Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.514

О МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ЛИПШИЦА, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАССЫ

Ю.Н.Владимиров

В работе изучаются некоторые классы так называемых максимальных функций Липшица, которые непосредственно связаны с задачей оптимального перемещения массы в метрическом пространстве (см. [1-4; 5, гл.8, §4]).

§ 1. Предварительные сведения о функциях Липшица

Напомним, что метрическое пространство есть пара (X,r), состоящая из множества X и функции (метрики) $r: X\times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим условиям:

(М1) $r(x,y)\geq 0$ для всех $x,y\in X$, причем $r(x,y)=0$ в том и только в том случае, когда $x=y$;

(М2) $r(x,y)=r(y,x)$ для всех $x,y\in X$;

(М3) $r(x,y)\leq r(x,z)+r(z,y)$ для всех $x,y,z\in X$.

Пусть $x\in X$ и $\varepsilon>0$; множества $B(x,\varepsilon)=\{y\in X \mid r(x,y)<\varepsilon\}$, $S(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid r(x,y)=\varepsilon\}$, $\overline{B}(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid r(x,y)\leq\varepsilon\}$ принято называть открытым шаром, сферой, замкнутым шаром с центром x радиуса ε. Семейство всех открытых (замкнутых) шаров является базой некоторой топологии на X. Эту топологию называют метрической топологией, индуцированной метрикой r (см. [6]).

Рассмотрим теперь некоторое метрическое пространство (X,r) и класс $Lip(X,r)$ функций $u: X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих при любых x и y из X неравенству

$$u(y)-u(x)\leq r(x,y). \tag{1}$$

Заметим, что неравенство (I) на основании аксиомы (М2) равносильно неравенству $|u(y)-u(x)|\le r(x,y)$. Простейшим примером функции $u\in Lip_1(X,r)$ является функция расстояния от точки до некоторого множества $M\subset X$:

$$u(x)=r(x,M)=\inf\{r(x,y)|y\in M\},x\in M.$$

Далее, если u принадлежит классу $Lip_1(X,r)$, то $v=au+b$, где $a,b\in R,|a|\le 1$, также принадлежит этому классу. При любых $u_0,u_1\in Lip_1(X,r)$ и $\lambda\in[0,1]$ для функции $u_\lambda=(1-\lambda)u_0+\lambda u_1$ имеем

$$u_\lambda(y)-u_\lambda(x)=(1-\lambda)[u_0(y)-u_0(x)]+\lambda[u_1(y)-u_1(x)]\le$$
$$\le(1-\lambda)r(x,y)+\lambda r(x,y)=r(x,y),\ x,y\in X,$$

т.е. $u_\lambda\in Lip_1(X,r)$; это означает, что множество $Lip_1(X,r)$ выпукло.

Рассматриваемое семейство $Lip_1(X,r)$ является равностепенно непрерывным. Следовательно (см.[6]), в $Lip_1(X,r)$ топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных множествах. В топологии поточечной сходимости указанное семейство функций, очевидно, замкнуто.

Зафиксируем $x\in X,\ c\in R$ и рассмотрим множество

$$U_x^c=\{u\in Lip_1(X,r)|u(x)=c\},$$

которое также является выпуклым. Заметим, что U_x^c замкнуто в R^X в топологии поточечной сходимости. Кроме того, при каждом $y\in X$ множество $\{u(y)|u\in U_x^c\}$ ограничено в R :

$$|u(y)|=|u(y)-u(x)+c|\le|u(y)-u(x)|+|c|\le r(x,y)+|c|,\ u\in U_x^c.$$

Следовательно (см.[6]), U_x^c компактно в топологии поточечной сходимости.

§ 2. Продолжения функций Липшица

Пусть (X,r) - метрическое пространство и $M\subset X$. Обозначим через (M,r) метрическое пространство, метрикой которого служит сужение функции r на множество $M\times M$. Если $u\in Lip_1(X,r)$, то сужение $v=u|_M$ функции u на множество M, очевидно, принадлежит $Lip_1(M,r)$. Верно и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $v\in Lip_1(M,r)$, то найдется функция $u\in Lip_1(X,r)$, для которой $u|_M=v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем общую схему указанного продолжения

функции v на все пространство X. Предположим, что функция u определена на множестве $K \supseteq M$, удовлетворяет при любых $x, y \in K$ неравенству (I) и, кроме того, $u(z) = v(z)$ для всех $z \in M$. Тогда при любых $x, y \in K$ и $z \in X$ имеем

$$u(y) - u(x) \leq r(x,y) \leq r(x,z) + r(z,y).$$

Отсюда

$$u(y) - r(z,y) \leq u(x) + r(x,z).$$

Положим

$$\alpha_u(K,z) = \sup\{u(y) - r(z,y) \mid y \in K\},$$

$$\beta_u(K,z) = \inf\{u(x) + r(x,z) \mid x \in K\}.$$

Тогда

$$\alpha_u(K,z) \leq \beta_u(K,z). \tag{2}$$

Зафиксируем теперь $z \in X \setminus K$ и в качестве $u(z)$ выберем любое значение из числового отрезка $[\alpha_u(K,z), \beta_u(K,z)]$. Таким образом, функция u определена на множестве $K \cup \{z\}$ и при любых x и y из этого множества удовлетворяет неравенству (I).

Описанным способом функция u, очевидно, может быть определена на всем пространстве X. Предложение I доказано.

Заметим, что построенное продолжение $u \in Lip_1(X,r)$ функции $v \in Lip_1(M,r)$, вообще говоря, не единственно. Множество

$$U_M^v = \{u \in Lip_1(X,r) \mid u|_M = v\}$$

является выпуклым. Кроме того, оно замкнуто и при любом $x \in M$ содержится в компактном множестве $U_x^{v(x)}$, следовательно, U_M^v компактно в топологии поточечной сходимости.

Выделим два важных случая, когда в (2) имеет место равенство:

(PI) точка z принадлежит замыканию $\bar{K}$ множества K;

(P2) для некоторых точек $x, y \in K$ справедливы равенства

$$u(y) - u(x) = r(x,y) = r(x,z) + r(z,y). \tag{3}$$

В обоих случаях функция u продолжается на множество $K \cup \{z\}$ однозначно: в случае (PI) – "по непрерывности", в случае (P2) – равенствами

$$u(z) = u(x) + r(x,z) = u(y) - r(z,y).$$

Это означает, что множество

$$K(M,v)=\{z\in X\,|\,\alpha_v(M,z)=\beta_v(M,z)\}$$

удовлетворяет следующим условиям: $M\subseteq K(M,v)$; $K(M,v)$ замкнуто в X ; если при некоторых $x,y\in K(M,v)$ и $z\in X$ справедливы равенства (3), то $z\in K(M,v)$.

Заметим, что для функции $v\in Lip_1(M,r)$ существует единственная функция $u\in Lip_1(X,r)$, для которой $u|_M=v$, в том и только в том случае, когда $K(M,v)=X$.

§ 3. Частичные порядки, порождаемые функциями Липшица

Каждая функция $u\in Lip_1(X,r)$ порождает на X бинарное отношение: $x\overset{u}{\leq}y$ в том и только в том случае, когда

$$u(y)-u(x)=r(x,y). \tag{4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При любом $u\in Lip_1(X,r)$ отношение $\overset{u}{\leq}$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является частичным порядком на X ; график отношений $\overset{u}{\leq}$ замкнут в $X\times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рефлексивность. Для всех $x\in X$ справедливо $x\overset{u}{\leq}x$, так как на основании аксиомы (MI) имеем

$$u(x)-u(x)=0=r(x,x).$$

Антисимметричность. Если $x\overset{u}{\leq}y$ и $y\overset{u}{\leq}x$, то $x=y$. Действительно, из равенств

$$u(y)-u(x)=r(x,y),\quad u(x)-u(y)=r(y,x)$$

вытекает, что $r(x,y)=-r(y,x)$. На основании аксиомы (MI) это возможно в том и только в том случае, когда $r(x,y)=0$, т.е. $x=y$.

Транзитивность. Если $x\overset{u}{\leq}z$ и $z\overset{u}{\leq}y$, то $x\overset{u}{\leq}y$. Действительно, из равенств

$$u(z)-u(x)=r(x,z),\quad u(y)-u(z)=r(z,y)$$

и аксиомы (M3) вытекают соотношения

$$u(y)-u(x)=[u(z)-u(x)]+[u(y)-u(z)]=r(x,z)+r(z,y)\geq r(x,y).$$

С другой стороны, справедливо неравенство (I). Следовательно, имеет место равенство (4).

Замкнутость графика. Если $x_n \overset{u}{\leq} y_n$ для всех $n \in N$ и

$$\lim_{n\to\infty} r(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} r(y_n, y) = 0,$$

то $x \overset{u}{\leq} y$. Действительно,

$$u(y) - u(x) = \lim_{n\to\infty}[u(y_n) - u(x_n)] = \lim_{n\to\infty} r(x_n, y_n) = r(x, y).$$

Предложение 2 доказано.

Пусть $u \in Lip_1(X, r)$. Для точек $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $x \overset{u}{\leq} y$, введем в рассмотрение множества

$$[x, y]_u = \{z \in X \mid x \overset{u}{\leq} z \overset{u}{\leq} y\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$z \in [x, y]_u \iff r(x, y) = r(x, z) + r(z, y). \qquad (5)$$

Из предложения 2 вытекает, что множества $[x, y]_u$ замкнуты в X.

Заметим, что в общем случае множества $[x, y]_u$ не являются линейно-упорядоченными. Пусть, например,

$$X = \{x, y, z_1, z_2\}; \quad r(x, z_1) = r(z_1, y) = r(x, z_2) = r(z_2, y) = 1,$$

$$r(x, y) = 2, \ r(z_1, z_2) = \tfrac{1}{2}; \ u(x) = 0, \ u(z_1) = u(z_2) = 1, \ u(y) = 2.$$

Тогда точки $z_1, z_2 \in [x, y]_u$ не сравнимы.

С каждой функцией $u \in Lip_1(X, r)$ свяжем множества

$$u^{-1}(c) = \{x \in X \mid u(x) = c\}, \ c \in \mathbb{R},$$

которые, очевидно, замкнуты в X.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $x \overset{u}{<} y \ (y \overset{u}{<} x), u(y) = c, r(x, y) = \varepsilon$. Тогда

$$u^{-1}(c) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset.$$

Действительно, для любого $z \in u^{-1}(c)$ имеем

$$r(x, z) \geq u(z) - u(x) = u(y) - u(x) = r(x, y) = \varepsilon,$$

т.е. $z \notin B(x, \varepsilon)$.

§ 4. Предпорядок на множестве функций Липшица

С каждой функцией $u \in Lip_1(X, r)$ свяжем множества

$$E_u = \bigcup_{x \overset{u}{<} y} [x, y]_u, \quad L_u = \bar{E}_u.$$

На множестве $Lip_1(X, r)$ введем бинарное отношение, полагая $u \lesssim v$ в том и только в том случае, когда

$$u(x) - v(x) = const, \ x \in E_u; \qquad (6)$$

при этом условимся считать, что если $E_u=\emptyset$, то $u\lesssim v$ для любого $v\in Lip_1(X,r)$. Введенное отношение, очевидно, рефлексивно и транзитивно, т.е. является предпорядком на множестве $Lip_1(X,r)$. Порожденное этим предпорядком отношение эквивалентности будем обозначать символом $\sim$: $u\sim v$ в том и только в том случае, когда $u\lesssim v$ и $v\lesssim u$. Запись $u<v$ означает, что $u\lesssim v$ и u не эквивалентно v.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Любое линейно-предупорядоченное множество $U\subset Lip_1(X,r)$ ограничено сверху некоторой функцией $u_0\in Lip_1(X,r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E_u=\emptyset$ при всех $u\in U$, то в качестве u_0 может быть выбрана любая функция из $Lip_1(X,r)$.

Предположим, что множество $M=\bigcup\limits_{u\in U}E_u$ не пусто. Зафиксируем $z\in M$ и определим функцию v_0 на множестве M. Пусть $x\in M$. Так как семейство $\{E_u|u\in U\}$ является возрастающим по включению: $u\lesssim v\Longrightarrow E_u\subseteq E_v$, то найдется такое $u\in U$, что x, $z\in E_u$. Положим $v_0(x)=u(x)-u(z)$. Заметим при этом, что если $u\lesssim v$, то на основании (6) справедливо равенство $u(x)-u(z)=$ $=v(x)-v(z)$. Это означает, что $v_0(x)$ определено однозначно.

Проверим, что функция v_0 принадлежит классу $Lip_1(M,r)$. Выберем произвольно $x,y\in M$ и найдем такое $u\in U$, что $x,y,z\in E_u$. Тогда

$$v_0(y)-v_0(x)=[u(y)-u(z)]-[u(x)-u(z)]=u(y)-u(x)\leq r(x,y).$$

По предложению I существует функция $u_0\in Lip_1(X,r)$, сужение которой на множество M совпадает с v_0. При этом для любого $u\in U$ справедливы равенства

$$u(x)-u_0(x)=[v(x)-u_0(x)]+[u(x)-v(x)]=v(z)+[u(x)-v(x)]=const,\ x\in E_u,$$

где v - произвольная функция из U, для которой $u\lesssim v$ и $z\in E_v$. Следовательно, $u\lesssim u_0$ для всех $u\in U$. Предложение 3 доказано.

Предложение 3 позволяет применить лемму Цорна к предупорядоченному множеству $Lip_1(X,r)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Для каждого линейно-предупорядоченного множества $U\subset Lip_1(X,r)$ существует максимальный элемент множества $Lip_1(X,r)$, мажорирующий элементы U.

Из результатов § 2 вытекает, что $u\lesssim v$ в том и только

в том случае, когда

$$u(x)-v(x)=const,\ x\in L_u.$$

Это означает, что если $L_u = X$, то функция u является максимальной в классе $Lip_1(X,r)$. Для метрических компактов верно и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если функция $u\in Lip_1(X,r)$ максимальна и множество L_u компактно, то $L_u = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нашлась точка $z\in X\setminus L_u$. Функция $f(x)=u(x)+r(x,z)$ непрерывна на X. Так как множество L_u компактно, то найдется $y\in L_u$, для которого справедливо равенство

$$f(y)=\inf\{f(x)\mid x\in L_u\}=\beta_u(L_u,z).$$

Положим

$$v(x)=\begin{cases} u(x),\ x\in L_u, \\ u(y)+r(y,z),\ x=z. \end{cases}$$

Как отмечалось в § 2, построенная таким способом функция v принадлежит классу $Lip_1(L_u\cup\{z\},r)$. Согласно предложению I найдется функция $w\in Lip_1(X,r)$, сужение которой на множество $L_u\cup\{z\}$ совпадает с v. При этом

$$u(x)=w(x),x\in L_u;\ u(z)-u(y)<r(y,z),w(z)-w(y)=r(y,z),$$

т.е. $u<w$. Это противоречит условию максимальности функции u. Полученное противоречие означает, что $X\setminus L_u=\emptyset$, т.е. $L_u = X$. Предложение 4 доказано.

В заключение этого параграфа заметим, что сужение максимальной функции $u\in Lip_1(X,r)$ на множество $M\subset X$, вообще говоря, не является максимальной функцией в $Lip_1(M,r)$. С другой стороны, из предложения I и следствия 3.I вытекает, что если $M\subset X$ и функция $v\in Lip_1(M,r)$ максимальна, то существует максимальная функция $u\in Lip_1(X,r)$, для которой $u|_M = v$.

§ 5. Функции Липшица на аффинных пространствах

Пусть X - аффинное пространство (определение и свойства аффинных пространств см., например, в [7,8]). Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех метрик r на X, каждая из которых может быть задана с помощью нормы:

$$r(x,y)=\|x-y\|,\ x,y\in X,$$

определенной в некотором ассоциированном с X вещественном линейном пространстве. Каждая метрика $r\in\mathcal{P}$ обладает, в частности, следующим свойством: при любых $x,y\in X$ и $z\in[x,y]$ *) в "неравенстве треугольника" (М3) выполняется равенство. В силу (5) это означает, что если $r\in\mathcal{P}$, $u\in\in Lip_1(X,r)$ и $x<^u y$, то $[x,y]\subseteq[x,y]_u$.

Предположим, что метрика $r\in\mathcal{P}$ удовлетворяет условию:

(СВ) при некотором (а тогда и при любом) $x\in X$ замкнутый шар $B(x,1)$ является строго выпуклым множеством.

В этом случае в "неравенстве треугольника" (М3) равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z\in[x,y]$. Следовательно, при выполнении условия (СВ) для любой функции $u\in Lip_1(X,r)$ и любых точек $x,y\in X$, удовлетворяющих неравенству $x<^u y$, справедливо равенство $[x,y]=[x,y]_u$. При этом множество $[x,y]_u$ является линейно-упорядоченным. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции $u\in Lip_1(X,r)$, назовем линиями тока этой функции. Из предыдущих рассуждений вытекает, что каждая линия тока является подмножеством X одного из следующих типов: а) точкой; б) замкнутым направленным отрезком; в) замкнутым направленным лучом; г) направленной прямой. Если две различные линии тока имеют общую точку x, то x - либо минимальный, либо максимальный элемент каждой из этих линий тока.

Заметим, что введенное в § 4 множество E_u в данном случае является объединением всех невырожденных линий тока функции u.

Пусть $M\subset X$ и $v\in Lip_1(M,r)$. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции v, естественно назвать линиями тока v. Согласно предложению I, в $Lip_1(X,r)$ найдется такая функция u, что $u|_M=v$. При этом, очевидно, каждая линия тока функции v является пересечением некоторой линии тока функции u с множеством M.

В том случае, когда метрика $r\in\mathcal{P}$ не удовлетворяет условию (СВ), равенство в (М3) может наступать и для точек z,

---

*) $[x,y]$ - замкнутый отрезок, соединяющий точки x и y.

не принадлежащих отрезку $[x,y]$. В силу (5) и предложения I это означает, что найдется функция $u \in Lip_1(X,r)$, для которой при некоторых $x <^u y$ отрезок $[x,y]$ является собственным подмножеством $[x,y]_u$.

Перейдем теперь к рассмотрению функций Липшица на конечномерных аффинных пространствах. Для таких функций предложение 4 может быть усилено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X - конечномерное аффинное пространство и $r \in \mathcal{P}$. Тогда если функция $u \in Lip_1(X,r)$ максимальна, то $L_u = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нашлась точка $z \in X \setminus L_u$. Множество L_u замкнуто в X, следовательно, можно указать $\varepsilon > 0$, для которого $B(z,\varepsilon) \subset X \setminus L_u$. Функция $f(x) = u(x) + r(x,z)$ непрерывна на X. Так как сфера $S(z,\varepsilon)$ компактна, то на ней найдется точка x_0, для которой справедливы равенства

$$f(x_0) = \inf\{f(x) \mid x \in S(z,\varepsilon)\} = u(x_0) + \varepsilon = \beta_u(S(z,\varepsilon), z).$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in X \setminus B(z,\varepsilon), \\ u(x_0) + \varepsilon, & x = z. \end{cases}$$

Таким образом, функция v определена на множестве $K = (X \setminus B(z,\varepsilon)) \cup \{z\}$. Проверим, что при любых $x, y \in K$ справедливо неравенство $v(y) - v(x) \leq r(x,y)$. Действительно, по построению указанное неравенство выполняется, если x и y принадлежат одному из множеств $X \setminus B(z,\varepsilon)$ или $S(z,\varepsilon) \cup \{z\}$. Пусть теперь одна из точек x или y совпадает с z, а другая принадлежит множеству $X \setminus \overline{B}(z,\varepsilon)$. Тогда замкнутый отрезок $[x,y]$ пересекает сферу $S(z,\varepsilon)$ в некоторой точке y_0. Следовательно,

$$v(y) - v(x) = [v(y_0) - v(x)] + [v(y) - v(y_0)] \leq r(x,y_0) + r(y_0,y) = r(x,y).$$

По предложению I существует функция $w \in Lip_1(X,r)$, сужение которой на множество K совпадает с v. При этом

$$u(x) = w(x),\ x \in X \setminus B(z,\varepsilon);\ L_u \subset X \setminus B(z,\varepsilon);$$

$$u(z) - u(x_0) < r(x_0,z);\ w(z) - w(x_0) = r(x_0,z),$$

т.е. $u < w$. Это противоречит условию максимальности функции u. Полученное противоречие означает, что $X \setminus \mathcal{L}_u = \emptyset$, т.е. $\mathcal{L}_u = X$. Предложение 5 доказано.

В заключение этого параграфа отметим, что некоторые классы максимальных функций Липшица на конечномерных евклидовых пространствах изучались в работе автора [9] (см. также добавление [10]). В работе [11] полученные результаты использовались для построения оптимальных перемещений массы.

§6. Максимальные и крайние функции Липшица одной вещественной переменной

Если X – одномерное аффинное пространство, то, очевидно, каждая метрика $r \in \mathcal{P}$ удовлетворяет условию (СВ). Кроме того, в этом случае любые две метрики пропорциональны: $r_1 = \lambda r_2$ при некотором $\lambda > 0$. Зафиксируем некоторую метрику $r \in \mathcal{P}$. Для удобства изложения дальнейших результатов отождествим в этом параграфе X с $\mathbb{R}$, при этом будем считать, что $r(x,y) = |x-y|,\ x,y \in \mathbb{R}$.

Заметим, что функция $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathcal{L}ip_1(\mathbb{R}, r)$ в том и только в том случае, когда u абсолютно непрерывна на любом замкнутом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и ее производная удовлетворяет для почти всех $x \in \mathbb{R}$ (относительно соответствующей лебеговой меры μ) неравенству $|u'(x)| \leq 1$. При этом для каждого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Для функций $u \in \mathcal{L}ip_1(\mathbb{R}, r)$ введем в рассмотрение множества

$$M_u^- = \{x \in \mathbb{R} \mid u'(x) = -1\},\ M_u^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid u'(x) = 1\},\ M_u = M_u^- \cup M_u^+,$$
$$G_u^- = \operatorname{int} M_u^-,\ G_u^+ = \operatorname{int} M_u^+,\ G_u = G_u^- \cup G_u^+,$$

где через $\operatorname{int} M$ обозначена совокупность всех внутренних точек множества M.

Как хорошо известно, любое открытое множество в $\mathbb{R}$ представляет собой объединение конечной или счетной совокупности попарно не пересекающихся интервалов (конечных или бесконечных). Такое представление открытого множества в виде объединения интервалов единственно; эти интервалы называются состав-

ляющими интервалами открытого множества на прямой.

Между линиями тока функции $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ и составляющими интервалами множества G_u существует тесная связь. А именно, некоторый интервал $I \subset \mathbb{R}$ является составляющим интервалом множества G_u в том и только в том случае, когда I совпадает с множеством внутренних точек некоторой линии тока ℓ функции u ; при этом если $I \subset G_u^-$, то направление ℓ противоположно направлению числовой оси, а если $I \subset G_u^+$, то направление ℓ совпадает с направлением числовой оси. Отсюда, в частности, вытекает, что $G_u \subset int\, E_u$ и $\bar{G}_u = \bar{E}_u = \mathcal{L}_u$.

Приведенные рассуждения позволяют теперь переформулировать признак максимальности (см. §4 и предложение 5) для функций Липшица одной вещественной переменной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ является максимальной в том и только в том случае, когда $\bar{G}_u = \mathbb{R}$.*

Из предложения 6 и формулы (7) вытекает, в частности, что функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ в том и только в том случае однозначно (с точностью до постоянного слагаемого) определяется своими линиями тока, когда u максимальна, причем $\mu(\mathbb{R} \setminus G_u) = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению крайних функций Липшица. Напомним, что функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ называется крайней, если из равенства $u = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$, где $u_0, u_1 \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$, вытекает, что $u_1 - u_0 = const$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ является крайней в том и только в том случае, когда $\mu(\mathbb{R} \setminus M_u) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для функций $u, u_0, u_1 \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ имеет место равенство $u = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$. Тогда $u'(x) = \frac{1}{2}[u_0'(x) + u_1'(x)]$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $u'(x) = u_0'(x) = u_1'(x) = -1$ для почти всех $x \in M_u^-$ и $u'(x) = u_0'(x) = u_1'(x) = 1$ для почти всех $x \in M_u^+$. Если при этом $\mu(\mathbb{R} \setminus M_u) = 0$, то $u'(x) = u_0'(x) = u_1'(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$; отсюда, на основании (7), получаем, что $u_1 - u_0 = const$, т.е. u – крайняя функция в множестве $Lip_1(\mathbb{R}, r)$.

Для $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ введем в рассмотрение функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } u'(x) < 0, \\ 1, \text{ если } u'(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$u_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt, \tag{8}$$

$$u_1(x) = 2u(x) - u_0(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$u_0'(x) = \varphi(x),\quad u_1'(x) = 2u'(x) - \varphi(x)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$, причем $\mu(\mathbb{R}\setminus M_{u_0}) = 0$. Отсюда вытекает, что функции u_0 и u_1 принадлежат классу $Lip_1(\mathbb{R}, r)$. С другой стороны, $u = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$. Если функция u крайняя, то $u_1 - u_0 = const$, т.е. $u'(x) = u_0'(x) = u_1'(x) = \varphi(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\mu(\mathbb{R}\setminus M_u) = \mu(\mathbb{R}\setminus M_{u_0}) = 0$. Предложение 7 доказано.

Предложения 6 и 7 показывают, что максимальные и крайние функции образуют разные классы в $Lip_1(\mathbb{R}, r)$. В заключение этого параграфа приведем два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть G - такое открытое в $\mathbb{R}$ множество, что $\overline{G} = \mathbb{R}$, $\mu(\mathbb{R}\setminus G) > 0$ (примеры таких множеств можно найти в [12]). Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in G, \\ 0, x \in \mathbb{R}\setminus G. \end{cases}$$

Зададим функцию u_0 равенством (8), а функцию u_1 - равенством $u_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Обе функции u_0 и u_1 принадлежат классу $Lip_1(\mathbb{R}, r)$ и по предложению 6 являются максимальными. Из предложения 7 вытекает, что u_0 не является крайней, а u_1 является крайней функцией в множестве $Lip_1(\mathbb{R}, r)$. Кроме того,

$$G^-_{u_0} = G^-_{u_1} = \emptyset,\quad G^+_{u_0} \subset G^+_{u_1} = \mathbb{R};$$

однако эти функции не сравнимы.

ПРИМЕР 2. Представим множество $\mathbb{R}$ в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств A и B так, чтобы для каждого замкнутого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ имели место неравенства

$$\mu([a,b]\cap A) > 0,\quad \mu([a,b]\cap B) > 0.$$

Указанные множества A и B существуют (см. [12]). Положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}-1, x\in A,\\ 1, x\in B.\end{cases}$$

Из предложения 7 вытекает, что функция u_0, определенная равенством (8), является крайней в множестве $Lip_1(\mathbb{R},r)$; однако для этой функции $G_{u_0}=E_{u_0}=L_{u_0}=\emptyset$, т.е. u_0 не является максимальной.

§7. Об одном классе функций Липшица на аффинной плоскости

Пусть X – двумерное аффинное пространство, $G\subsetneq X$ – открытое выпуклое множество и $r\in\mathcal{P}$. Рассмотрим в X семейство $\mathcal{L}_G$ направленных прямых ℓ (соответствующий порядок на ℓ обозначается через $\preccurlyeq^{\ell}$), удовлетворяющих условиям:

(Л1) любая прямая $\ell\in\mathcal{L}_G$ пересекает множество G;

(Л2) для каждого $x\in G$ найдется такая прямая $\ell=\ell_x\in\mathcal{L}_G$, что $x\in\ell$;

(Л3) если $y\in G\setminus\ell_x$, то $\ell_x\cap\ell_y\cap G=\emptyset$;

(Л4) если $x_n, y_n, x, y\in G$, $y_n\in\ell_{x_n}$, $x_n\preccurlyeq^{\ell_{x_n}}y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$, то $x\preccurlyeq^{\ell_x}y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любой метрики* $r\in\mathcal{P}$, *удовлетворяющей условию* (СВ), *найдется функция* $u\in Lip_1(\overline{G},r)$, *для которой замкнутые линейно-упорядоченные множества* $d=\ell\cap\overline{G}$, *где* $\ell\in\mathcal{L}_G$, *являются линиями тока.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть метрика $r\in\mathcal{P}$ удовлетворяет условию (СВ). Для каждой точки $x\in G$ рассмотрим семейство $\mathcal{L}'_x$ прямых ℓ'_x таких, что: (а) $x\in\ell'_x$; (б) ℓ'_x r-трансверсальна к прямой $\ell_x\in\mathcal{L}_G$, т.е. при некотором (а тогда и при любом) $y\in\ell_x\setminus\{x\}$ имеет место равенство $\ell'_x\cap B(y,r(y,x))=\emptyset$.

Зафиксируем теперь некоторую точку $x_0\in G$ и введем вспомогательную прямоугольную систему координат на плоскости X, начало которой расположено в x_0, а вторая координатная ось совпадает с ℓ_{x_0}. Обозначим через $\delta(x,y)$, где $x,y\in G$, угол между соответствующими направленными прямыми ℓ_x и ℓ_y из $\mathcal{L}_G$. Тогда из условий (Л1)-(Л4) вытекает, что

$$\lim_{y\to x} б(x,y)=0. \qquad (9)$$

Это означает, что найдутся числа $\varepsilon>0$ и $M>0$ такие, что $\overline{B}(x_0,\varepsilon)\subset G$, и при любых $x\in\overline{B}(x_0,\varepsilon)$ и $\ell'_x\in\mathcal{L}'_x$ модуль тангенса угла наклона прямой ℓ'_x к первой координатной оси не превосходит M. Следовательно, любая прямая $\ell'_x\in\mathcal{L}'_x$, где $x\in\overline{B}(x_0,\varepsilon)$, может быть задана уравнением $\eta=K_x\xi+b_x$. Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$\Phi(x)=\{K_x\,|\,\ell'_x\in\mathcal{L}'_x\},\ x\in\overline{B}(x_0,\varepsilon).$$

Заметим при этом, что для любого $x\in\overline{B}(x_0,\varepsilon)$ можно указать числа K_1 и K_2 такие, что $-M\le K_1\le K_2\le M$ и $\Phi(x)=[K_1,K_2]$. Введем обозначения: $\rho(a,b)=|a-b|$, $\rho(a,B)=\inf\{\rho(a,b)\,|\,b\in B\}$, $\Delta(A,B)=\sup\{\rho(a,B)\,|\,a\in A\}$, где $a,b\in\mathbb{R}$; $A,B\subset\mathbb{R}$. Тогда из свойства выпуклости множества $\overline{B}(x_0,1)$ и равенства (9) вытекает равенство

$$\lim_{y\to x}\Delta(\Phi(y),\Phi(x))=0,\ x\in B(x_0,\varepsilon).$$

Следовательно (см. [13]), найдутся числа $a_0<0<b_0$ и абсолютно непрерывная функция $\varphi:[a_0,b_0]\to\mathbb{R}$, для которой почти всюду (относительно соответствующей лебеговой меры) на $[a_0,b_0]$ выполняется дифференциальное включение $\varphi'(\xi)\in\in\Phi(x)$, где $x=(\xi,\varphi(\xi))\in B(x_0,\varepsilon)$, и $\varphi(0)=0$. График γ этой функции содержится в $B(x_0,\varepsilon)$.

Проверим, что для любых $x\in\gamma$ и $y\in(\ell_x\cap\dot{G})\setminus\{x\}$ выполняется равенство

$$\gamma\cap B(y,r(y,x))=\emptyset. \qquad (10)$$

Действительно, пусть $x=(\xi_1,\eta_1)\in\gamma$ и $y=(\xi_2,\eta_2)\in\ell_x\cap G$. Для определенности будем считать, что $\eta_1<\eta_2$. Пусть отрезок $[a_1,b_1]$ является пересечением отрезка $[a_0,b_0]$ с проекцией множества $\overline{B}(y,r(y,x))$ на первую координатную ось. Введем в рассмотрение функцию

$$f(\xi)=\min\{\eta\,|\,(\xi,\eta)\in\overline{B}(y,r(y,x))\},\ \xi\in[a_1,b_1],$$

которая является выпуклой и, следовательно (см. [14]), абсолютно непрерывной. При этом, в силу условия (Л3), почти всюду справедливы неравенства

$$\varphi'(\xi) \geq f'(\xi), \quad \xi \in [a_1, \xi_1],$$

$$\varphi'(\xi) \leq f'(\xi), \quad \xi \in [\xi_1, b_1].$$

Следовательно,

$$\varphi(\xi) = \eta_1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \varphi'(t)dt \leq \eta_1 + \int_{\xi_1}^{\xi} f'(t)dt = f(\xi), \quad \xi \in [a_1, b_1],$$

что и доказывает справедливость равенства (10).

Рассмотрим теперь замкнутое выпуклое множество $\Gamma = \bigcup_{x \in \gamma} d_x$, где $d_x = \ell_x \cap \bar{G}$. Кривая γ разбивает множество Γ на две замкнутые компоненты Γ_1 и Γ_2 такие, что

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \; \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \gamma; \; x \in \Gamma_1, \; y \in d_x \cap \Gamma_2 \mapsto x \overset{\ell_x}{\leq} y.$$

Положим

$$u(x) = (-1)^i r(x, \gamma), x \in \Gamma_i, i = 1, 2.$$

Из равенства (10), которое справедливо для всех $x \in \gamma$ и $y \in (\ell_x \cap G) \setminus \{x\}$, вытекает, что функция u принадлежит классу $Lip_1(\Gamma, r)$, причем замкнутые линейно-упорядоченные множества d_x, $x \in \gamma$, являются ее линиями тока.

Таким образом, функция u определена на замкнутом выпуклом множестве Γ, которое, вообще говоря, не совпадает с $\bar{G}$. Схема продолжения функции u на множество $\bar{G}$ следующая. Предположим, что u определена на замкнутом выпуклом множестве $F \subset \bar{G}$, которое вместе с каждой точкой $x \in F \cap G$ содержит соответствующее множество d_x, причем $F \neq \bar{G}$. Выберем точку $y_0 \in G$, которая является граничной для F. Тогда, как и выше, из y_0 выходит некоторая кривая γ', расположенная в $\overline{G \setminus F}$ и такая, что для любых $x \in \gamma' \cap G$ и $y \in (\ell_x \cap G) \setminus \{x\}$ выполняется равенство $\gamma' \cap B(y, r(y,x)) = \varnothing$. Рассмотрим замкнутое выпуклое множество $\Gamma' = \bigcup_{x \in \gamma'} d_x$. Кривая γ' разбивает множество Γ' на две замкнутые компоненты Γ_1' и Γ_2' такие, что

$$\Gamma_1' \cup \Gamma_2' = \Gamma'; \; \Gamma_1' \cap \Gamma_2' = \gamma'; \; x \in \Gamma_1' \cap G, \; y \in d_x \cap \Gamma_2' \mapsto x \overset{\ell_x}{\leq} y.$$

Положим

$$u(x) = u(y_0) + (-1)^i r(x, \gamma'), x \in \Gamma_i', i = 1, 2.$$

Указанным способом функция u может быть продолжена на все множество $\bar{G}$.

Построенная функция $u:\overline{G}\longrightarrow \mathbb{R}$, очевидно, принадлежит классу $Lip_1(\overline{G},\tau)$, причем замкнутые линейно-упорядоченные множества $d_x=l_x\cap\overline{G}$ являются ее линиями тока. Предложение 8 доказано.

Пусть семейство $\mathcal{L}_G$ удовлетворяет условиям (Л1)-(Л4), а метрика $\tau\in\mathcal{P}$ – условию (СВ). Обозначим через $U(\mathcal{L}_G,\tau)$ множество функций $u\in Lip_1(\overline{G},\tau)$, для которых замкнутые линейно-упорядоченные множества $d_x=l_x\cap\overline{G}$, $x\in G$, являются линиями тока. Из предложения 8 вытекает, что $U(\mathcal{L}_G,\tau)$ всегда не пусто. Любая функция $u\in U(\mathcal{L}_G,\tau)$ является максимальной в классе $Lip_1(\overline{G},\tau)$. Множество $U(\mathcal{L}_G,\tau)$, очевидно, выпукло и замкнуто в топологии поточечной сходимости. Следовательно, при любых $x_0\in G$ и $c\in\mathbb{R}$ множество $U^c_{x_0}(\mathcal{L}_G,\tau)=\{u\in U(\mathcal{L}_G,\tau)\,|\,u(x_0)=c\}$ выпукло и компактно в указанной топологии.

Рассмотрим теперь один частный случай. Предположим, что $G=X$. Тогда все прямые из $\mathcal{L}_G=\mathcal{L}_X$ параллельны. При доказательстве предложения 8 были введены множества $\mathcal{L}'_x$ прямых l', проходящих через точку x τ-трансверсально к прямой $l_x\in\mathcal{L}_X$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае $\mathcal{L}_{\varphi(x)}=\varphi(\mathcal{L}'_x)$ для любого параллельного переноса φ. Каждая прямая $l'\in\mathcal{L}'_x$ определяет две замкнутые полуплоскости F_1 и F_2 такие, что

$$F_1\cup F_2=X;\ F_1\cap F_2=l';\ x\in F_1,\ y\in l_x\cap F_2\Longrightarrow x\overset{l_x}{\prec} y.$$

При этом для любого $c\in\mathbb{R}$ функция

$$u(x)=(-1)^i\tau(x,l')+c,\ x\in F_i,\ i=1,2, \qquad (11)$$

очевидно, принадлежит множеству $U(\mathcal{L}_X,\tau)$. Если при некотором (а тогда и при любом) $x\in X$ множество $\mathcal{L}'_x$ содержит единственную прямую l', то $U(\mathcal{L}_X,\tau)$ исчерпывается функциями (11). Если же при некотором (а тогда и при любом) $x\in X$ множество $\mathcal{L}'_x$ содержит более одной прямой, то в $U(\mathcal{L}_X,\tau)$ имеются и другие функции. Действительно, пусть γ – ломаная на плоскости X, содержащая конечное число звеньев (замкнутых отрезков или замкнутых лучей), каждое из которых τ-трансверсально к прямым $l\in\mathcal{L}_X$. Предположим, что γ разбивает X на две компоненты Γ_1 и Γ_2 такие, что

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = X;\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \gamma;\ x \in \Gamma_1,\ y \in \ell_x \cap \Gamma_2 \Rightarrow x \preccurlyeq^{\ell_x} y.$$

Тогда при любом $c \in R$ функция

$$u(x) = (-1)^i r(x, \gamma) + c,\ x \in \Gamma_i,\ i = 1,2, \qquad (12)$$

очевидно, принадлежит $U(\mathcal{L}_X, r)$. Более того, множество $U(\mathcal{L}_X, r)$ совпадает с замыканием в топологии поточечной сходимости множества функций (12).

В заключение заметим, что предложение 8 обобщает аналогичный результат автора из [15], который был получен для случая евклидовой метрики, и позволяет (см. [16]) строить эффективные численные методы решения определенного класса задач оптимального перемещения массы на аффинной плоскости.

Литература

1. Канторович Л.В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. - 1942. - Т.37, № 7-8. - С.227-229.
2. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экскремальных задачах// Докл. АН СССР. - 1957. - Т.115, № 6. - С.1058-1061.
3. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций// Вестник ЛГУ. - 1958. - №7. - С.52-59.
4. Рубинштейн Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа// Успехи мат. наук. - 1970. - Т.25. - С.171-201.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М., Наука, 1977.
6. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1981.
7. Рубинштейн Г.Ш. Геометрия выпуклых множеств в аффинных и проективных пространствах// Оптимизация. -1983. - Вып. 31(48). - С.5-32.
8. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. - М.: Наука, 1985.
9. Владимиров Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве// Оптимизация. - 1980. - Вып. 24(41). - С.60-69.
10. Владимиров Ю.Н. Добавление к статье// Оптимизация. - 1981.- Вып.26(43). - С.141-142.
11. Владимиров Ю.Н. О наилучших приближениях нормального распределения в метрике Канторовича- Рубинштейна// Оптимизация,

1984. - Вып. 34(51). - С.13-23.
12. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Просвещение, 1981.
13. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, 1985.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
15. Владимиров Ю.Н. К задаче перемещения лебеговой меры на евклидовой плоскости// Оптимизация. - 1985. - Вып. 36(53).- С.17-30.
16. Владимиров Ю.Н. Задачи оптимального перемещения массы на плоскости и связанные с ними функции Липшица// Методы математического программирования и программное обеспечение: Тезисы докладов.-Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. - С.27-28.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.04.1987 г.