УДК 517.987

ОБ ОДНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ИНВАРИАНТЕ ТИПА ЭНТРОПИИ

А.Г.Качуровский

В работе для автоморфизма пространства Лебега приводится семейство его метрических инвариантов типа энтропии. Получается это за счет некоторого обобщения известной конструкции построения энтропии автоморфизма (см., например, [1,2]).

1. ЛЕММА. Пусть $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция вида $\varphi(x) = x\psi(x)$, где функция $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $\psi(x)+\psi(y) \le \psi(xy)$ для всех $x, y \in [0,1]$. Пусть положительные $\{p_i\}_{i=1}^{m}$, $\{q_j\}_{j=1}^{n}$ и неотрицательные числа $\{r_{ij}\}_{i,j=1}^{i=m,j=n}$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = p_i, \quad \sum_{i=1}^{m} r_{ij} = q_j.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(q_j) + \sum_{i=1}^{m} \varphi(p_i) \le \sum_{i,j} \varphi(r_{ij}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем число j, $1 \le j \le n$, и положим $x_i = \frac{r_{ij}}{p_i}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = q_j, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

и из выпуклости функции φ получаем

$$\varphi(q_j) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \varphi\left(\frac{r_{ij}}{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{r_{ij}}{p_i} \psi\left(\frac{r_{ij}}{p_i}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} r_{ij}\left[\psi(r_{ij}) - \psi(p_i)\right] = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}\psi(r_{ij}) - \sum_{i=1}^{m} r_{ij}\psi(p_i).$$

Суммируя полученные оценки по всем $j = 1, \ldots, n$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(q_j) \leq \sum_{i,j} r_{ij}\psi(r_{ij}) - \sum_{i,j} r_{ij}\psi(p_i).$$

Как нетрудно видеть,

$$\sum_{i,j} r_{ij}\psi(p_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\psi(p_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i\psi(p_i) = \sum_{i=1}^{m}\varphi(p_i); \quad \sum_{i,j} r_{ij}\psi(r_{ij}) = \sum_{i,j}\varphi(r_{ij}),$$

т.е. окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi(q_j) + \sum_{i=1}^{m}\varphi(p_i) \leq \sum_{i,j}\varphi(r_{ij}),$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Предъявим семейство функций, удовлетворяющих условиям леммы. Такие функции удобно искать в виде $\varphi(x) = x\psi(x)$, где $\psi(x) = g(x)\ln x$ ($\psi(0) = 0$), функция $g: [0,1] \to (0,\infty)$ – монотонно возрастающая класса C^2 .

Условие $\psi(x) + \psi(y) \leq \psi(xy)$ для $x, y \in (0,1]$ выполняется автоматически, так как $\psi(x) + \psi(y) = g(x)\ln x + g(y)\ln y \leq$ $\leq g(xy)(\ln x + \ln y) = \psi(xy)$; выполняется это условие и в случае равенства нулю одной или обеих переменных x, y . Более ограничительным является условие выпуклости функции φ . Как нетрудно подсчитать, $\varphi''(x) = g''(x)x\ln x + g'(x)[2 + 2\ln x] + g(x)\cdot\frac{1}{x}$ для $x, y \in (0,1]$. Условию $\varphi''(x) > 0$ удовлетворяет, например, любая функция рассматриваемого вида $\varphi(x) = g(x)x\ln x$ для $g(x) = 1 + \beta x$ при $\beta \in [0, 1/2]$.

2. Пусть $\xi = (C_1, C_2, \ldots, C_k)$ – конечное разбиение пространства Лебега (M, μ) [I] , φ – функция, удовлетворяющая условиям леммы.

Число $H_\varphi(\xi) = -\sum_{i=1}^{k}\varphi(\mu(C_i))$ назовем φ-энтропией разбиения ξ .

Следующие простейшие свойства φ -энтропии доказываются аналогично тому, как это делалось для энтропии в [1,2].

1°. Для любого разбиения $\xi=(C_1,\cdots,C_k)$ имеем $0\le \le H_\varphi(\xi)\le g(\frac{1}{k})\ln k$ (здесь $\varphi(x)=g(x)x\ln x$), причем величина $H_\varphi(\xi)$ достигает своего максимума, равного $g(\frac{1}{k})\ln k$, в случае, когда все $\mu(C_i)$ равны друг другу $(=\frac{1}{k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha_i=\frac{1}{k}$, $x_i=\mu(C_i)$ для $i=1,\dots,k$. Тогда из выпуклости функции φ получаем справедливость неравенства

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\Big)\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(x_i),$$

т.е.

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\mu(C_i)\Big)\le\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\varphi(\mu(C_i))$$

или

$$-\sum_{i=1}^{k}\varphi(\mu(C_i))\le-k\varphi\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu(C_i)\Big),$$

откуда

$$H_\varphi(\xi)=-\sum_{i=1}^{k}\varphi(\mu(C_i))\le-k\varphi(\tfrac{1}{k})=g(\tfrac{1}{k})\ln k,$$

причем эти неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда все x_i (т.е. $\mu(C_i)$) равны друг другу $(=\frac{1}{k})$, что и требовалось доказать.

2°. (Субаддитивность φ-энтропии.) Пусть $\xi=(C_1,\cdots,C_n)$ и $\eta=(\mathcal{D}_1,\cdots,\mathcal{D}_m)$ – два конечных разбиения пространства Лебега. Тогда $H_\varphi(\xi\vee\eta)\le H_\varphi(\xi)+H_\varphi(\eta)$.

Это утверждение сразу следует из леммы.

3. Доказанных в п.2 свойств φ -энтропии конечного разбиения пространства Лебега достаточно для определения φ-энтропии автоморфизма этого пространства, которая так же, как и энтропия Колмогорова – Синая, является его метрическим инвариантом.

Сначала определим φ-энтропию автоморфизма T относительно конечного разбиения ξ. Положим $H_n=H_\varphi(\xi\vee T\xi\vee\cdots\vee \vee T^{n-1}\xi)$; числа $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют неравенствам $H_{n+m}\le H_n+H_m$. Действительно,

$$H_{n+m}=H_\varphi(\xi\vee\cdots\vee T^{n+m-1}\xi)\le H_\varphi(\xi\vee\cdots\vee T^{n-1}\xi)+$$

$$+H_\varphi(T^n\xi\vee\cdots\vee T^{n+m-1}\xi)=H_n+H_\varphi(T^n(\xi\vee\cdots\vee T^{n-1}\xi))=H_n+H_m,$$

поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\varphi(\xi\vee\cdots\vee T^{n-1}\xi)\stackrel{def}{=}h_\varphi(T,\xi).$$

Величину $h_\varphi(T,\xi)$ и назовем φ-энтропией автоморфизма T относительно разбиения ξ.

Далее, φ-энтропию автоморфизма T определим как супремум $\sup h_\varphi(T,\xi)$ по всем конечным разбиениям ξ и обозначим ее $h_\varphi(T)$. В случае $\varphi(x)=x\ln x\ (\varphi(0)=0)$ это определение совпадает с определением энтропии Колмогорова – Синая (см., например, [I]).

4. Одним из характеристических свойств энтропии (разбиения) Колмогорова – Синая является ее аддитивность для независимых разбиений ξ и η : $H(\xi\vee\eta)=H(\xi)+H(\eta)$ [I,2]. Как показано в работах [3–6] (см. также обзор А.Реньи в [7]), это свойство при выполнении некоторых естественных условий однозначно приводит к энтропии Колмогорова – Синая. Поэтому неудивительно, что φ-энтропия, отличная от энтропии Колмогорова – Синая, таким свойством не обладает. Отсутствие указанной аддитивности приводит, например, к тому, что φ-энтропия автоморфизма, вообще говоря, не равна φ-энтропии его конечного образующего разбиения, как это имеет место для энтропии Колмогорова – Синая [I].

Интересно отметить, что энтропия Реньи (I_α в [7]), наоборот, удовлетворяет свойству аддитивности для независимых разбиений, но, вообще говоря, не субаддитивна в случае несовпадения ее с энтропией Колмогорова – Синая (и потому для нее не проходит построение энтропии автоморфизма, приведенное в п.3 настоящей работы).

Литература

I. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория.– М.: Наука, I980.

2. Рохлин В.А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // Успехи мат. наук. – 1967. – Т.22, №5. – С.3–56.

3. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи мат. наук. - 1953. - Т.8, №3. - С.3-20.
4. Фаддеев Д.К. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы// Успехи мат. наук. - 1956. - Т.11, № 1. - С.227-231.
5. Aczel J., Daróczy Z. Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der shannonschen Entropie// Acta Math. Hung. - 1963. - V.14. - P.95-122.
6. Chaundy T.W., McLeod J.B. On a functional equation // Edinburg Math. Notes. - 1960. - V.43.- P.7-8.
7. Renyi A. On the foundations of information theory // Rev. Inst. Internat. Stat. - 1965. - V.33. - P.1-14.

Поступила в ред.-изд. отдел
3.10.1988 г.