Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.853

ЗАДАЧА ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ

В.И.Шмырёв

В настоящей работе рассматривается задача, являющаяся естественным обобщением задачи линейной комплементарности [1,2]. Подобного рода обобщение возникает при рассмотрении вопроса о построении эффективных алгоритмов отыскания состояния равновесия в линейных экономических моделях обмена [3-5]. Речь идет об отыскании неподвижных точек заданного на некотором полиэдральном комплексе полунепрерывного сверху многозначного отображения F, значения которого заполняют полиэдральный комплекс, двойственный исходному.

В предположении монотонности отображения F задача рассматривалась автором в [6,7]. Здесь рассматривается более общий случай (слабо убывающие отображения).

§1. Общая схема

Пусть в R^n задана конечная совокупность ω выпуклых замкнутях многогранников Ω_i, $i \in I$, которые не пересекаются по относительно внутренним точкам и заполняют некоторое выпуклое множество Ω (случай $\Omega = R^n$ не исключается):

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \Omega; \; \operatorname{Int}\Omega_i \cap \operatorname{Int}\Omega_j = \emptyset, \; i \neq j. \qquad (1)$$

При этом предполагается, что любая грань многогранника из ω также содержится в ω. Иными словами, ω является замкнутым полиэдральным комплексом, и между элементами ω имеется отношение частичного порядка: $\Omega_i \prec \Omega_j$ означает по определению, что Ω_i является собственной гранью многогранника Ω_j.

Пусть задан также комплекс ξ замкнутых многогранников $\Xi_i, i \in I$, находящийся с комплексом ω в отношении двойственности, т.е.

1) из $\Omega_i \prec \Omega_j$ следует $\Xi_j \prec \Xi_i$,

2) $\dim \Omega_i + \dim \Xi_i = n$.

Задача состоит в отыскании такой точки $x \in \Omega$, что $x \in \Omega_i \cap \Xi_i$ при некотором $i \in I$.

В дальнейшем для относительной внутренности произвольного множества A наряду с обозначением $\mathrm{Int}\, A$ будем использовать также обозначение A^o.

Можно переформулировать приведенную задачу в виде задачи об отыскании неподвижной точки некоторого многозначного отображения F. Для этого нужно определить F следующим образом:

$$F(x) = \Xi_i,\ x \in \Omega_i^o .$$

Ясно, что выполнение соотношения $x \in F(x)$ эквивалентно существованию такого Ω_i, что $x \in \Omega_i^o$ и $x \in \Xi_i$.

Примером задачи описанного типа может служить линейная задача дополнительности (комплементарности) с неособенной матрицей. Пусть A – матрица порядка n. Требуется найти такое решение системы линейных неравенств

$$Ax \geqslant q, \qquad (2)$$

$$x \geqslant 0, \qquad (3)$$

чтобы выполнялось условие

$$(x, Ax - q) = 0. \qquad (4)$$

Комплекс ω в данном случае порождается неотрицательным гипероктантом $R^n_+ = \{x \in R^n \mid x \geqslant 0\}$ и его всевозможными гранями. Таким образом, многогранники Ω_k в этом случае являются конусами с вершиной в нуле и задаются системами вида

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0, & i \in I_k, \\ x_j = 0, & j \notin I_k, \end{cases}$$

где $I_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Многогранник Ξ_k, соответствующий конусу Ω_k, также является конусом и представляет собой множество решений системы

$$\begin{cases} (Ax - q)_i = 0, & i \in I_k, \\ (Ax - q)_j \geqslant 0, & j \notin I_k. \end{cases}$$

Ясно, что условие $\dim\Omega_\kappa + \dim \Xi_\kappa = n$ в данном случае выполняется лишь в предположении неособенности матрицы A.

Перейдем к изложению общей схемы процесса, позволяющего при некотором дополнительном предположении найти решение исходной задачи. Идея подхода проявляется более отчетливо, если переформулировать задачу в таком виде: среди многогранников $\Theta_i = \Omega_i - \Xi_i$ найти тот, который содержит точку O.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие "общности положения".

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Подпространства H_i и G_i, сдвигами которых являются аффинные носители L_i и M_i соответствующих друг другу клеток Ω_i и Ξ_i, пересекаются только по нулю:

$$H_i \cap G_i = \{0\}. \tag{5}$$

Ясно, что, ввиду предположения $\dim\Omega_i + \dim\Xi_i = n$, это условие эквивалентно требованию телесности многогранников Θ_i.

Пусть имеется пара начальных точек x^0 и y^0, лежащих в относительной внутренности соответственно Ω_{i_0} и Ξ_{i_0}. Тем самым точка $z^0 = x^0 - y^0$ лежит внутри многогранника Θ_{i_0}. Незначительной вариацией точек x^0, y^0 можно добиться, чтобы выполнялось

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Все собственные грани многогранников Θ_i, с которыми пересекается луч $\Lambda = \{z \in R^n | z = \lambda z^0, \lambda \geq 0\}$, имеют размерность $(n-1)$.

Пусть это условие выполнено.

Определим точку r^0, являющуюся точкой пересечения аффинных многообразий L_{i_0} и M_{i_0} – аффинных носителей клеток Ω_{i_0} и Ξ_{i_0}. Ввиду предположения I, точка r^0 определяется однозначно. Если оказалось, что $r^0 \in \Xi_{i_0}$ и $r^0 \in \Omega_{i_0}$, то получили решение исходной задачи. Пусть это не так. Рассмотрим зависящие от вещественного параметра t точки

$$x(t) = (1-t)x^0 + t r^0, \tag{6}$$

$$y(t) = (1-t)y^0 + t r^0. \tag{7}$$

При $t=0$ имеем $x(0) \in \Omega_{i_0}, y(0) \in \Xi_{i_0}$. Увеличивая значение t от $t=0$, будем следить за выполнением условий $x(t) \in \Omega_{i_0}$, $y(t) \in \Xi$. Ввиду того, что $x(1) = y(1) = r^0 \in \Omega_{i_0} \cap \Xi_{i_0}$ и выпол-

няется предположение 2, может реализоваться только следующая ситуация: при некотором $t = t_0$ одна из движущихся точек будет еще находиться внутри соответствующей клетки, скажем, для определенности, $x(t_0) \in \operatorname{Int} \Omega_{i_0}$, в то время как другая точка уже достигнет границы "своего" многогранника, попадая в относительную внутренность его собственной грани максимальной размерности: $y(t_0) \in \operatorname{Int} \Xi_{i_1}$, $\Xi_{i_1} \prec \Xi_{i_0}$, $\dim \Xi_{i_1} = \dim \Xi_{i_0} - 1$.

Перейдем к следующему шагу процесса, имея $y^1 = y(t_0) \in \operatorname{Int} \Xi_{i_1}$, $x^1 = x(t_0) \in \Omega_{i_1}$ и $z^1 = x^1 - y^1 = (1-t)(x^0 - y^0) = (1-t)z^0 \in \Lambda$. При этом точка x^1 лежит на границе клетки Ω_{i_1}, но внутри ее собственной грани максимальной размерности:

$$\dim \Omega_{i_0} = \dim \Omega_{i_1} - 1.$$

Дальнейшие итерации будут уже однотипными. К началу k-го шага процесса имеются $x^k \in \Omega_{i_k}$, $y^k \in \Xi_{i_k}$. При этом одна из этих точек лежит внутри, а другая - на границе "своей" клетки, но внутри ее собственной грани максимальной размерности. Кроме того, $x^k - y^k = z^k \in \Lambda$.

Пусть для определенности $y^k \in \operatorname{Int} \Xi_{i_k}$, $x^k \in \operatorname{Int} \Omega_{i_{k-1}}$, $\Omega_{i_{k-1}} \prec \Omega_{i_k}$, $\dim \Omega_{i_{k-1}} = \dim \Omega_{i_k} - 1$.

Ввиду предположения I, аффинные многообразия L_{i_k} и M_{i_k}, являющиеся аффинными носителями клеток Ω_{i_k} и Ξ_{i_k} соответственно, имеют единственную точку пересечения: $L_{i_k} \cap M_{i_k} = \{z^k\}$. Определив z^k, рассматриваем зависящие от параметра t точки

$$x(t) = (1-t)x^k + tz^k, \quad y(t) = (1-t)y^k + tz^k. \qquad (8)$$

При $t = 0$ имеем $y(0) \in \operatorname{Int} \Xi_{i_k}$ и при достаточно малых значениях t, как положительных, так и отрицательных, будет $y(t) \in \Xi_{i_k}$. Точка $x(0) = x^k$ лежит на границе клетки Ω_{i_k}, но внутри ее собственной грани максимальной размерности $\Omega_{i_{k-1}}$. Тем самым аффинный носитель $L_{i_{k-1}}$ этой грани является гиперплоскостью в L_{i_k}, и весь многогранник Ω_{i_k} расположен по одну сторону от этой гиперплоскости. Легко видеть, что ввиду предположения 2 точка z^k не лежит в этой гиперплоскости. Действительно, при любом t имеем $x(t) - y(t) = z(t) \in \Lambda$. В случае $z^k \in L_{i_{k-1}}$ имели бы $x(t) \in \Omega_{i_{k-1}}$ при всех достаточно малых по модулю значениях t, а значит, точка $z(t)$ при таких t принадлежала бы множеству $\Omega_{i_{k-1}} - \Xi_{i_k}$, которое является гранью размерности $(n-1)$ для многогранников $\Theta_{i_{k-1}}$ и Θ_{i_k}. Получаем противоречие с предположением 2.

Таким образом, возможны лишь две ситуации: либо точка z^k

и многогранник Ω_{i_k} лежат в L_{i_k} по одну сторону от $L_{i_{k-1}}$, либо они лежат по разные стороны от этой гиперплоскости. Этим и определяется направление изменения параметра t. В первом случае точка $x(t)$ будет принадлежать множеству Ω_{i_k} при достаточно малых положительных значениях t и, следовательно, t нужно увеличивать. Эту ситуацию мы уже рассматривали при описании начальной итерации. Во втором случае $x(t)$ будет принадлежать множеству Ω_{i_k} при достаточно малых отрицательных значениях t. Следовательно, нужно уменьшать t от $t=0$, следя по-прежнему за соблюдением условий $x(t) \in \Omega_{i_k}$, $y(t) \in \Xi_{i_k}$. Возможны два исхода:

а) при некотором $t = t_0$ одна из точек $x(t)$ и $y(t)$ достигает границы "своей" клетки и мы переходим к следующему шагу в соответствии с уже описанным;

б) можно уменьшать t до $-\infty$, не нарушая условий $x(t) \in \Omega_{i_k}$, $y(t) \in \Xi$. В этом случае процесс останавливается.

Отметим, что на начальной итерации ввиду того, что и x^0, и y^0 лежат внутри "своих" клеток Ω_{i_0} и Ξ_{i_0} соответственно, можно выбрать любое из двух возможных направлений изменения t: не только увеличение, как это описано выше, но и уменьшение. Какая из этих возможностей ведет к получению искомого решения, зависит, вообще говоря, от задачи и от начальных x^0, y^0.

§2. Класс разрешимых задач

Покажем класс задач, в которых изложенный алгоритм всегда позволяет получить решение.

Среди множеств θ_i естественным образом вводится бинарное отношение "соседства" S: множества $\theta_i = \Omega_i - \Xi_i$ и $\theta_j = \Omega_j - \Xi_j$ являются соседними, если одно из многогранных множеств Ω_i и Ω_j является собственной гранью максимальной размерности для другого (ясно, что тогда это же выполняется и для множеств Ξ_i и Ξ_j, но, конечно, с изменением порядка подчинения).

Из определения отношения S имеем, что это отношение симметрично и антирефлексивно, т.е. выполняется

1^0. $(\theta_i, \theta_j) \in S \Longrightarrow (\theta_j, \theta_i) \in S$;

2^0. $(\theta_i, \theta_i) \notin S$.

Из предположения I очевидным образом следует, что грани многогранника θ_i являются множествами вида $\Omega_p - \Xi_q$ при

$\Omega_p \prec \Omega_i$ и $\Xi_q \prec \Xi_i$, а размерность грани равна сумме размерностей клеток Ω_p и Ξ_q . Таким образом, соседние многогранники Θ_i и Θ_j имеют общую $(n-1)$-мерную грань, и, обратно, для произвольного многогранника Θ_i любая его грань G размерности $(n-1)$ позволяет однозначно указать "соседний" Θ_j такой, что $\Theta_i \cap \Theta_j = G$.

В описанном алгоритме имеем дело лишь с множествами Θ_i , пересекающимися с лучем Λ . Ввиду предположения 2, для каждого такого Θ_i однозначно выделяется не более двух его граней размерности $(n-1)$, пересекающихся с Λ .

Таким образом, отношение S_Λ , являющееся сужением отношения S на множество $\Theta_\Lambda = \{\Theta_i \mid \Theta_i \cap \Lambda \neq \emptyset\}$, обладает, кроме свойств I° и 2° также свойством

3°. У каждого $\Theta_i \in \Theta_\Lambda$ в Θ_Λ имеется не более двух "соседей".

Пусть теперь $\{\Theta_{i_k}\}$ – порождаемая алгоритмом последовательность множеств. Из самого характера ее построения (движение по лучу Λ в пределах одного Θ_{i_k} происходит в одном направлении) имеем

$$\Theta_{i_k} \neq \Theta_{i_{k+2}} . \qquad (9)$$

Из перечисленных свойств легко следует

ЛЕММА I. *Получающаяся в соответствии с алгоритмом последовательность $\{\Theta_{i_k}\}$ может быть лишь двух типов:*

а) последовательность конечна и все элементы ее различны: $i_s \neq i_j$ при $s \neq j$;

б) последовательность циклична и являет собой повторяющийся участок первого типа.

Действительно, ввиду конечности рассматриваемых комплексов ω и ξ общее число множеств Θ_i также конечно. Поэтому если последовательность $\{\Theta_{i_k}\}$ бесконечна, то на определенном шаге ℓ какой-то номер i из ранее встреченных повторится: $i = i_\ell = i_s$, $s < \ell$. Но ввиду того, что $(\Theta_{i_k}, \Theta_{i_{k+1}}) \in S_\Lambda$, первым повторившимся может быть лишь $i = i_0$. В самом деле, $i \neq i_{\ell-1}$ ибо S антирефлексивно. Кроме того, $i \neq i_k$, $k = 1,\dots,\ell-2$, ибо

тогда у Θ_i было бы три "соседа": $\Theta_{i_{k-1}}$, $\Theta_{i_{k+1}}$, $\Theta_{\ell-1}$, а это противоречит свойству 3. Таким образом, $i_\ell = i_0$. Далее, ввиду (9), $i_{\ell+1} = i_1$ и т.д. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если начальная точка $z^0 = x^0 - y^0$ принадлежит только начальному множеству Θ_{i_0} и в качестве начального принято направление увеличения параметра t, то процесс заканчивается получением искомого решения задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что фигурирующая в описании процесса точка $z(t) = x(t) - y(t)$ движется при изменении t по лучу Λ непрерывным образом, и при этом непрерывность не нарушается при переходе от одной итерации к другой. Увеличение параметра t соответствует приближению $z(t)$ к точке 0, уменьшение – удалению от нуля.

Так как в качестве начального направления изменения t принято направление увеличения t, то начальный участок траектории, зачерчиваемый точкой $z(t)$, соответствует приближению к нулю. Тем самым процесс не может оборваться на k-й итерации реализацией случая $t = -\infty$: тогда $z(t)$ снова прошла бы через z^0, двигаясь в множестве Θ_{i_k}. При этом мы имеем последовательность первого типа, о котором шла речь в лемме I, и поэтому $i_k \neq i_0$, а это противоречит предположению, что z^0 принадлежит только Θ_{i_0}.

Покажем, что не может реализоваться и случай цикла. Допустим противное: последовательность $\{\Theta_{i_k}\}$ имеет вид $\Theta_{i_0}, \Theta_{i_1}, \ldots$ $\ldots, \Theta_{i_s}, \Theta_{i_0}, \ldots$ и все i_k при $k = 0, 1, \ldots, s$ различны. В этом случае у Θ_{i_0} в множестве Θ_Λ имеется два "соседа": Θ_{i_s} и Θ_{i_1}. Это означает, что $\Theta_{i_0} \cap \Lambda = [z^{s+1}, z^1]$. Так как $z^0 \in \operatorname{Int} \Theta_{i_0}$, то $z^0 \in (z^{s+1}, z^1)$. На начальном шаге точка $z(t)$ попадает при движении в точку z^1, а на шаге s – в точку z^{s+1}. Ввиду непрерывности изменения $z(t)$ на некотором промежуточном шаге k она должна пройти снова через точку z^0, двигаясь в множестве Θ_{i_k}. А так как при этом $i_k \neq i_0$, то снова получаем противоречие с условием, что z^0 принадлежит только множеству Θ_{i_0}. Лемма доказана.

Основываясь на лемме 2, теперь уже несложно сформулировать достаточные условия разрешимости задачи полиэдральной дополнительности.

По исходному предположению многогранники $\Omega_i \in \omega$ "замащивают" некоторый выпуклый многогранник Ω. Любой многогранник можно разложить в сумму ограниченного многогранника и однородродного полиэдрального конуса. Пусть $\Omega = G + H$ – такое разложение для Ω, G – ограниченный многогранник, H – полиэдральный конус с вершиной в точке O.

Пусть $\Omega_i = G_i + H_i$, $\Xi_i = \Phi_i + \Psi_i$ представляют аналогичные разложения многогранников $\Omega_i \in \omega$ и $\Xi_i \in \xi$; G_i, Φ_i – ограниченные многогранники, H_i, Ψ_i – полиэдральные конусы с вершиной в нуле. Ясно, что $\Psi_i \neq \{0\}$ в том и только в том случае, когда соответствующая клетка Ω_i принадлежит границе многогранника Ω. В любой точке x из относительной внутренности такой клетки касательный конус к Ω будет иметь вид $x + K_i$, где K_i – конус с вершиной в нуле.

ТЕОРЕМА I. Если конус H телесен и для любой клетки Ω_i, лежащей на границе многогранника Ω, соответствующие конусы K_i и Ψ_i удовлетворяют условию

$$\operatorname{Int} K_i \cap (-\Psi_i) = \emptyset, \tag{I0}$$

то рассматриваемая задача полиэдральной дополнительности разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из телесности H следует существование телесных среди конусов H_i. Пусть таким является конус H_{i_0}. Пусть $h \in \operatorname{Int} H_{i_0}$. Покажем, что точки вида $a + th$ при достаточно большом значении t принадлежат только множеству $\Theta_{i_0} = \Omega_{i_0} - \Xi_{i_0}$. Из этого уже и будет следовать утверждение теоремы, ибо, взяв $y^0 \in \Xi_{i_0}$ и $a^0 \in \Omega_{i_0}$, будем при любом $t > 0$ иметь $x^0 = a^0 + th \in \Omega_{i_0}$ и $z^0 = x^0 - y^0 = a^0 - y^0 + th = a + th$, где $a = a^0 - y^0$. Тем самым при достаточно большом t точка будет принадлежать только множеству Θ_{i_0}, и можно воспользоваться леммой 2.

То, что $a + th$ принадлежит Θ_{i_0} при достаточно больших t, достаточно очевидно. Действительно, ввиду телесности Ω_{i_0} множество Ξ_{i_0} является одноточечным: $\Xi_{i_0} = \{y^0\}$. Поэтому $\Theta_{i_0} = G_{i_0} - y^0 + H_{i_0} = M_{i_0} + H_{i_0}$, где M_{i_0} – ограниченный многогранник. Если бы при всех достаточно больших t выполнялось $a + th \notin \Theta_{i_0}$, то это означало бы, что некоторый луч с

направляющим вектором h не пересекается с выпуклым многогранником Θ_{i_0}, а значит, отделим от него некоторой гиперплоскостью. Из этого следовало бы существование такого вектора $v \neq 0$, что $(v,h) \leq 0$, $(v, H_{i_0}) \geq 0$, а это противоречит выбору h : $h \in \operatorname{Int} H_{i_0}$.

Покажем теперь, что $a + th$ при достаточно больших t не может принадлежать другим множествам Θ_i, $i \neq i_0$. Для многогранников $\Theta_i = \Omega_i - \Xi_i$ имеем $\Theta_i = G_i + H_i - \Phi_i - \Psi_i = (G_i - \Phi_i) + (H_i - \Psi_i) = M_i + Q_i$, где $M_i = G_i - \Phi_i$ - ограниченный многогранник, а $Q_i = H_i - \Psi_i$ - однородный полиэдральный конус. Из $a + th \in \Theta_i$ при всех достаточно больших t следовало бы $h \in Q_i$. Таким образом, достаточно показать, что $\operatorname{Int} H_{i_0} \cap Q_i = \emptyset$ при $i \neq i_0$. Если клетка Ω_i не принадлежит границе множества Ω, то, как отмечалось, $\Psi_i = \{0\}$, а значит, $Q_i = H_i$ и $\operatorname{Int} H_{i_0} \cap H_i = \emptyset$, ибо клетки Ω_i не пересекаются по относительно внутренним точкам.

Пусть Ω_i принадлежит границе многогранника Ω. Тогда, ввиду (10), существует ненулевой вектор v, для которого выполняется

$$(v, -\Psi_i) \geq 0, \tag{11}$$

$$(v, K_i) \leq 0. \tag{12}$$

Но очевидно, что $H_{i_0} \subset K_i$ и $H_i \subset K_i$, $(-H_i) \subset K_i$. Теперь из (12) следует

$$(v, H_{i_0}) \leq 0,$$
$$(v, H_i) = 0.$$

В результате, с учетом (11) получаем

$$(v, H_i - \Psi_i) \geq 0,$$
$$(v, H_{i_0}) \leq 0,$$

откуда и следует требуемое. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Из приведенных рассуждений следует, что задача полиэдральной дополнительности, в частности, разрешима при $\Omega = R^n$, что, впрочем, легко получить и из теоремы Какутани ([8, с.97]).

2. Ясно, что в использованных построения можно заменить луч Λ, переместив его вершину из нуля в любую точку $q \in R^n$. Тем самым в рассматриваемом случае многогранники Θ_i покрывают все

R^n, и наряду с исходной задачей об отыскании $x \in F(x)$ разрешимы все задачи вида $x \in F(x)+q$ при любом q.

3. Несложно убедиться, что для задачи линейной дополнительности (2)-(4) теорема I выделяет класс задач с матрицей A такой, что A^{-1} принадлежит известному классу E_0 (см. [2]), который характеризуется свойством: для любого главного минора M произвольной матрицы из E_0 найдется такой отличный от нуля неотрицательный вектор y, что $yM \geqslant 0$.

§3. Задачи со слабо убывающими отображениями

Особый интерес представляет тот случай, когда многогранники Θ_i, будучи телесными, не пересекаются по внутренним точкам. В этом случае "стартовую" точку $z^0 = x^0 - y^0$ можно выбирать внутри любого Θ_i. Процесс характеризуется монотонным приближением точек z^k к нулю. Связанное с задачей отображение имеет единственную неподвижную точку.

Покажем, что речь идет о таком классе задач, для которых отображение F характеризуется ослабленным свойством монотонности в определяемом ниже смысле.

Обычное требование монотонности задается неравенством

$$(x-y, F(x)-F(y)) \geqslant 0 \quad \forall x, y. \tag{I3}$$

Точнее было бы такие отображения называть возрастающими, ибо для функции одного переменного приведенное неравенство (I3) выделяет класс возрастающих (в широком смысле) функций. С учетом этого определим слабо убывающие отображения следующим образом.

Многозначное отображение F будем называть слабо убывающим, если для любой пары различных точек x и y можно указать такой вектор $h \neq 0$, что выполняется

$$(h, x-y) > 0, \ (h, F(x)-F(y)) \leqslant 0. \tag{I4}$$

Ясно, что такое отображение не может иметь две различные неподвижные точки: если $x \neq y$ и $x \in F(x), y \in F(y)$, то из (I4) следовало бы противоречие: $(h, x-y) > 0$ и $(h, x-y) \leqslant 0$. Условие (I4) означает, что точка $x-y$ строго отделяется однородной гиперплоскостью от множества $G = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda (F(x)-F(y))$. Если множество $F(z)$ выпукло и замкнуто при любом z, то G - выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле. Следовательно, в этом случае факт строгого отделения точки $(x-y)$ от G эквивалентен условию $(x-y) \notin G$.

Таким образом, для отображения F, порождаемого задачей полиэдральной комплементарности, требование слабого убывания равносильно условию

$$x \neq y \Rightarrow (x-y) \notin \lambda (F(x)-F(y)),\ \lambda > 0. \qquad (15)$$

Варьируя x и y в одном и том же Ω_i, из (15) легко заключаем, что выполняется (5), и тем самым для слабо монотонных отображений клетки Θ_i телесны. Если же $x \in \Omega_i^o, y \in \Omega_j^o$ и $i \neq j$, то из (15) при $\lambda = 1$ будет следовать

$$x-y \neq v-w \quad \forall v \in \Xi_i, w \in \Xi_j,$$

т.е.

$$x-v \neq y-w \quad \forall v \in \Xi_i, w \in \Xi_j. \qquad (16)$$

В частности, это выполняется при $v \in \mathrm{Int}\ \Xi_i, w \in \mathrm{Int}\ \Xi_j$. Учитывая, что $\mathrm{Int}\ \Omega_k - \mathrm{Int}\ \Xi_k = \mathrm{Int}\ \Theta_k = \Theta_k^o$, из (16) получаем $\Theta_i^o \cap \cap \Theta_j^o = \emptyset$ при $i \neq j$.

Таким образом, клетки Θ_k не пересекаются по внутренним точкам. Учитывая, что многогранники Θ_k обладают свойством: "каждая грань размерности $(n-1)$ любого Θ_k является гранью "соседнего" Θ_j ", получаем: многогранники Θ_k покрывают все R^n.

Покажем теперь, что верно и обратное утверждение: если многогранники Θ_i телесны и "замащивают" все R^n, т.е. покрывают R^n и не пересекаются по внутренним точкам, то соответствующее отображение F является слабо убывающим, т.е. для него выполняется (15). Ясно, что требование телесности многогранников эквивалентно тому, что аффинные носители соответствующих клеток Ω_i и Ξ_i алгебраически дополняют друг друга. Отсюда следует (15) для случая, когда x и y лежат внутри одной и той же клетки Ω_i. Рассмотрим случай $x \in \Omega_i^o$, $y \in \Omega_j^o$ при $i \neq j$.

Прежде всего отметим, что если условие "замащивания" выполняется для многогранников $\Theta_i = \Omega_i - \Xi_i$, то оно выполняется и для многогранников $\Theta_i(\lambda) = \Omega_i - \lambda \Xi_i$ при любом положительном λ. Действительно, из факта "замащивания" следует, что любые два "соседних" Θ_i и Θ_j располагаются по разные стороны от их общей грани размерности $(n-1)$. Пусть, для определенности, $\Omega_i \prec \Omega_j$ и векторы h и g таковы, что h ведет при малых сдвигах из точек $\mathrm{Int}\ \Omega_i$ внутрь Ω_j, а g - из точек $\mathrm{Int}\ \Xi_j$ внутрь Ξ_i. Тогда, как легко видеть, многогранники Θ_i и Θ_j располагаются по разные стороны

от несущей гиперплоскости их общей клетки $\Omega_i - \Xi_j$ в том и только в том случае, когда векторы h и q расположены по одну сторону от соответствующей однородной гиперплоскости. Ясно, что это свойство сохраняется, если многогранники Ξ_i и Ξ_j заменить на $\lambda \Xi_i, \lambda \Xi_j$ при $\lambda > 0$.

Далее покажем, что из условия "замащивания" наряду с $\Theta_i^0 \cap \Theta_j^0 = \emptyset$ при $i \neq j$ имеем более сильное:

$$(\Omega_i^0 - \Xi_i) \cap (\Omega_j^0 - \Xi_j) = \emptyset, \ i \neq j. \tag{17}$$

В самом деле, любые две различные грани произвольных клеток Θ_i и Θ_j не пересекаются по относительно внутренним точкам. Как отмечалось выше, грань клетки Θ_s имеет вид $\Omega_p - \Xi_q$, где $\Omega_p \preccurlyeq \Omega_s$, $\Xi_q \preccurlyeq \Xi_s$. Будем для краткости писать $p \preccurlyeq s$, если $\Omega_p \preccurlyeq \Omega_s$. Таким образом, выполняется

$$(\Omega_{p_1}^0 - \Xi_{q_1}^0) \cap (\Omega_{p_2}^0 - \Xi_{q_2}^0) = \emptyset \quad (p_1, q_1) \neq (p_2, q_2), p_1 \preccurlyeq p_2, q_1 \preccurlyeq q_2. \tag{18}$$

Учитывая, что $\Xi_i = \bigcup_{k \succcurlyeq i} \Xi_k^0$, $\Xi_j = \bigcup_{\ell \succcurlyeq j} \Xi_\ell^0$, имеем

$$(\Omega_i^0 - \Xi_i) \cap (\Omega_j^0 - \Xi_j) = \bigcup_{\substack{k \succcurlyeq i \\ \ell \succcurlyeq j}} (\Omega_i^0 - \Xi_k^0) \cap (\Omega_j^0 - \Xi_\ell^0). \tag{19}$$

Но каждое пересечение в правой части (19) является пустым множеством по (18) ввиду $i \neq j$.

Таким образом, равенство (17) доказано.

Остается заметить, что требуемое (15) получается, если воспользоваться (17), заменив при $\lambda > 0$ множества Ξ_i и Ξ_j на $\lambda \Xi_i$ и $\lambda \Xi_j$ соответственно. Это даст

$$x - \lambda v \neq y - \lambda w, \ \forall x \in \Omega_i^0, y \in \Omega_j^0, v \in \Xi_i, w \in \Xi_j,$$

т.е. $x - y \neq \lambda(v - w)$, что и означает (15).

С учетом замечания предыдущего параграфа можно резюмировать изложенное выше в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Для порождаемого задачей полиэдральной комплементарности многозначного отображения F задача об отыскании такого x, что $x \in F(x) + q$, однозначно разрешима при любом q тогда и только тогда, когда отображение F является слабо убывающим.*

Известно (см. [2]), что для однозначной разрешимости при любом q задачи линейной дополнительности (2)-(4) необходимо и

достаточно, чтобы матрица A принадлежала классу P матриц, у которых все главные миноры положительны. Тем самым задачи линейной дополнительности со слабо убывающим отображением F – это в точности задачи с матрицей $A \in P$.

Как уже отмечалось, для слабо убывающего отображения описанный в §I процесс отыскания неподвижной точки характеризуется свойством монотонности: текущая точка процесса $z(t)$ движется по лучу Λ на каждой итерации лишь в одном направлении, монотонно приближаясь к точке 0. В этой связи отметим, что для отображения $G = -F$, которое естественно называть слабо возрастающим, процесс будет характеризоваться, как легко видеть из приведенных выше рассмотрений, сменой направления движения точки $z(t)$ на каждой итерации, т.е. фазы приближения к нулю и удаления от него чередуются. Для слабо возрастающих отображений в общем случае уже нельзя гарантировать существование неподвижной точки. Однако если $\Omega = R^n$, то, как отмечалось выше, неподвижная точка существует и может быть найдена описанной процедурой.

В заключение заметим, что алгоритмы отыскания равновесных цен в линейных экономических моделях обмена и кооперации, предложенные в [3-5], следуют изложенной здесь общей схеме полиэдральной комплементарности. При этом в модели обмена получаются слабо убывающие отображения симплекса цен в себя, а в модели кооперации – слабо возрастающие.

Литература

1. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and marhematical programming // Manag. Sci. – 1985. – V.II. – P.681–689.
2. Lemke C.E. Complementarity problems // Nonlinear programming/ Ed. J.B.Rosen, O.L.Mangasarian, K.Ritter. – N.Y. – London: Academic Press, 1970.
3. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // ДАН СССР. – 1983. – Т.268, № 5. – С. 1062–1066.
4. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т.26, № 2. – С.162–175.
5. Шмырев В.И. Об отыскании равновесия в модели кооперации// Оптимизация. – 1987. – Вып. 41(58). – С.60–75.

6. Шмырев В.И. Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n // ДАН. - 1981. - Т.259, №2. - С.299-301.
7. Шмырев В.И. О построении алгоритмов отыскания неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в R^n // Оптимизация. - 1982. - Вып. 29(46). - С.32-44.
8. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.06.1988 г.