прежде всего показать, что вектор $g[N]$, получаемый по частям $g[J_k]$, $k\in U_t$, из систем (I5) в порядке возрастания $t=1,2,\dots,\ell$, удовлетворяет системе (I3), которая эквивалентна соотношениям

$$B_{\bar k}[I_k,J_k]\cdot g[J_k]=T_{\bar k}[I_k,M^{\bar k}]\cdot b'_t[M^{\bar k}],\ k\in U_t, \qquad (25)$$

$$b'_t[M] = b[M] - \sum_{1\le\rho<t}\sum_{\alpha\in U_\rho} A[M,N^{\bar k}]\cdot R_{\bar k}[N^{\bar k},J_\alpha]\cdot g[J_\alpha],$$
$$t = 1,2,\ldots,\ell, \qquad (26)$$

на основании блочной треугольности (п.3) матрицы $B_{\bar k}[M,N]$.

Из структуры преобразований (9), (I0) ясно, что в полосах $T_{\bar k}[I^k,M]$ и $R_{\bar k}[N,J^k]$ отличны от нуля разве лишь части

$$T_{\bar k}[I^k,M^k] = T_k[I^k,M^k], \qquad R_{\bar k}[N^k,J^k] = R_k[N^k,J^k],$$

т.е. тем самым матрицы $B_{\bar k}[I^k,J^k]$ и (6) совпадают. Это значит, что в равенствах (I4), (25) можно заменить $\bar k$ на k, а в выражении (26) – $\bar k$ на α, откуда следует, в частности, совпадение векторов $x[N]$ и $x_\ell[N]$ при условии эквивалентности систем (I5) и (25) для всех $t = 1,2,\ldots,\ell$. Последнее же следует из доказываемого ниже совпадения векторов $b_t[M^k]$ и

$$b'_t[M^k] = b[M^k] - \sum_{1\le\rho<t}\sum_{\alpha\in U_\rho} A[M^k,N^\alpha]\cdot R_\alpha[N^\alpha,J_\alpha]\cdot g[J_\alpha] \qquad (27)$$

при каждом $k\in U_t$ и любом t в пределах $1\le t\le\ell$. В частности, при $t=1$ это очевидно, поскольку в цепочке равенств

$$b_1[M] = u_0[M] = b[M] = b'_1[M]$$

первое эквивалентно определению (I7) в силу условий $Z_{-|k|} = \emptyset$, $k\in U_1$, а последнее – определению (26).

Предположим, что при некотором $t>1$ векторы $b_\rho[M^\tau]$ и $b'_\rho[M^\tau]$ совпадают для всех $\tau\in U_\rho$, $1\le\rho<t$ (при $t=2$ это действительно так). Докажем сначала совпадение вырезок $b_t[M_k]$ и $b'_t[M_k]$ ($k\in U_t$) из векторов (I7) и (27). Обозначим через ρ_t наибольший номер в пределах $1\le\rho\le t$, при котором зоны $\{k\}\cup Z^{-|k|}$, $k\in U_t$, содержатся в объединении множеств U_ρ, $\rho_t\le\rho\le t$, и докажем равенство $b_{\rho_t}[M_k] = b'_{\rho_t}[M_k]$, очевидное при $\rho_t = 1$. В случае $\rho_t>1$ (рис. 3) найдется уровень $U_{\bar\rho}$ $(\bar\rho\ge t)$, состоящий из объединения множеств $Z_{|\tau|}$, $\tau\in U_{\rho_t-1}$, и для каждого $k\in U_t$ найдется единственная пара номеров $\tau_k\in U_{\rho_t-1}$ и $\alpha_k\in Z_{|\tau_k|}$, при которой $M^k\subset M^{\alpha_k}$, $N^k\subset N^{\alpha_k}$. Поскольку семейство M^α, $\alpha\in Z_{|\tau_k|}$, – разбиение множества M_{τ_k}, то $M^k\subset M_{\tau_k}$.

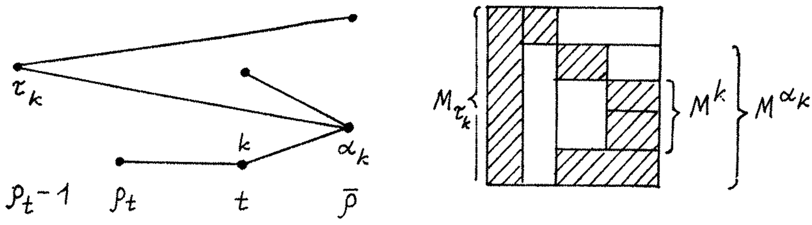

Рис.3

Следовательно, $b_{\rho_t-1}[M^k] = b'_{\rho_t-1}[M^k]$ по индуктивному предположению относительно $\rho_t - 1 < t$, а так как $A[M^{\tau_k}, N^{\tau}] = 0$ для всех $\tau \in U_{\rho_t-1} \setminus \{\tau_k\}$, то

$$b'_{\rho_t}[M_k] = b_{\rho_t-1}[M_k] - A[M_k, N^{\tau_k}] \cdot R_{\tau_k}[N^{\tau_k}; J_{\tau_k}] \cdot g[J_{\tau_k}].$$

Отсюда и из равенств

$$E[M_k, M^{\tau_k}] \cdot A[M^{\tau_k}, N^{\tau_k}] = A[M_k, N^{\tau_k}],\ E[M_k, M^{\tau}] = 0,\ \tau \in U_{\rho_t-1} \setminus \{\tau_k\},$$

легко видеть, что вырезка $u_{\rho_t-1}[M_k]$ из вектора $u_{\rho_t-1}[M]$, вычисляемого при замене в формуле (I9) t на $\rho_t - 1$ и k на α, с одной стороны, совпадает с $b'_{\rho_t}[M_k]$, а с другой – в силу условий $Z_{-|\beta|} = \varnothing$, $\beta \in U_{\rho_t}$, – с вырезкой $b_{\rho_t}[M_k]$ из вектора $b_{\rho_t}[M]$, определяемого заменой в формуле (I7) t на ρ_t и k на β. Если $\rho_t = t$, то утверждение доказано полностью ввиду равенств $M^k = M_k$ $(Z^{-|k|} = \varnothing)$ для всех $k \in U_{\rho_t}$. В случае $\rho_t < t$ имеем

$$u_{t-1}[M_k] = b_{\rho_t}[M_k] - \sum_{\rho_t \le \rho < t} \sum_{\beta \in U_\rho} E[M_k, M^\beta] \cdot A[M^\beta, N^\beta] \cdot R_\beta[N^\beta; J_\beta] \cdot g[J_\beta] -$$

$$- \sum_{\rho_t < \rho < t} \sum_{\beta \in U_\rho} E[M_k, M_\beta] \cdot \left\{ \sum_{\gamma \in Z_{-|\beta|}} A[M_\beta, N^\gamma] \cdot g_\gamma[N^\gamma] \right\},$$

$$b'_t[M_k] = b_{\rho_t}[M_k] - \sum_{\rho_t \le \rho < t} \sum_{\beta \in U_\rho} A[M_k, N^\beta] \cdot R_\beta[N^\beta; J_\beta] \cdot g[J_\beta]. \quad (28)$$

Поскольку $E[M_k, M^\beta] = 0$ ($M_k \cap M^\beta = \varnothing$) при всех $\beta \in U_\rho$, $\rho_t \le \rho < t$, то отсюда с учетом (I7) следует выражение

$$b_t[M_k] = b_{\rho_t}[M_k] - \sum_{\alpha \in Z_{-|k|}} A[M_k, N^\alpha] \cdot g_\alpha[N^\alpha]. \quad (29)$$

Если $Z_{-|k|} = \varnothing$ для некоторого $k \in U_t$, то в правой части (28) все слагаемые под знаком суммирования нулевые, так как $A[M_k, N^\beta]=0$ для всех $\beta \in U_\rho$, $\rho_t \le \rho < t$, т.е. совпадение вырезок (28), (29) очевидно.

Если $Z_{-|k|} \ne \varnothing$ для некоторого $k \in U_t$, то множества $\tilde{Z}^\alpha \cup \{\alpha\}$, $\alpha \in Z_{-|k|}$, содержатся [4] в объединении уровней U_ρ, $\rho_t \le \rho < t$. При этом в правой части (28), кроме $b_{\rho_t}[M_k]$, отличны от нуля разве лишь слагаемые с номерами $\beta \in \tilde{Z}^\alpha \cup \{\alpha\}, \alpha \in Z_{-|k|}$, в которых можно сделать замену по формулам

$$A[M_k, N^\beta] = A[M_k, N_k] \cdot E[N_k, N^\beta] = \sum_{\alpha \in Z_{-|k|}} A[M_k, N^\alpha] \cdot E[N^\alpha, N^\beta], \quad (30)$$

поскольку для этих номеров $N^\beta \subset N_k$, а разбиение N^α, $\alpha \in Z_{-|k|}$, множества N_k оправдывает замену

$$A[M_k, N_k] = \sum_{\alpha \in Z_{-|k|}} A[M_k, N^\alpha] \cdot E[N^\alpha, N_k]. \quad (31)$$

Изменение порядка суммирования в правой части (28) после подстановок (30), (31) и сравнение с определением (18) завершает доказательство совпадения векторов (28), (29) при всех $k \in U_t$.

Так как семейство $M_k, M^\tau, \tau \in Z_{-|k|}$, - разбиение множества M^k, то осталось доказать совпадение векторов $b_t[M^\tau]$ и $b'_t[M^\tau]$ при всех $\tau \in Z_{-|k|} \ne \varnothing$, $k \in U_t$. Обозначим через t_0 такой номер в пределах $1 \le \rho < t$, что уровень U_{t_0} является объединением попарно непересекающихся множеств $Z_{-|k|}, k \in U_t$. Тогда при каждом $\tau \in U_{t_0}$ верны представления

$$b_t[M^\tau] = b_{t_0}[M^\tau] - \sum_{t_0 \le \rho < t} \sum_{\alpha \in U_\rho} E[M^\tau, M^\alpha] \cdot A[M^\alpha, N^\alpha] \cdot R_\alpha[N^\alpha, J_\alpha] \cdot g[J_\alpha] -$$

$$- \sum_{t_0 < \rho < t} \sum_{\alpha \in U_\rho} E[M^\tau, M_\alpha] \cdot \left\{ \sum_{\gamma \in Z_{-|\alpha|}} A[M_\alpha, N^\gamma] \cdot g_\gamma[N^\gamma] \right\}, \quad (32)$$

$$b'_t[M^\tau] = b'_{t_0}[M^\tau] - \sum_{t_0 \le \rho < t} \sum_{\alpha \in U_\rho} A[M^\tau, N^\alpha] \cdot R_\alpha[N^\alpha, J_\alpha] \cdot g[J_\alpha],$$

в которых векторы $b_{t_0}[M^\tau]$ и $b'_{t_0}[M^\tau]$ совпадают по индуктивному предположению относительно $t_0 < t$. Если $Z_{|\tau|} = \varnothing$, то под знаками суммирования в каждом из представлений (32) отлично от нуля лишь одно и то же (единственное) слагаемое с

номером $\alpha = \tau \in U_{t_0}$, откуда очевидным образом следует совпадение векторов (32). В случае $Z_{|\tau|} = \varnothing$ для всех $\tau \in U_{t_0}$, что равносильно $t_0 = t-1$, утверждение доказано.

Если $Z_{|\tau|} \neq \varnothing$ для некоторого $\tau \in U_{t_0}$ (рис.4), то найдется такой номер t_1 в пределах $t_0 < t_1 < t$, что уровень U_{t_1} по определению является объединением попарно непересекающихся множеств $Z_{|\tau|}$, $\tau \in U_{t_0}$. Так как вырезки $b_t[M^\tau \setminus M_\tau]$ и $b'_t[M^\tau \setminus M_\tau]$ из векторов (32) совпадают по той же причине, что и в случае $Z_{|\tau|} = \varnothing$ в силу условий

$$M^\alpha \cap (M^\tau \setminus M_\tau) = \varnothing, \quad A[M^\tau \setminus M_\tau, N^\alpha] = 0, \quad \alpha \in U_\rho, \; t_0 < \rho < t,$$

а семейство M^β, $\beta \in Z_{|\tau|}$, – разбиение множества M_τ, то совпадение векторов (32) достаточно доказать с заменой t_0 на t_1 (τ на β) и таким образом продолжить монотонно возрастающую последовательность $t_0 < t_1 < \ldots$ вплоть до $t-1$. В последнем случае $Z_{|\beta|} = \varnothing$ для всех $\beta \in U_{t-1}$, откуда, как показано выше, следует совпадение вырезок (32) с заменой t_0 на $t-1$ (τ на β), а тем самым и совпадение вырезок (32) при всех $\tau \in U_{t_0}$.

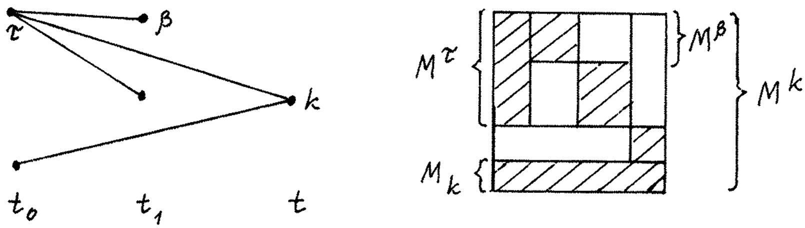

Рис. 4

6. В заключение выделим некоторые ситуации для $k \in Z$, позволяющие повысить эффективность описанных в п.4 алгоритмов.

Заметим сначала, что с точки зрения эффективности вычислений имеются три существенных отличия от алгоритма [5], основанного на последовательном дроблении блочной структуры матрицы (т.е. на переборе множеств $L_{\bar{k}\rho}$ в порядке возрастания $\rho = 0, 1, \ldots, r_{\bar{k}}$) в процессе ее преобразования в блочно-треугольную. Во-первых, каждое из преобразований (9), (10) в k-м блоке зависит от полной зоны $\tilde{Z}^k$, а не только от одной из зон $Z^{\sigma|k|}$ знака $\sigma = -1, 1$. Во-вторых, как очевидным образом следует из соотношений (32) при $Z_{-|k|} \neq \varnothing$, в правой части вы-

ражения (I9) нельзя заменить M^k на M_k, поскольку равенство

$$E[M^\tau, M_\tau]\cdot A[M_\tau, N^\tau] = A[M^\tau, N^\tau] \quad (\tau \in Z_{-|k|})$$

возможно лишь при $Z_{-|\tau|} = \varnothing$. В третьих, на совпадение вектора $g_\alpha[N^\alpha]$ в правой части (I7) с попутно вычисляемым вектором

$$x_{t-1}[N^\alpha] = x_{\rho_t - 1}[N^\alpha] + g_\alpha[N^\alpha] \tag{33}$$

можно рассчитывать лишь в случае $\rho_t = 1$, поскольку для $\rho_t > 1$ первое слагаемое в представлении (33), вообще говоря, отлично от нуля.

Однако в некоторых ситуациях указанные трудности можно обойти или хотя бы уменьшить. Если $k \in U_t \subset Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$ ($1 \leq t \leq \ell$), то в уравнении (I5) и в выражении (24) следует учесть, что в полосе $T_k[I_k, M^k]$ в силу условий (5) отлична от нуля разве лишь часть $T_k[I_k, M_k]$. Это значит, что в выражении (I9) можно заменить M^k на M_k, а в определении (9) опустить все преобразования, связанные с вершинами $\tau \in \tilde{Z}^\alpha \cup \{\alpha\}$, $\alpha \in Z_{-|k|}$. Последнее означает, что в случае $k \in Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$ семейство (I) в определении (9) можно заменить семейством

$$L'_{k0} = \{k\},\ L'_{k\rho} = \bigcup_{\alpha \in L'_{k,\rho-1}} Z^{-\alpha}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r_k, \tag{34}$$

и опустить преобразование $T_k(Z^k)$. При этом возможно, что $L'_{k\rho} = \varnothing$, начиная с некоторого положительного $\rho = r'_k \leq r_k+1$, т.е. матрицы $T(L'_{k\rho})$ единичные для $\rho \geq r'_k$. В случае $k = \bar{k}$ в выражении (I0) по симметрии можно опустить все преобразования, связанные с вершинами $\tau \in \tilde{Z}^\alpha \cup \{\alpha\}$, $\alpha \in Z_{|\bar{k}|}$, т.е. подставить в (I0) вместо семейства (I) соответствующие (по номеру ρ) множества из "расслоения"

$$L_0 = Z^{\bar{k}},\ L_\rho = \bigcup_{\alpha \in L_{\rho-1}} Z^{-\alpha}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r_{\bar{k}},$$

не опуская преобразование $R_{\bar{k}}(Z^{\bar{k}})$. Наконец, поскольку $\rho_t = 1$ для всех $U_t \subset Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$, то в выражении (I7) следует воспользоваться равенством (33) при $x_0[N] = 0$.

Заметим, что трудности, связанные с вычислением вектора (I8), можно перенести в формулу (I9) за счет некоторого расширения в ней множеств M^k, $k \in U_t$. Для этого при

каждом $\tau \in Z$ номера τ_i $(0 \le i < s)$ в цепочке (2), удовлетворяющие условию $\tau_{i+1} \in Z_{\sigma|\tau_i|}$, отнесем в соответствующие параметру $\sigma = \pm 1$ множества C_τ^σ, связанные с блочной структурой матрицы $A[M,N]$ следующим образом: в полосе $A[M,N^\tau]$ или $A[M^\tau,N]$ помимо клетки $A[M^\tau,N^\tau]$ отличны от нуля разве лишь части $A[M_\beta, N^\tau]$, $\beta \in C_\tau^{-1}$, или $A[M^\tau, N_\beta]$, $\beta \in C_\tau^1$, соответственно. Положим

$$\bar{M}^\tau = M^\tau \cup \Big(\bigcup_{\beta \in C_\tau^{-1}} M_\beta\Big), \quad \bar{N}^\tau = N^\tau \cup \Big(\bigcup_{\beta \in C_\tau^1} N_\beta\Big), \quad \tau \in Z,$$

и для $t = 2,3,\dots,\ell$ вектор $b_t[M^k]$ в правой части системы (I5) заменим вырезкой $b_t'[M^{k_t}] = b_t[M^k]$ из вектора

$$b_t'[M] = b_{t-1}'[M] - \sum_{\tau \in U_{t-1}} E[M,\bar{M}^\tau]\cdot A[\bar{M}^\tau, N^\tau]\cdot R_\tau[N^\tau, J_\tau]\cdot g[J_\tau]. \quad (35)$$

Эффективность каждого из алгоритмов (I7)-(I9) и (35) существенно зависит как от степени расслоения блочной структуры, т.е. от величины $z_{\bar{k}}$, так и от разветвленности структурного графа, т.е. от величины ℓ и числа элементов в уровнях U_ρ, $1 \le \rho \le \ell$. Например, если $z_{\bar{k}} = 0$, то предпочтение следует отдавать формулам (I7)-(I9), поскольку $Z = Z^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$, а например, в случаях, изображенных на рис.5, эти алгоритмы с точностью до перестановки слагаемых эквивалентны: здесь $\bar{k} = -1$, $z_{-1} \le 2$, $\ell = 3$ и каждый из уровней U_1, U_2, U_3 состоит из одного элемента.

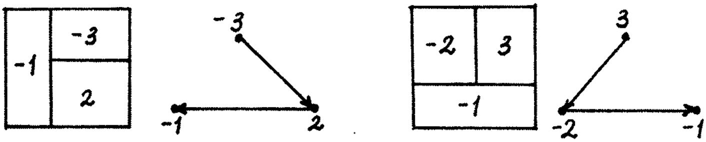

Рис.5

По симметрии в случае $k \in U_t \subset Z^{-\bar{k}}$, $1 \le t \le \ell$, в выражении (I0) с семейством (34) вместо (I) можно опустить преобразование $R_k(Z^k)$ и, включая случай $k = \bar{k}$, заменить в (I9), (2I), (23) N^k на N_k, а в выражении (22) учесть, что вектор $h_\alpha[M^\alpha]$ совпадает с вырезкой $y_{t+1}[M^\alpha]$ из вектора $y_{t+1}[M]$ при каждом $\alpha \in Z_{|k|}$. С другой стороны, для $t = \ell-1, \dots, 2, 1$ вектор $c_t[N^k]$ в правой части системы (2I) можно заменить вырезкой $c_t'[N^k] = c_t[N^k]$ из вектора

$$c'_t[N] = c'_{t+1}[N] - \sum_{\tau \in U_{t+1}} \{ h[I_\tau] \cdot T_\tau[I_\tau, M^\tau] \} \cdot A[M^\tau, \bar{N}^\tau] \cdot E[\bar{N}^\tau, N^\tau]$$

при $c'_\ell[N] = c_\ell[N] = c[N]$, отдавая предпочтение формулам (22)-(24), например, в случае $Z = Z^{-k} \cup \{\bar{k}\}$.

Литература

I. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, 1959.

2. Булавский В.А., Звягина Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании // Докл. АН СССР. - 1977. - Т. 235, № 5. - С.993-996.

3. Звягина Р.А. Обновление многослойного блочного базиса с учетом специфики концевых блоков // Оптимизация. - 1985. - Вып. 35(52). - С.56-69.

4. Звягина Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц // Оптимизация. - 1978. - Вып.22(39). - С.69-82.

5. Звягина Р.А. Упорядочение блоков при обновлении базиса с блочной структурой // Оптимизация. - 1983. - Вып.33(50).- С.44-55.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.07.88 г.