Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.853

МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТИПА, II

Р.Тихачке, Б.Шварц

В этой статье описанный в [1] общий метод возможных направлений исследуется применительно к специальному классу экстремальных задач, именуемых задачами полубесконечного типа.

Исходная задача имеет вид

$$\min\{f(x): g(x,t)\leq 0,\ t\in M,\ x\in X\subset R^n\}.$$

В случае конечного множества M имеем дело с обычной задачей нелинейного программирования с конечным числом ограничений. Однако во многих реальных задачах множество M не является конечным, например, в случае, когда t играет роль времени или пространственных координат. К задачам полубесконечного типа относятся многие задачи аппроксимации, оптимального управления, вариационные неравенства.

Теоретические основы задач полубесконечного типа развиты достаточно глубоко (см. в этой связи [2-4]). Значительно менее исследован вычислительный аспект [5-7], исключая, пожалуй, некоторые конкретные задачи аппроксимации и оптимального управления. Эффективные подходы к решению задач полубесконечного типа используют дискретизацию рассматриваемой задачи, в связи с чем весьма важным является анализ устойчивости решения при возмущении данных (см. [7-9]). Утверждения о непрерывной зависимости и устойчивости решения таких задач от исходной информации могут быть использованы для обеспечения сходимости последовательности решений аппроксимирующих задач.

Численные методы решения задач полубесконечного типа можно разделить на две группы: методы с априорной дискретизацией и адаптивной дискретизацией. В методах с априорной дискретизацией сетку $M_k \subset M$ выбирают заранее и возникающие при этом конечномерные задачи решаются обычными алгоритмами математического программирования [10]. Такой подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, оптимальное решение аппроксимирующей задачи, как правило, не является допустимым для исходной полубесконечной задачи. Во-вторых, для получения достаточно хорошего приближения к искомому решению требуется сетка с весьма большим числом узлов, что приводит к серьезным вычислительным трудностям.

Идея адаптивного подхода состоит в последовательном уточнении дискретизации в зависимости от результата, полученного на предыдущей итерации. Такого рода методы оказываются существенно более экономными. Методы возможных направлений и отсекающих плоскостей [10-12] принадлежат классу методов с адаптивной дискретизацией.

Цель исследований, отраженных во второй части, - конкретизировать полученные выше теоретические результаты и метод возможных направлений для задач полубесконечного типа. Показано, что при естественных предположениях относительно гладкости функций f и g последовательность решений дискретизационных задач сходится к решению исходной задачи.

Нумерация разделов и формул продолжает нумерацию работы [1].

3. Поиск направления спуска в задачах полубесконечного типа

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & f(x) \longrightarrow \min! \\ & g(x,t) \le 0, \quad t \in M; \\ & x \in X = \{v : f_i(v) \le 0, \ i = 1(1)m\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. а) $X \subset R^n$ выпукло и замкнуто;
б) $M \subset R^q$ - компакт;
в) при произвольном $t \in M$ функция $g(\cdot, t)$ выпукла на некотором открытом множестве X^0, содержащем X;
г) g и $\nabla_x g$ непрерывны на $X \times M$;
д) $f, f_1, \dots, f_m$ выпуклы и дифференцируемы на X^0;

е) существует $\tilde{x} \in int X$ такое, что

$$g(\tilde{x},t) < 0 \quad \forall t \in M;$$

ж) оптимальное множество X_{opt} для задачи (3.I) непусто и компактно.

Полагая $Y = \{x : g(x,t) \le 0 \ \forall t \in M\}$ и $F(x) = f(x) + \delta(x|Y) + \delta(x|X)$, можно представить задачу (3.I) в виде

$$\min\{F(x) : x \in R^n\}. \tag{3.2}$$

Ввиду принятого предположения 3.I для задачи (3.2) справедливы предположения 2.I и 2.2. Таким образом, при применении МВН, описанного в п.2, отыскание направления спуска сводится к определению введенных там функций h_i. Нетрудно показать, что, согласно предположению 3.I, субдифференциал функции F в точке x имеет вид

$$\partial F(x) = \nabla f(x) + \partial\delta(x|Y) + \partial\delta(x|X), \tag{3.3}$$

где

$$\partial\delta(x|X) = cone\{conv\{\nabla f_i(x) : i \in I(x)\}\}$$

и

$$\partial\delta(x|Y) = cone\{conv\{\nabla_x g(x,t) : t \in M(x)\}\}, \tag{3.4}$$

$$M(x) = \{t \in M : g(x,t) = 0\}.$$

На этой основе предлагаются три варианта поиска направления, удовлетворяющего соответствующим требованиям п.2.

В первом варианте специальным образом конструируется расширение субдифференциала (3.3); два других непосредственно используют производные функции F по направлению.

ВАРИАНТ А. Здесь в качестве h выбирается функция

$$h(x,v) = \sup\{\langle v, y\rangle : y \in P_\varepsilon(x)\},$$

где $P_\varepsilon(x)$ должны удовлетворять условиям а)–в) теоремы 2.9.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и

$$I_\varepsilon(x) = \{i : -\varepsilon \le f_i(x) \le 0\},$$

$$M_\varepsilon(x) = \{t \in M : -\varepsilon \le g(x,t) \le 0\}.$$

Определим

$$P_\varepsilon(x) = \nabla f(x) + cone\{conv\{\nabla f_i(x) + \varepsilon B : i \in I_\varepsilon(x)\}\} +$$

$$+\operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x,t)+\varepsilon B : t\in M_\varepsilon(x)\}\}, \qquad (3.5)$$

где по-прежнему B – единичный шар в R^n.

ТЕОРЕМА 3.2. Точечно-множественное отображение $P_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям а)-в) теоремы 2.9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость $P_\varepsilon(x)$ при любых $x\in X$ и $\varepsilon>0$ очевидна. Пусть

$$\bar I_\varepsilon(x)=\{i : -\varepsilon< f_i(x)\le 0\},$$

$$\bar M_\varepsilon(x)=\{t\in M : -\varepsilon< g(x,t)\le 0\}$$

и

$$\bar P_\varepsilon(x)=\nabla f(x)+\operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla f_i(x)+\varepsilon B : i\in \bar I_\varepsilon(x)\}\}+$$
$$+\operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x,t)+\varepsilon B : t\in \bar M_\varepsilon(x)\}\}.$$

Для любого $x\in \operatorname{dom} F$ справедливо

$$\partial F(x)\subset \bar P_\varepsilon(x)\subset P_\varepsilon(x).$$

Замечая, что $\bar P_\varepsilon$ п.н.сн. на $\operatorname{dom} F$, фиксируем последовательность $\{x_k\}\subset \operatorname{dom} F$ с пределом $x_\infty\in \operatorname{dom} F$. Для произвольного элемента $y\in \bar P_\varepsilon(x_\infty)$ покажем существование последовательности $y_k\in \bar P_\varepsilon(x_k)$, сходящейся к y_∞.

Из определения $\bar P_\varepsilon$,

$$y_\infty=\nabla f(x_\infty)+v_\infty+w_\infty,$$

где

$$\begin{aligned}&v_\infty\in\operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla f_i(x_\infty)+\varepsilon B : i\in \bar I_\varepsilon(x_\infty)\}\},\\ &w_\infty\in\operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x_\infty,t)+\varepsilon B : t\in \bar M_\varepsilon(x_\infty)\}\}.\end{aligned} \qquad (3.6)$$

Ввиду дифференцируемости f

$$\nabla f(x_k)\longrightarrow \nabla f(x_\infty), \qquad (3.7)$$

а из непрерывности f_i и определения $\bar I_\varepsilon(x)$ следует существование K_0 такого, что

$$\bar I_\varepsilon(x_k)\supset \bar I(x_\infty) \quad \text{при } K\geqslant K_0. \qquad (3.8)$$

На основании (3.6) элемент v_∞ может быть представлен в виде

$$v_\infty = \sum_{i\in \overline{I}_\varepsilon(x_\infty)} \lambda_i(\nabla f_i(x_\infty)+\varepsilon u_i),\ u_i\in B,\ \lambda_i\geq 0\ \forall i .$$

При

$$v_k = \sum_{i\in \overline{I}_\varepsilon(x_\infty)} \lambda_i(\nabla f_i(x_k)+\varepsilon u_i)$$

с учетом (3.8) справедливо

$$v_k \in \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla f_i(x_k)+\varepsilon B,\ i\in \overline{I}_\varepsilon(x_k)\}\}$$

для всех $k\geq k_0$ и

$$v_k \to v_\infty . \tag{3.9}$$

Аналогично, имеет место представление

$$w_\infty = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\nabla_x g(x_\infty,t_i)+\varepsilon u_i),\ \lambda_i\geq 0\ \ \forall i ,$$

причем ввиду непрерывности g и определения $\overline{M}_\varepsilon(x)$ найдется номер k_1, начиная с которого $\{t_1,\dots,t_{n+1}\}\subset \subset \overline{M}_\varepsilon(x_k)$ $(k\geq k_1)$, так что для

$$w_k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\nabla_x g(x_k,t_i)+\varepsilon u_i)$$

должно быть

$$w_k \in \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x_k,t)+\varepsilon B : t\in \overline{M}_\varepsilon(x_k)\}\}\quad (k\geq k_1)$$

и

$$w_k \longrightarrow w_\infty . \tag{3.10}$$

Из (3.7), (3.9) и (3.10) получаем, что $\overline{P}_\varepsilon$ п.н.сн. на $\operatorname{dom} F$.

Осталось лишь проверить выполнение условия б) теоремы 2.9. Легко показать, что

$$0^+\,\overline{P}_\varepsilon(x) = \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla f_i(x)+\varepsilon B : i\in \overline{I}_\varepsilon(x)\}\} +$$
$$+ \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x,t)+\varepsilon B : t\in \overline{M}_\varepsilon(x)\}\},$$

а с учетом предположения 3.1 е) и $\operatorname{dom} F = X\cap Y$ нормальный конус к множеству $\operatorname{dom} F$ в точке x имеет вид

$$K_x(\operatorname{dom} F) = \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla f_i(x) : i\in I(x)\}\} +$$
$$+ \operatorname{cone}\{\operatorname{conv}\{\nabla_x g(x,t) : t\in M(x)\}\}.$$

Тем самым

$$K_x(\operatorname{dom} F)\subset \operatorname{int} 0^+\overline{P}_\varepsilon(x)\cup\{0\}. \blacksquare$$

Таким образом, условия теоремы 2.9 с $X \cap Y$ вместо X, $f(x) := f(x) + \delta(x | X \cap Y)$ и $P(x) := P_\varepsilon(x)$ выполнены и функция $h_\varepsilon(x,r) = \sup\{\langle r, y\rangle : y \in P_\varepsilon(x)\}$ удовлетворяет предположению 2.3.

Теперь имеем возможность сконструировать последовательность точечно-множественных отображений $P_{\varepsilon_\ell}(x)$, удовлетворяющих условиям а) и б) теоремы 2.10.

Пусть $\{\varepsilon_\ell\}$ – убывающая последовательность с $\lim \varepsilon_\ell = 0$ и $P_{\varepsilon_\ell}(x)$ получено из (3.5) при $\varepsilon = \varepsilon_\ell$. Определяя $\widetilde{P}_{\varepsilon_\ell}(x) = P_{\varepsilon_\ell}(x)$, имеем $\widetilde{P}_{\varepsilon_{\ell+1}}(x) \subset \widetilde{P}_{\varepsilon_\ell}(x)$, т.е. условие а) теоремы 2.10 выполнено. Так как $\lim \varepsilon_\ell = 0$, субдифференциал $\partial F(x)$ может быть представлен в виде

$$\partial F(x) = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{P}_{\varepsilon_\ell}(x).$$

Наконец, замкнутость отображений $P_{\varepsilon_\ell}(x)$ является непосредственным следствием непрерывности определяющих их функций.

Таким образом, все требования теоремы 2.10 выполнены и мы получили конкретизацию МВН, описанного в п.2.

ВАРИАНТ Б. В качестве функции h, удовлетворяющей предположению 2.3, возьмем

$$h(x,r) = \min\{z : (r,z) \in R(x)\}, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned} R(x) = \{(r,z) : \ & \langle \nabla f(x), r\rangle \le z; \\ & f_i(x) + \langle \nabla f_i(x), r\rangle \le z,\ i \in I_\delta(x); \\ & g(x,t) + \langle \nabla_x g(x,t), r\rangle \le z,\ t \in M_\delta(x)\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$I_\delta(x) = \{i : -\delta \le f_i(x) \le 0\},$$

$$M_\delta(x) = \{t \in M : -\delta \le g(x,t) \le 0\},$$

$\delta > 0$ фиксировано.

Теорема 3.3. Для любого $\delta > 0$ функция h, определяемая соотношениями (3.11), (3.12), удовлетворяет предположению 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В проверке нуждается лишь условие 2.3 в). Иными словами, нужно показать существование функции φ, удовлетворяющей соотношению

$$F'(x,r) \le \varphi(x,r) \le h(x,r)$$

при всех $(x,r)\in N \equiv \{(v,s): v\in dom F,\ s\in K(v, dom F)\cap B\}$ и непрерывной на $cl\ N$. Для этого введем функции

$$\underline{h}(x,r) = f'(x,r) \tag{3.13}$$

и

$$\overline{h}(x,r) = inf\{z:(r,z)\in \overline{R}(x)\}, \tag{3.14}$$

где

$$\overline{R}(x) = \{(r,z): \langle \nabla f(x),r\rangle \le z;\ f_i(x) + \langle \nabla f_i(x), r\rangle \le z,$$

$$i\in \overline{I}_\delta(x);\ g(x,t) + \langle \nabla_x g(x,t), r\rangle \le z,\ t\in \overline{M}_\delta(x)\}, \tag{3.15}$$

$$\overline{I}_\delta(x) = \{i: -\delta < f_i(x) \le 0\},\ \overline{M}_\delta(x) = \{t\in M: -\delta < g(x,t) \le 0\}. \tag{3.16}$$

Так как f выпукла на $X^0 \supset dom F$, функция $\underline{h}$ является п.н.св. на $dom F \times R^n$.

Из определения $F'(x,r)$ следует, что

$$F'(x,r) = f'(x,r) \qquad \text{для всех } r\in K(x, dom F), \tag{3.17}$$

и легко проверить справедливость соотношения

$$F'(x,r) \le \overline{h}(x,r) \le h(x,r) \tag{3.18}$$

для всех $x\in dom\ F$.

Покажем, что $\overline{h}$ п.н.сн. на $dom F\times B$. Пусть $\{(x_k,r_k)\}\subset$ $\subset dom F\times B$ – последовательность, сходящаяся к точке $(x_\infty, r_\infty)\in$ $\in dom F\times B$. Положим $\overline{h}(x_\infty, z_\infty) = \underline{z}_\infty, \overline{h}(x_k,r_k) = z_k$. Ввиду (3.14), (3.15) имеем $(r_k, z_k)\in \overline{R}(x_k)$ при любом k и $(r_\infty, z_\infty)\in \overline{R}(x_\infty)$.

Предположим, что существует $\rho > 0$, при котором имеет место

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \overline{h}(x_k,r_k) = \overline{z} \le z_\infty - \rho. \tag{3.19}$$

Учитывая определение $\overline{I}_\delta(x)$, $\overline{M}_\delta(x)$ и непрерывность f, f_i, $\nabla f_i, \nabla f_i, g$ и ∇g_x, можно показать, что

$$(r_\infty, \overline{z} + \rho/2) \in \overline{R}(x_\infty). \tag{3.20}$$

Но это противоречит соотношению

$$z_\infty = \bar{h}(x_\infty, z_\infty) = \inf\{z : (z,z) \in \bar{R}(x_\infty)\}$$

и, значит, $\bar{h}$ п.н.сн. на $dom\, F \times B$. Тем самым с учетом (3.18) имеем

$$f'(x,z) = \underline{h}(x,z) \le \bar{h}(x,z) \le h(x,z)$$

для всех $(x,z) \in dom\, F \times B$. (3.21)

С помощью рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве теорем 2.8 и 2.9, устанавливается существование функции φ, непрерывной на $dom\, F \times B$ и удовлетворяющей условию

$$\underline{h}(x,z) \le \varphi(x,z) \le \bar{h}(x,z). \quad (3.22)$$

Объединяя (3.17), (3.21) и (3.22), получаем

$$F'(x,z) \le \varphi(x,z) \le h(x,z) \text{ для всех } (x,z) \in N.$$

Следовательно, функция φ непрерывна на $cl\, N \subset dom\, F \times B$ и предположение 2.3 в) выполнено. ▨

Функция h, определенная соотношениями (3.11) и (3.12), обладает следующим важным для МВН свойством.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть h определена согласно (3.11), (3.12). Если при этом $\min\{h(\bar{x},z) : \|z\| \le 1\} \ge 0$ для фиксированного $\bar{x} \in dom\, F$, то*

$$F'(\bar{x},z) \ge 0 \quad \text{для любого } z \in B \quad (3.23)$$

и, следовательно, $\bar{x} \in X_{opt}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное:

$$\min\{h(\bar{x},z) : \|z\| \le 1\} \ge 0,$$

но $F'(\bar{x},z) < 0$ для некоторого z. (3.24)

Тогда $f(x^*) < f(\bar{x})$ при любом $x^* \in X_{opt}$. Ввиду предположения 3.1 е) существует элемент $\hat{x} \in int\, X \cap int\, Y$ такой, что $\|\hat{x} - \bar{x}\| \le 1$ и $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$. Выбирая $\bar{z} = \hat{x} - \bar{x}$ и

$$\bar{z} \doteq \min\{f(\hat{x}) - f(\bar{x}),\ f_i(\hat{x})\ (i = 1(1)m),\ \min g(\hat{x},t)\},$$

ввиду выпуклости f, f_i, $g(\cdot,t)$ имеем $\bar{z} < 0$ и, согласно определению $R(x)$, должно быть $(\bar{z},\bar{z}) \in R(\bar{x})$. Но это в свою очередь влечет $h(\bar{x},\bar{z}) \le \bar{z} < 0$, вопреки (3.24). ▨

Как следует из теорем 2.4 и 3.4, МВН с функцией h, определенной согласно (3.II), (3.I2), сходится при произвольном фиксированном $\delta > 0$. Этот подход к выбору направления спуска эквивалентен подходу Эттли [I3,I4].

ВАРИАНТ В. В качестве функции h, удовлетворяющей предположению 2.3, берется

$$h(x,r) = max\{f(x+r) - f(x),\ max\{f_i(x+r) : i \in I_\delta(x)\};$$
$$max\{g(x+r,t) : t \in M_\delta(x)\}\}, \qquad (3.25)$$

где $I_\delta(x)$ и $M_\delta(x)$ определены согласно (3.I2), $\delta > 0$ фиксировано.

Полунепрерывная снизу миноранта $\bar{h}$ функции h получается, если в (3.25) заменить $I_\delta(x)$ и $M_\delta(x)$ соответственно на $\bar{I}_\delta(x)$ и $\bar{M}_\delta(x)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3.

Как и в варианте Б, неравенство $min\{h(\bar{x},r) : \|r\| \leq 1\} \geq 0$ указывает на оптимальность точки $\bar{x}$ и метод может быть реализован с фиксированным $\delta > 0$. В варианте В не используются производные, так что функции f, f_i, g не обязаны быть дифференцируемыми. Следует, однако, обратить внимание на трудности, связанные с решением задачи

$$min\{h(x,r) : \|r\| \leq 1\}$$

– поиска направления спуска. В негладком случае можно рекомендовать использовать для этого методы случайного поиска.

4. Численное решение задач полубесконечного типа с использованием методов возможных направлений

4.I. Дискретизация задач полубесконечного типа. Общий путь решения полубесконечных задач состоит в их дискретизации. От способа дискретизации существенно зависит как "качество" аппроксимирующих задач, так и эффективность всего вычислительного процесса.

Аппроксимация исходной задачи

$$min\{f(x) : g(x,t) \leq 0,\ t \in M;\ x \in X \subset R^n\} \qquad (4.I)$$

с помощью последовательности конечномерных задач

$$min\{f(x) : g(x,t) \leq 0,\ t \in M_k;\ x \in X\} \qquad (4.2)$$

($M_k \subset M$ - множество с конечным числом элементов) должна быть осуществлена таким образом, чтобы, как минимум, последовательность $\{f(x_k)\}$ оптимальных значений целевых функций в (4.2) сходилась к оптимальному значению целевой функции в полубесконечной задаче (4.I). На основе общих результатов теории точечно-множественных отображений можно указать условия относительно непрерывности функционалов и плотности в M семейства множеств $\{M_k\}$, при которых указанная сходимость имеет место [9,I5]. Недостатки такого априорного подхода: решения задач (4.2), вообще говоря, не являются допустимыми для (4.I) и для получения достаточно точной аппроксимации оптимального решения задачи (4.I) используется задача типа (4.2) с весьма большим числом ограничений, т.е. трудная для численного решения.

Цель этого раздела - показать, каким образом задачи полубесконечного типа могут быть решены методами возможных направлений с использованием дискретизированных задач поиска направления. При подходящих предположениях генерируется последовательность допустимых решений для задачи (4.I), а задачи поиска направления имеют относительно небольшую размерность. Основные понятия и результаты п.3 будут здесь использованы при построении различных вариантов задач поиска направления (шаг 2° МВН в п.2). На очередном шаге дискретизация задачи выбора направления учитывает информацию, полученную на предыдущем шаге, причем таким образом, что мы непременно получаем подходящее направление спуска.

Для описания этого подхода рассмотрим задачу (4.I) при условии, что множество X задано в виде (3.I). Дополнительно к предположению 3.I считаем выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.I. Для каждого $x \in X$ существует постоянная $L(x)$ такая, что

$$|g(x,t') - g(x,t)| \leq L(x)\,\|t'-t\|,$$

$$\|\nabla_x g(x,t') - \nabla_x g(x,t)\| \leq L(x)\,\|t'-t\|$$

при любых $t', t \in M$.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 4.2. Пусть при фиксированных $\bar{x}, \bar{t}$ и γ вектор $r \in B$ удовлетворяет неравенству

$$\langle \nabla_x g(\bar{x},\bar{t}), r \rangle \leq -\gamma.$$

Тогда $\langle \nabla_x g(\bar{x},t), r \rangle \leq -\frac{\gamma}{2}$ при любом $t \in M$

таком, что $\|t-\bar{t}\| \le \frac{\gamma}{2L(\bar{x})}$.

Пусть M^h – фиксированная дискретизация множества (с конечным числом элементов), величина $h = \max_{t \in M} \min_{t_i \in M_h} \|t-t_i\|$ характеризует плотность аппроксимации.

ЛЕММА 4.3. Пусть $h \le \min\left\{\frac{\gamma}{2L(\bar{x})}, \frac{\varepsilon}{2L(\bar{x})}\right\}$ и $\tilde{M}_h(\bar{x}) = \{t \in M^h: g(\bar{x},t) \ge -\varepsilon\}$. Если для некоторого $\tilde{r} \in B$ при всех $t \in \tilde{M}_h(\bar{x})$ имеет место $\langle \nabla_x g(\bar{x},t), r\rangle \le -\gamma$, то $\langle \nabla_x g(\bar{x},t), r\rangle \le -\gamma/2$ для всех $t \in M_{\varepsilon/2}(\bar{x})$, где $M_{\varepsilon/2}(\bar{x}) = \{t \in M: -\frac{\varepsilon}{2} \le g(\bar{x},t) \le 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in M_{\varepsilon/2}(\bar{x})$. По определению M^h, найдется точка $t' \in M^h$ такая, что $\|t'-t\| \le \frac{\varepsilon}{2L(\bar{x})}$. Отсюда легко получить неравенство $g(\bar{x},t') \ge -\varepsilon$, т.е. $t' \in \tilde{M}_h(\bar{x})$ и, следовательно, $\langle \nabla_x g(\bar{x},t'), r\rangle \le -\gamma$. Так как по выбору h справедливо $\|t-t'\| \le \frac{\gamma}{2L(\bar{x})}$, то на основании леммы 4.2 имеем $\langle \nabla_x g(\bar{x},t), r\rangle \le -\gamma/2$. ▨

4.2. Численное решение задач полубесконечного типа.

4.2.I. В варианте А имеем следующую задачу выбора направления:

$$\min_{r \in B} \sup\{\langle r,y\rangle : y \in P_\varepsilon(x)\}. \qquad (4.3)$$

Преобразуя выражение (3.5), определяющее множество $P_\varepsilon(x)$, можно записать задачу (4.3) следующим образом:

$$\min_{r \in B} \sup\{\langle r, \nabla f(x)\rangle : \langle r, z_1\rangle \le 0 \ \forall z_1 \in Z_1, \langle r, z_2\rangle \le 0 \ \forall z_2 \in Z_2\}, \qquad (4.4)$$

где

$$Z_1 = \text{cone}\{\text{conv}\{\nabla f_i(x) + \varepsilon B : i \in I_\varepsilon(x)\}\},$$

$$Z_2 = \text{cone}\{\text{conv}\{\nabla_x g(x,t) + \varepsilon B : t \in M'_\varepsilon(x)\}\}.$$

Ограничения в задаче (4.4), в свою очередь, можно представить в виде

$$\langle r, \nabla f_i(x)\rangle \le -\varepsilon \quad \text{для всех } i \in I_\varepsilon(x),$$

$$\langle r, \nabla_x g(x,t)\rangle \le -\varepsilon \quad \text{для всех } t \in M_\varepsilon(x).$$

Тем самым задача (4.3) эквивалентна следующей задаче, вообще говоря, полубесконечного типа:

$$\begin{aligned}&\langle r, \nabla f(x)\rangle \longrightarrow \min!\\&\langle r, \nabla f_i(x)\rangle \le -\varepsilon \quad \text{для} \quad i \in I_\varepsilon(x),\\&\langle r, \nabla_x g(x,t)\rangle \le -\varepsilon \quad \text{для} \quad t \in M_\varepsilon(x),\\&\|r\| = 1.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Если r_x является ее оптимальным решением, причем $\langle r_x, \nabla f(x)\rangle < -\varepsilon$, то в соответствии с процедурой 2^0 МВН вектор r_x может быть использован в качестве подходящего направления спуска.

Возникает вопрос, каким образом определить конечную аппроксимацию множества $M_\varepsilon(x)$, чтобы оптимальное решение соответствующей дискретизированной задачи удовлетворяло ограничениям задачи (4.5).

Выберем дискретизацию M^h множества M с $h \le \varepsilon(2L(x))^{-1}$ и определим конечное множество

$$\widetilde{M}_\varepsilon^h(x) = \{t \in M^h : g(x,t) \ge -2\varepsilon\}. \tag{4.6}$$

Используя (4.5), (4.6), рассмотрим следующую конечномерную экстремальную задачу:

$$\begin{aligned}&\langle r, \nabla f(x)\rangle \longrightarrow \min!\\&\langle r, \nabla f_i(x)\rangle \le -\varepsilon, \; i \in I_\varepsilon(x);\\&\langle r, \nabla_x g(x,t)\rangle \le -2\varepsilon, \; t \in \widetilde{M}_\varepsilon^h(x);\\&\|r\| \le 1.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Пусть r^* - оптимальное решение задачи (4.7), удовлетворяющее неравенству

$$\langle r^*, \nabla f(x)\rangle \le -\varepsilon.$$

С учетом предложения 4.I, выбора множества $\widetilde{M}_\varepsilon^h$ и леммы 4.3 заключаем, что вектор r^* является допустимым решением задачи (4.5). Сходимость МВН с выбором направления спуска по варианту А является следствием соответствующих утверждений из п.3 (теорема 3.2 и комментарии к ней).

Характер задачи (4.7) зависит от выбора нормы. При $\|r\| = \max\limits_{i=1(1)n} |r_i|$ имеем задачу линейного программирования, и описанный алгоритм аналогичен алгоритму PI Зойтендейка [I6] для конечномерной задачи.

Остановимся на выборе длины шага при использовании варианта А. Речь идет об отыскании такого $\lambda_0 > 0$, что

$$\min\{f(x+\lambda r):\lambda\geq 0\}=f(x+\lambda_0 r),$$

естественно, при условии допустимости $x+\lambda r$ и $x+\lambda_0 r$. Нестандартным здесь является именно учет требования допустимости $x+\lambda r$ (при использовании обычных процедур одномерной минимизации).

Сначала рассмотрим случай, когда функция $g(\cdot,t)$ линейна при любом $t\in M$. Предположим, что в точке $\bar{x}$ согласно (4.7) определено направление $\bar{r}$. Нетрудно видеть, что этот вектор $\bar{r}\in B$ удовлетворяет условиям

$$\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle\leq -\varepsilon \qquad \text{для всех } t\in M_\varepsilon(\bar{x}).$$

В силу линейности $g(\cdot,t)$ отсюда следует, что $g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)\leq 0$ при всех $t\in M_\varepsilon(\bar{x})$ и всех $\lambda\geq 0$, так что ограничение $g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)\leq 0$ следует проверять лишь при $t\notin M_\varepsilon(\bar{x})$.

Пусть $t\in M^h\setminus\widetilde{M}^h_\varepsilon(\bar{x})$ и $\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle\leq 0$. Тогда, ввиду линейности g, имеем $g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)\leq -2\varepsilon$ для всех $\lambda\geq 0$. Если же $t\in M^h\setminus\widetilde{M}^h_\varepsilon(\bar{x})$ и $\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle>0$, то $g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)=g(\bar{x},t)+\lambda\langle\nabla_x g(\bar{x},t),r\rangle\leq -2\varepsilon+\lambda\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle$ и можно указать $\lambda_t>0$, при котором $g(\bar{x}+\lambda_t\bar{r},t)=-\varepsilon$.

Таким образом, выбирая

$$\bar{\lambda}=\min\{\lambda_t: t\in M^h\setminus\widetilde{M}^h_\varepsilon(\bar{x}),\ \langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle>0\},$$

имеем

$$g(\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{r},t)\leq -\varepsilon \quad \text{для всех } t\in M^h.$$

Отсюда, на основании условия Липшица (для функции g) следует

$$g(\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{r},t)\leq 0 \qquad \text{для всех } t\in M.$$

Полагая далее $\lambda^*=\min\{\lambda_0,\bar{\lambda},\bar{\bar{\lambda}}\}$, где $\bar{\bar{\lambda}}=\max\{\lambda: f_i(\bar{x}+\lambda\bar{r})\leq 0,\ i\in I_\varepsilon(\bar{x})\}$, определяем тем самым длину сдвига, используя лишь конечное множество M^h значений t.

В случае, если нелинейная функция $g(\cdot,t)$ является эквилипшицевой для всех t с константой L, используем неравенство

$$g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)\leq g(\bar{x},t)+\lambda\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle+\frac{L}{2}\|\lambda\bar{r}\|^2. \tag{4.8}$$

При $t\in M_\varepsilon(\bar{x})$ ввиду $\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{r}\rangle\leq -\varepsilon$ и $\bar{r}\in B$ имеем $g(\bar{x}+\lambda\bar{r},t)\leq 0+\lambda(-\varepsilon)+\frac{L}{2}\lambda^2$ для всех $t\in M_\varepsilon(\bar{x})$. Полагая $\bar{\lambda}=2\varepsilon L^{-1}$, получаем

$$g(\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{r},t)\leq 0 \qquad \text{для} \quad t\in M_\varepsilon(\bar{x}). \tag{4.9}$$

Если же $t \in M^h \setminus \widetilde{M}^h_\varepsilon(\bar{x})$, то $g(\bar{x},t) \le -2\varepsilon$, откуда ввиду (4.8)

$$g(\bar{x}+\lambda\bar{\tau},t) \le -2\varepsilon + \lambda\langle\nabla_x g(\bar{x},t),\bar{\tau}\rangle + \frac{L}{2}\lambda^2\|\bar{\tau}\|^2$$

и можно указать $\hat{\lambda} \le \bar{\lambda}$, $\hat{\lambda} > 0$, при котором

$$g(\bar{x}+\hat{\lambda}\bar{\tau},t) \le -\varepsilon \quad \text{для всех } t \in M^h \setminus \widetilde{M}^h_\varepsilon(\bar{x}). \qquad (4.10)$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как для линейной функции $g(\cdot,t)$.

При отсутствии дополнительной информации относительно функции $g(\cdot,t)$ выбор длины шага, вообще говоря, требует решения экстремальной задачи

$$\max_{\lambda>0}\{\lambda : \max_{t\in M} g(\bar{x}+\lambda\bar{\tau},t) \le 0\}$$

и может оказаться достаточно трудоемкой процедурой.

4.2.2. Выбор направления спуска по варианту Б требует решения следующей задачи с фиксированным $\delta > 0$:

$$\begin{gathered} z \longrightarrow \min! \\ \langle\nabla f(x),\tau\rangle \le z; \\ f_i(x)+\langle\nabla f_i(x),\tau\rangle \le z,\ i\in I_\delta(x); \\ g(x,t)+\langle\nabla_x g(x,t),\tau\rangle \le z,\ t\in M_\delta(x); \\ \|\tau\| \le 1. \end{gathered} \qquad (4.11)$$

Как и прежде, выберем $h \le \varepsilon(2L(x))^{-1}$ и определим конечное множество

$$\hat{M}^h_\delta = \{t \in M^h : g(x,t) \ge -2\delta\}. \qquad (4.12)$$

Рассмотрим наряду с (4.11) следующую дискретизированную задачу:

$$\begin{gathered} z \longrightarrow \min! \\ \langle\nabla f(x),\tau\rangle \le z; \\ f_i(x)+\langle\nabla f_i(x),\tau\rangle \le z,\ i\in I_\delta(x); \\ g(x,t)+\langle\nabla_x g(x,t),\tau\rangle \le z,\ t\in \hat{M}^h_\delta(x); \\ \|\tau\| \le 1. \end{gathered} \qquad (4.13)$$

Пусть (τ^*, z^*) – оптимальное решение этой задачи с $z^* \le -2\varepsilon$. Тогда $(\tau^*, -\varepsilon)$ является допустимым решением задачи (4.11).

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить выполнение

ограничения $g(x,t)+\langle\nabla_x g(x,t),r\rangle \leq z$ при всех $t\in M_\delta(x)$. Если $t\in M_\delta(x)$, то найдется такая точка $t'\in \tilde M_\delta^h(x)$, что $\|t-t'\|\leq\varepsilon(2L(x))^{-1}$ и

$$g(x,t)\leq g(x,t')+|g(x,t)-g(x,t')|\leq g(x,t')+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.14)$$

Используя лемму 4.1, с учетом $r^*\in B$ получим

$$\langle\nabla_x g(x,t),r^*\rangle\leq\|\nabla_x g(x,t)-\nabla_x g(x,t')\|+$$
$$+\langle\nabla_x g(x,t'),r^*\rangle\leq L(x)\|t-t'\|+$$
$$+\langle\nabla_x g(x,t'),r^*\rangle\leq\frac{\varepsilon}{2}+\langle\nabla_x g(x,t'),r^*\rangle. \qquad (4.15)$$

Из (4.14), (4.15) имеем

$$g(x,t)+\langle\nabla_x g(x,t),r^*\rangle\leq g(x,t')+\varepsilon+$$
$$+\langle\nabla_x g(x,t'),r^*\rangle. \qquad (4.16)$$

Но ввиду допустимости (r^*,z^*) в задаче (4.13) должно быть

$$g(x,t')+\langle\nabla_x g(x,t'),r^*\rangle\leq z^*\leq-2\varepsilon.$$

Вместе с (4.16) последнее неравенство обеспечивает допустимость точки $(r^*,-\varepsilon)$ для задачи (4.11). Таким образом, определяя направление r^* в результате решения конечномерной задачи (4.13), удовлетворяем условиям, гарантирующим сходимость МВН.

Метод возможных направлений с выбором направления по варианту Б аналогичен Р2 - алгоритму Зойтендейка.

Конкретизация и анализ МВН с использованием варианта В осуществляется по такой же схеме.

4.2.3. Опишем детально итерационный процесс МВН с выбором направления по варианту А (при использовании варианта Б алгоритм строится аналогично).

Будем считать, что выполнены предположения 3.1 и 4.1.

1^0. Фиксируем $\varepsilon_0>0$, $x_0\in R$, $k:=0$, $\ell:=0$, $\rho\in(0,1)$ (R - допустимое множество в исходной задаче).

2^0. Выбираем сетку $M^{h_\ell}\subset M$ $h_\ell=\varepsilon_\ell(2L(x_k))^{-1}$.

3^0. Строим множество

$$\tilde M_{\varepsilon_\ell}^{h_\ell}(x_k)=\{t\in M^{h_\ell}: g(x_k,t)\geq-2\varepsilon_\ell\}.$$

4^0. Определяем оптимальное решение r_k^* задачи линейного программирования

$$\langle r, \nabla f(x_k)\rangle \to \min!$$
$$\langle r, \nabla f_i(x_k)\rangle \le -\varepsilon_\ell,\ i\in I_{\varepsilon_\ell}(x_k);$$
$$\langle r, \nabla_x g(x_k,t)\rangle \le -2\varepsilon_\ell,\ t\in M^{h_\ell}_{\varepsilon_\ell}(x_k);$$
$$\|r\|_\infty \le 1.$$

5°. а) Если $\langle r_k^*, \nabla f(x_k)\rangle \le -\varepsilon_\ell$, переходим к 6°;

б) в противном случае переходим к 7°.

6°. Определяем λ_k и $x_{k+1}=x_k+\lambda_k r_k^*$ из условий $x_k+\lambda_k r_k^*\in R$ и
$$f(x_k+\lambda_k r_k^*)=\min\{f(x_k+\lambda r_k^*): x_k+\lambda r_k^*\in R\}$$
и полагаем $k:=k+1$. Переходим на шаг 3°.

7°. Полагаем $\varepsilon_{\ell+1}:=\rho\varepsilon_\ell,\ \ell:=\ell+1$ и переходим на шаг 2°.

Следующее утверждение вытекает из теорем 2.7 и 2.10.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть выполнены предположения 3.1 и 4.1. Тогда последовательность $\{x_k\}$, конструируемая согласно алгоритму 1°–7°, обладает следующими свойствами:

1) $f(x_{k+1}) < f(x_k)$;

2) $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\min\{f(x): g(x,t)\le 0, t\in M; x\in X\}$;

3) $\{x_k\}$ ограничена и любая ее предельная точка является оптимальным решением задачи (3.1).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Алгоритмы МВН с выбором направления по вариантам А и Б были опробованы на задачах выпуклого программирования (см. [6]). В [17] МВН применялся для решения задач, полученных при конечно-элементной аппроксимации некоторых вариационных неравенств. В этом случае МВН с использованием варианта Б особенно удобен, ибо допустимое направление определяется точной формулой.

2. Условие Липшица (по t) для функции g и ее градиента позволяет обоснованно определять подходящую дискретизацию M^h множества M . Без труда также можно дать оценку для размерности конечномерной задачи поиска направления в зависимости от параметра ε . Весьма удобно, что вначале используется сеть с относительно малым числом узлов, которое впоследствии растет с

уменьшением ε_ℓ , лишь если с помощью уже имеющейся аппроксимации нельзя найти подходящего направления.

Литература

I. Тихачке Р., Шварц Б. Методы возможных направлений для экстремальных задач полубесконечного типа// Оптимизация. - 1988. - Вып.43(60). - С. 62-71.

2. Krabs W. Optimierung und Approximation.- Stuttgart: Teuber Verlag, 1975.

3. Laurent P.J. Approximation et Optimisation. - Paris: Hermann, 1972.

4. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. - М.: Наука, 1969.

5. Gustafson S.A., Kortanek K.O. Numerical treatment oa a class of semi-infinite programming problems// Naval Research Logistics Quarterly. - 1973. - V.20. - P.477-504.

6. Scheurer Ch. Konvergenzraten fur Verfahren zulässiger Richtungen bei semi-infiniten konvexen Optimierungsaufgaben. - Karl-Marx-Stadt: TU, 1982.

7. Tichatschke R. Lineare semi-infinite Optimierungsaufgaben und ihre Anwendung in der Approximationstheorie // Wissenschaftliche Schriftenreihe. - Karl-Marx-Stadt:TU, 1981. - N 4.

8. Blatt H.P. Stetigkeitseigenschaften von Optimierungsaufgaben und lineare Chebyschev-Approximation// Approximation Theory.- Warszawa, 1975.

9. Tichatschke R. Stetigkeitseigenschaften und Konvergenz von Folgen diskretisierter konvexer semi-infiniter Optimierungsaufgaben// Wissenschaftliche Zeitschrift. - Karl-Marx-Stagt: TU, 1979. - N 21. - S. 577-586.

10. Hettich R. Semi-infinite programming// Lecture Notes in Control and Information Sci. - 1979. - N 15.

11. Blankenship J.W., Falk J.E. Infinitely constrained optimization problems. - J. Optim. Theory and Appl. - 1976. - V.19.- P.261-281.

I2. Kapur L.C. On cutoff optimization methods in infinite dimensional spaces and applications // J. Optim. Theory and Appl. - I973. - V.I2. - P.I6-3I.
I3. Blum E., Oettli W. Mathematische Optimierung. - Berlin - N.Y.: Springer Verlag, I976.
I4. Blum E., Oettli W. The principle of feasible direction for nonlinear approximants and infinitely many constraints// Symposia Mathematica. - I976. - V.I9. - P.9I-I0I.
I5. Krabs W. Zur stetigen Abhängigkeit des Extramalwertes eines konvexen Optimierungsproblems von einer stetigen Ändererung des Problems // Zeitschrift Angew. Mech. Math. - I972.- T.52.- S. 359-368.
I6. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: ИЛ, I962.
I7. Tichatschke R., Kirsten H. Uber die Lösung von Variationsungleichungen mittels Verfahren der zulässigen Richtungen// XXVII Intern. Wissenschaftlicher Kolloquium. - Illmenau: TH. - I982. - N 5. - S.43-46

Поступила в ред.-изд. отдел
28.09.I986 г.