Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

ДВУХСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ДИСКРЕТНЫМИ НОВШЕСТВАМИ

А.Я.Заславский

1. Рассматривая двухпродуктовую экономику, состоящую из двух секторов, первый из которых производит средства производства (фонды), обозначаемые через K, второй – предметы потребления (продукты), обозначаемые через C. Время считается дискретным, а количество труда постоянным и равным единице. Технология – это пара (f,v), где f – производственная функция от двух переменных K,L (L – трудовые ресурсы), а число $v\in[0,1)$. Имея в момент времени t фонды K, трудовые ресурсы L и используя технологию (f,v), первый (соответственно второй) сектор в течение единичного интервала времени создает фонды (соответственно продукты) в количестве $f(K,L)$. При этом к моменту $t+1$ сектор будет иметь в своем распоряжении использовавшиеся им старые фонды в количестве vK.

Пусть (f,v) – технология, используемая первым сектором, а (g,u) – технология, применяемая вторым сектором. Траекторией развития является последовательность (K_t,R_t,C_t,L_t,H_t) ($t=0,1,\dots$), где K_t,R_t – фонды соответственно первого и второго секторов; C_t – потребление в момент времени t; L_t,H_t – трудовые ресурсы, используемые в момент времени t соответственно первым и вторым секторами, $K_t,R_t,C_t,L_t,H_t\geq 0$,

$$L_t+H_t\leq 1,\ K_{t+1}\geq vK_t,\ R_{t+1}\geq uR_t,\ K_{t-1}-vK_t+R_{t+1}-uR_t\leq f(K_t,L_t),$$

$$C_{t+1}=g(R_t,H_t)\ (t=0,1,\dots).$$

В работе рассматривается двухсекторная модель экономики, подобная однопродуктовой модели с дискретными новшествами, предложенной В.Л.Макаровым в [I]. В двухсекторной модели с дискретными новшествами так же, как и в однопродуктовой, новшество задается в форме затрат и результатов, причем затраты являются единовременными (дискретными), считается, что они относятся к одному году, а результат этих затрат - появление новой производственной функции и новых производственных фондов в некотором первоначальном (исходном количестве).

Отличие дискретных новшеств в двухпродуктовой модели от новшеств в однопродуктовой состоит в том, что здесь они разбиваются на две группы: новшества, относящиеся к первому сектору, и новшества, относящиеся ко второму сектору. Новшество состоит из новой технологии и нового вида фондов, связанного с этой технологией, не существовавшего ранее в том секторе экономики, в котором будет внедряться данное новшество. В производственном процессе, основанном на новой технологии, используется только лишь связанный с ней новый вид фондов. Это происходит потому, что в производстве, применяющем новую прогрессивную технологию, нельзя использовать старые виды фондов, а в производстве, основанном на старой технологии, невозможно использовать новый вид фондов, качественно отличающийся от существовавших ранее.

Рассмотрим некоторое новшество, относящееся к первому сектору. Оно состоит из фондов нового вида i и связанной с ним технологии (f^i, v^i). Для того чтобы это новшество было внедрено к началу года $t+1$, в году t должны быть сделаны необходимые затраты, в результате которых появятся новая технология (f^i, v^i) и фонды вида i в исходном количестве K^i.

Имея в момент времени $\tau \geq t+1$ фонды вида i в количестве K^i_τ и трудовые ресурсы L^i_τ, первый сектор посредством технологии (f^i, v^i) произведет к началу года $\tau+1$ фонды вида i в количестве $f^i(K^i_\tau, L^i_\tau)$. При этом он будет располагать фондами вида i, сохранившимися с прошлого года, в количестве $v^i K^i_\tau$, которые останутся в производстве, основанном на технологии (f^i, v^i). Одна часть вновь произведенных фондов вида i может пойти на затраты для внедрения новшеств, другая часть может перейти во второй сектор, если в мо-

мент $\tau+1$ там существует производство, основанное на технологии, использующей фонды вида i, а третья часть их остается в первом секторе в производстве, основанном на технологии (f^i, σ^i).

Рассмотрим новшество, относящееся ко второму сектору. Оно состоит из фондов вида j и технологии (g^j, u^j), использующей этот вид фондов. Имея в момент времени τ фонды вида j в количестве K^j_τ и трудовые ресурсы H^j_τ, второй сектор посредством технологии (g^j, u^j) к началу года $\tau+1$ произведет продукт вида j в количестве $g^j(K^j_\tau, H^j_\tau)$. При этом он будет располагать фондами вида j, оставшимися с прошлого года, в количестве $u^j K^j_\tau$.

Для того чтобы к началу года $t+1$ новшество, состоящее из фондов вида j, ранее не существовавшего во втором секторе, и технологии (g^j, u^j), выпускающей на основе фондов вида j продукт вида j, было внедрено, должны быть произведены в году t необходимые затраты, в результате которых появится технология (g^j, u^j), а в первом секторе к началу года $t+1$ должно быть произведено некоторое количество фондов вида j, часть которого в количестве $K^j > 0$ передается во второй сектор (K^j - исходное количество фондов вида j, необходимое для внедрения технологии (g^j, u^j)). Последнее возможно лишь в том случае, если в момент времени t новшество, состоящее из фондов вида j и технологии (f^j, σ^j), уже внедрено в первом секторе, количество вновь произведенных фондов вида j посредством технологии (f^j, σ^j) в году t не меньше K^j.

Предполагается, что виды фондов делятся на две группы. Вид фондов будет называться видом фондов первого рода, если с ним связывается технология во втором секторе такая, что производственный процесс, основанный на ней, использует данный вид фондов. В противном случае вид фондов называется видом фондов второго рода. Виды фондов второго рода не используются во втором секторе, но их затраты могут быть необходимы для последующего внедрения новшеств.

Дадим теперь математическое описание модели. Пусть $\mathcal{J} = \{0, 1, \dots\}$, все виды фондов, встречающиеся в модели, занумерованы целыми неотрицательными числами, $\tilde{\mathcal{J}}$ - множество номеров видов фондов первого рода, которое предполагается бесконечным. С каждым фондом вида i, где $i \in \mathcal{J}$, связывается

технология (новшество) в первом секторе (f^i, v^i) , а в случае, если $i \in \tilde{\mathcal{J}}$, то с ним также связывается технология (новшество) во втором секторе (g^i, u^i) .

В момент времени $t \in \mathcal{J}$ состояние экономики задается в следующем виде:

$$(\mathcal{J}^t_c, \mathcal{J}^t_H, A^t_c, A^t_H, (K^i_t)(i \in \mathcal{J}^t_c), (R^i_t, C^i_t)\,(i \in A^t_c)),$$

где $\mathcal{J}^t_c$ (соответственно A^t_c) - конечное множество номеров новшеств (технологий), используемых в момент t в первом (соответственно во втором) секторе, $A^t_c \subset \mathcal{J}^t_c \cap \tilde{\mathcal{J}}$, $K^i_t \geq 0$ (соответственно $R^i_t \geq 0$) - фонды вида i , имеющиеся в момент t в распоряжении первого (соответственно второго) сектора, $C^i_t \geq 0$ - потребление вида i , полученное в момент t посредством технологии (g^i, u^i) , а $\mathcal{J}^t_H$ (соответственно A^t_H) - множество номеров тех новшеств, относящихся к первому (соответственно ко второму) сектору, которые в принципе имеются, но не внедрены (новшеств, которые существуют лишь в виде описания своего "идейного" содержания, некой программы внедрения в жизнь), причем $A^t_H \subset \tilde{\mathcal{J}}$. Для определенности положим

$$R^i_t = C^i_t = 0 \ (i \in \mathcal{J}^t_c \setminus A^t_c).$$

Для ввода в действие новшества необходимы первоначальные затраты уже используемых видов фондов. Считаем, что в момент времени t нам известна следующая информация:

$$(K^i)(i \in \mathcal{J}^t_H), (R^i)(i \in A^t_H), (s^{ij})(i \in \mathcal{J}^t_H,$$

$$j \in \mathcal{J}^t_H \cup \mathcal{J}^t_c), (\sigma^{ij})(i \in A^t_H, j \in \mathcal{J}^t_H \cup \mathcal{J}^t_c),$$

где $s^{ij} \geq 0$ - затраты фондов j , необходимые для ввода в действие новшества i в первом секторе, $\sigma^{ij} \geq 0$ - затраты фондов вида j , необходимые для ввода в действие новшества i во втором секторе, $K^i > 0$ - исходное количество фондов вида i , которое получается в начальный момент использования новшества i в первом секторе в результате сделанных затрат, $R^i > 0$ - исходное количество фондов вида i , необходимое для ввода в действие новшества i во втором секторе.

Мы считаем, что R^i - исходное количество фондов вида i - входит в затраты σ^{ii} ($R^i \leq \sigma^{ii}$).

В момент $t+1$ экономика может перейти в состояние

$$(\mathcal{J}_c^{t+1}, \mathcal{J}_H^{t+1}, A_c^{t+1}, A_H^{t+1}, (K_{t+1}^i)(i \in \mathcal{J}_c^{t+1}),$$

$$(R_{t+1}^i, C_{t+1}^i)(i \in A_c^{t+1})),$$

для которого $\mathcal{J}_c^t \subset \mathcal{J}_c^{t+1}$, $A_c^t \subset A_c^{t+1} \subset \mathcal{J}_c^t$, множество $E = \mathcal{J}_c^{t+1} \setminus \mathcal{J}_c^t$ содержится в множестве, состоящем из всех $i \in \mathcal{J}_H^t$ таких, что новшество i в первом секторе можно внедрить, затратив лишь фонды с номерами из $\mathcal{J}_c^t$, множество $F = A_c^{t+1} \setminus A_c^t$ содержится в множестве, состоящем из всех $i \in A_H^t$ таких, что новшество i во втором секторе можно внедрить, затратив лишь фонды с номерами из $\mathcal{J}_c^t$, существует распределение трудовых ресурсов $L_t^i \geq 0\ (i \in \mathcal{J}_c^t)$, $H_t^i \geq 0\ (i \in A_c^t)$ такое, что

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_c^t} L_t^i + \sum_{i \in A_c^t} H_t^i \leq 1, \quad K_{t+1}^i \geq \upsilon^i K_t^i\ (i \in \mathcal{J}_c^t),$$

$$R_{t+1}^i \geq \omega^i R_t^i\ (i \in A_c^t), \quad C_{t+1}^i = 0,\ R_{t+1}^i = R^i (i \in A_c^{t+1} \setminus A_c^t),$$

$$0 \leq C_{t+1}^i \leq g^i (R_t^i, H_t^i)\ (i \in A_t),$$

$$K_{t+1}^i = K^i (i \in \mathcal{J}_c^{t+1} \setminus \mathcal{J}_c^t),$$

$$K_{t+1}^j - \upsilon^j K_t^j + \sum_{i \in E} s^{ij} + \sum_{i \in F} \sigma^{ij} \leq f^j (K_t^j, L_t^j)$$

$$(j \in A_c^{t+1} \setminus A_c^t),\ R_{t+1}^j - \omega^j R_t^j + K_{t+1}^j - \upsilon^j K_t^j + \sum_{i \in E} s^{ij} +$$

$$+ \sum_{i \in F} \sigma^{ij} \leq f^i (K_t^j, L_t^j)\ (j \in \mathcal{J}_c^t \setminus (A_c^{t+1} \setminus A_c^t)).$$

(Здесь мы считаем, что результат суммирования по пустому множеству равен нулю.) Иногда состояние экономики в момент t будет записываться в виде

$$(\mathcal{J}_c^t, \mathcal{J}_H^t, A_c^t, A_H^t, (K_t^i, L_t^i)(i \in \mathcal{J}_c^t), (R_t^i, C_t^i, H_t^i)\ (i \in \mathcal{J}_c^t)),$$

где $(L_t^i)(i \in \mathcal{J}_c^t), (H_t^i)\ (i \in A_c^t)$ — распределение трудовых ресурсов в момент t. Это делается в том случае, когда нам нужно что-то сказать об этом распределении. При задании траектории модели мы также будем включать в ее описание соответствующую ей последовательность распределений трудовых ресурсов чаще всего в том лишь случае, когда нам нужна какая-то

информация об этих распределениях. Но в любом случае с траекторией модели всегда связывается определенная последовательность распределений трудовых ресурсов, с помощью которой строится данная траектория, даже если эта последовательность отсутствует в ее описании. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать такие модели, в которых множества имеющихся невнедренных в момент t новшеств $\mathcal{J}_H^t, A_H^t$ однозначно определяются множествами $\mathcal{J}_C^t, A_C^t$. В этом случае обозначения $\mathcal{J}_H^t, A_H^t$ будут опускаться.

2. Через R_+^ℓ обозначим конус элементов арифметического пространства R^{ℓ}, имеющих неотрицательные координаты. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые производственные функции $f: R_+^2 \longrightarrow R_+$ непрерывны, суперлинейны (супераддитивны, положительно однородны), причем $f(0,1) = f(1,0) = 0$, $f(x,1) < f(\lambda x, 1) < \lambda f(x,1)$ $(\lambda > 1, x > 0)$, и для любой технологии (f, v), используемой в первом секторе $X \in R_+$, при котором $f(1, X) > 1 - v$.

С каждой технологией (f, v), применяемой в первом секторе, связывается однозначно определенное положительное число $x(f, v)$ [2], являющееся характеристикой данной технологии, оценивающей ее производственные возможности, такое, что $f(x(f,v),1) = (1-v)x(f,v)$. Для $x_0 > 0$ неравенство $f(x_0,1) > (1-v)x_0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_0 < x(f,v)$, последовательность $x_t = v x_{t-1} + f(x_{t-1}, 1)$ $(t = 1,2,\ldots)$ сходится к $x(f,v)$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим модель двухпродуктовой экономики с одной технологией (f,v) в первом секторе и с одной технологией (g,u) во втором секторе, использующими один и тот же вид фондов. Пусть $X = (K_t, R_t, C_t, L_t, H_t)(t \in \mathcal{J})$ – ее траектория, тогда верхние пределы последовательностей $\{K_t\}$, $\{vK_t + f(K_t, 1)\}$ не превосходят $x(f,v)$, верхний предел последовательности $\{R_t\}$ не превосходит $(1-u)^{-1}x(f,v)$, а $\overline{\lim_{t\to\infty}} C_t \le g((1-u)^{-1}x(f,v), 1)$.

Положим

$$w(X) = \overline{\lim_{T\to\infty}}\, T^{-1} \sum_{t=0}^{T-1} C_t,$$

$$w(f,v,g,u) = \sup\{w(Y) : Y \text{ – траектория модели}\}.$$

Понятно, что $w(f,v,g,u)$ – характеристика пары технологий (f,v), (g,u), оценивающая ее возможности относительно потребления. Справедливо следующее утверждение, доказывающееся так же, как и близкие к нему результаты в [2,3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Существуют числа $h(f,v,g,u)$, $L(f,v,g,u) \in (0,1)$ такие, что

$$\lim_{x\to\infty}[h(f,v,g,u)f(1,x)] \in (1-v,\infty],$$

$$g((1-u)^{-1}L(f,v,g,u)(1-h(f,v,g,u))f(x(h(f,v,g,u)f,v),1),$$

$$1-L(f,v,g,u)) = w(f,v,g,u),$$

последовательность $(\bar{K}_t,\bar{R}_t,\bar{C}_t,\bar{L}_t,\bar{H}_t)(t\in J)$, где

$$\bar{L}_t = L(f,v,g,u),\quad \bar{H}_t = 1-\bar{L}_t,$$

$$\bar{K}_t = L(f,v,g,u)x(h(f,v,g,u)f,v),$$

$$\bar{R}_t = L(f,v,g,u)(1-u)^{-1}(1-h(f,v,g,u))\times$$

$$\times f(x(h(f,v,g,u)f,v),1),$$

$$\bar{C}_t = w(f,v,g,u)\ (t\in J),$$

является траекторией модели.

3. Рассмотрим двухсекторную модель экономической динамики с дискретными новшествами. Считаем, что $0\in\tilde{J}$, для внедрения в первом секторе новшества с номером $i\geq 1$ необходимы лишь затраты фондов, чьи номера меньше i, а для внедрения во втором секторе новшества с номером $i\in\tilde{J}\setminus\{0\}$ необходимы лишь затраты, чьи номера не превышают некоторое число $r(i)\in J$. Математически это записывается в следующем виде:

$$s^{ij}=0(i,j\in J,\ j\geq i),\quad \sigma^{ij}=0(i,j\in J,\ j>r(i)).$$

Считаем также, что для каждой траектории модели $(J_c^t, J_H^t, A_c^t, A_H^t, (K_t^i)(i\in J_c^t), (R_t^i,C_t^i)(i\in A_c^t))(t\in J)$ в любой момент времени t выполняется $j+1\in J_H^t$, где j – наибольший элемент множества J_c^t, $i\in A_c^t\cup A_H^t$, i – наибольший элемент множества $J_c^t\cap\tilde{J}$, имеют место следующие неравенства:

$$\sup_{i\in J}\Big\{\sum_{p\in J}[s^{ip}(x(f^p,v^p)(1-v^p))^{-1}]\Big\} < 1, \tag{I}$$

$$\sup_{i\in J}\Big\{\sum_{p\in J}[\sigma^{ip}(x(f^p,v^p)(1-v^p))^{-1}]\Big\} < 1. \tag{2}$$

Эти неравенства означают, что затраты фондов вида ρ, необходимые для внедрения новшества с номером i, должны быть невелики относительно $x(f^{\rho}, \sigma^{\rho})$.

Для $i \in \widetilde{\mathcal{J}}$ положим $h^i = h(f^i, \sigma^i, g^i, u^i)$, $\mathcal{L}^i = \angle(f^i, \sigma^i, g^i, u^i)$, $\omega^i = \omega(f^i, \sigma^i, g^i, u^i)$. Справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть $\overline{\lim}_{i \to \infty, i \in \widetilde{\mathcal{J}}} \omega^i = \infty$,

$$(\mathcal{J}_c^0, \mathcal{J}_H^0, A_c^0, A_H^0, (K_0^i)(i \in \mathcal{J}_c^0), (R_0^i, C_0^i)(i \in A_c^0))$$

– начальное состояние экономики такое, что $\mathcal{J}_c^0 = A_c^0 = \{0\}$, $K_0^0, R_0^0 > 0$. Тогда существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, \mathcal{J}_H^t, A_c^t, A_H^t, (K_t^i)(i \in \mathcal{J}_c^t), (R_t^i, C_t^i)(i \in A_c^t)) \quad (t \in \mathcal{J}),$$

для которой $\sup_{i \in A_c^t} C_t^i \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$.

Положим $\tau(0) = 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $\tau(i+1) > \tau(i) \geq i \ (i \in \widetilde{\mathcal{J}})$, для любой траектории модели $(\widetilde{\mathcal{J}}_c^t, \widetilde{\mathcal{J}}_H^t, \widehat{A}_c^t, \widehat{A}_H^t, (\widetilde{K}_t^i)(i \in \widetilde{\mathcal{J}}_c^t), (\widetilde{R}_t^i, \widetilde{C}_t^i)(i \in \widehat{A}_c^t))(t \in \mathcal{J})$, в любой момент времени T выполняется $\widetilde{\mathcal{J}}_H^T = \{j+1\}$, где j – наибольший элемент $\widetilde{\mathcal{J}}_c^T$, $\widehat{A}_H^T = \{i\} \setminus \widehat{A}_c^T$, i – наибольший элемент множества $\widetilde{\mathcal{J}} \cap \widetilde{\mathcal{J}}_c^T$. В связи с этим при задании состояний и траекторий модели обозначения имеющихся невнедренных новшеств опускаются.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА I. Пусть $t \in \mathcal{J}$, $i \in \widetilde{\mathcal{J}}$, $K_t, R_t, \angle > 0$, $\angle < 1$,

$$K_t > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i x(h^i f^i, \sigma^i),$$

$$R_t > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i (1-u^i)^{-1} (1-h^i) f^i(x(h^i f^i, \sigma^i), 1),$$

$$K_{t+1} = \sigma^i K_t + h^i f^i(K_t, \mathcal{L}^i \angle),$$

$$R_{t+1} = u^i R_t + (1-h^i) f^i(K_t, \mathcal{L}^i \angle),$$

$$C_{t+1} = g^i(R_t, (1-\mathcal{L}^i)\angle).$$

Тогда $K_{t+1} > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i x(h^i f^i, \sigma^i)$,

$$R_{t+1} > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i (1-u^i)^{-1} (1-h^i) f^i(x(h^i f^i, \sigma^i), 1), \ C_{t+1} > 2^{-1} \omega^i \angle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$K_{t+1}(\angle\mathcal{L}^i)^{-1}=v^iK_t(\angle\mathcal{L}^i)^{-1}+h^if^i(K_t\mathcal{L}^i)^{-1},1)\geq$$

$$\geq \inf\{K_t(\angle\mathcal{L}^i)^{-1},\ x(h^if^i,v^i)\}>2^{-1}x(h^if^i,v^i),$$

$$R_{t+1}(\mathcal{L}^i\angle)^{-1}=u^iR_t(\mathcal{L}^i\angle)^{-1}+(1-h^i)f^i(K_t(\mathcal{L}^i\angle)^{-1},1)>$$

$$>2^{-1}(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1),$$

$$C_{t+1}>g^i(2^{-1}\angle\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1),(1-\mathcal{L}^i)\angle)>$$

$$>2^{-1}\angle g^i(\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1),1-\mathcal{L}^i)=\omega^i2^{-1}\angle.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $(\mathcal{J}_c^0, A_c^0, (K_0^i)(i\in\mathcal{J}_c^0), (R_0^i, C_0^i)(i\in A_c^0))$ — начальное состояние экономики, $A_c^0\subset\mathcal{J}_c^0\cap\tilde{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2\subset A_c^0$, $\mathcal{J}_1\cap\mathcal{J}_2=\emptyset$ (возможны случаи, когда оба множества $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ пусты либо какое-нибудь одно из них пусто), $K_0^i>0 (i\in\mathcal{J}_c^0)$, $R_0^i>0\ (i\in\mathcal{J}_2)$,

$$\angle^i\in(0,1)\ (i\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2),\ 0\leq\tilde{\ell}^i<\ell^i<1\ (i\in\mathcal{J}_c^0),$$

$$\sum_{i\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2}\angle^i+\sum_{i\in\mathcal{J}_c^0}\ell^i\leq 1,\ K_0^i>2^{-1}\angle^i\mathcal{L}^ix(h^if^i,v),$$

$$R_0^i>2^{-1}\angle^i\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1)$$

$$(i\in\mathcal{J}_1).$$

Тогда существует траектория модели $(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^i)(i\in\mathcal{J}_c^t), (R_t^i, C_t^i)(i\in A_c^t)(t=0,\ldots T)$ такая, что $\mathcal{J}_c^t=\mathcal{J}_c^0$, $A_c^t=A_c^0$ $(t=0,\ldots,T)$,

$$C_t^i>2^{-1}\omega^i\angle^i(i\in\mathcal{J}_1, t=1,\ldots,T),\ C_t^i>0\ (i\in\mathcal{J}_2, t=1,\ldots,T),$$

$$K_t^i>0\ (i\in\mathcal{J}_c^t, t=1,\ldots,t),\ K_t^i=a_T^i+b_T^i,\ a_T^i, b_T^i\geq 0,$$

$$f^i(b_T^i,\ell^i)>\tilde{\ell}^ix(f^i,v^i)(1-v^i)(i\in\mathcal{J}_c^0),$$

$$a_T^i>2^{-1}\angle^i\mathcal{L}^ix(h^if^i,v^i),$$

$$R_T^i>2^{-1}\angle^i\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1)\ (i\in\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют $a_0^i \in (0, K_0^i)\,(i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$ такие, что

$$a_0^i > 2^{-1} L^i \mathcal{L}^i x(h^i f^i, 0)\,(i \in \mathcal{I}_1).$$

Положим $a_0^i = 0\,(i \in \mathcal{I}_c^0 \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2))$, $b_0^i = K_0^i - a_0^i\,(i \in \mathcal{I}_c^0)$.

Требуемая траектория строится по индукции. Для $t = 0, 1, \ldots$ положим

$$L_t^i = \ell^i (i \in \mathcal{I}_c^0 \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)),\; L_t^i = \mathcal{L}^i L^i + \ell^i,$$

$$H_t^i = L^i(1-\mathcal{L}^i)(i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2),\; H_t^i = 0\,(i \in A_c^0 \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)),$$

$$b_{t+1}^i = v^i b_t^i + f^i(b_t^i, \ell^i)\,(i \in \mathcal{I}_c^0),$$

$$a_{t+1}^i = v^i a_t^i + h^i f^i(a_t^i, \mathcal{L}^i L^i),$$

$$c_{t+1}^i = g^i(R_t^i, (1-\mathcal{L}^i) L^i),$$

$$R_{t+1}^i = u^i R_t^i + (1-h^i) f^i(a_t^i, \mathcal{L}^i L^i)\,(i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2),$$

$$a_{t+1}^i = 0\,(i \in \mathcal{I}_c^0 \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)),\; R_{t+1}^i = u^i R_t^i,$$

$$c_{t+1}^i = 0\,(i \in A_c^0 \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)),$$

$$K_{t+1}^i = a_{t+1}^i + b_{t+1}^i\,(i \in \mathcal{I}_c^0).$$

Легко видеть, что траектория модели определена нами корректно,

$$b_t^i \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell^i x(f^i, v^i),\; f^i(b_t^i, \ell^i) \xrightarrow[t\to\infty]{} \ell^i (1-v^i) x(f^i, v^i)$$

$$(i \in \mathcal{I}_c^0),\; a_t^i \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathcal{L}^i L^i x(h^i f^i, v^i),$$

$$R_t^i \xrightarrow[t\to\infty]{} (1-u^i)^{-1} L^i \mathcal{L}^i f^i(x(h^i f^i, v^i), 1)(1-h^i)$$

$$(i \in \mathcal{I}_2).$$

Из леммы I вытекает, что

$$a_t^i > 2^{-1} L^i \mathcal{L}^i x(h^i f^i, v^i),\; c_{t+1}^i > 2^{-1} \omega^i L^i,$$

$$R_t^i > 2^{-1} L^i \mathcal{L}^i (1-u^i)^{-1}(1-h^i) f^i(x(h^i f^i, v^i), 1)\,(i \in \mathcal{I}_1, t \in \mathcal{I}).$$

Нетрудно видеть, что при достаточно большом T выполняются все требуемые соотношения. Лемма доказана.

Выберем $\ell \in (0,1)$ такое, что

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \{ \sup \{ \sum_{p \in \mathcal{I}} [s^{ip}(x(f^p, v^p)(1-v^p))^{-1}],$$

$$\sum_{\rho\in\mathcal{J}}[\sigma^{i\rho}(x(f^\rho_\cdot,v^\rho)(1-v^\rho)]]\}<\ell.$$

Положим $L=2^{-1}(1-\ell)$. Для $i\in\mathcal{J}\setminus\{0\}$ существуют числа

$$\ell(1,i-1,\rho)>s^{i\rho}(x(f^\rho_\cdot,v^\rho)(1-v^\rho))^{-1}(0\le\rho<i),$$

$$\ell(2,i,\rho)>\sigma^{i\rho}(x(f^\rho_\cdot,v^\rho)(1-v^\rho))^{-1}(0\le\rho\le\tau(i))$$

такие, что

$$\sum_{\rho=0}^{i-1}\ell(1,i-1,\rho)\le\ell,\ \sum_{\rho=0}^{\tau(i)}\ell(2,i,\rho)\le\ell.$$

ЛЕММА 3. Пусть $(\mathcal{J}^0_c, A^0_c,(K^\rho_0)(\rho\in\mathcal{J}^0_c),(R^\rho_0,C^\rho_0)(\rho\in A^0_c))$ – начальное состояние экономики,

$$i=\sup\{\rho:\rho\in A^0_c\},\ \ \mathcal{J}^0_c=\{0,\ldots,\tau(i)\},$$

$$K^\rho_0>0(\rho\in\mathcal{J}^0_c),\ K^i_0>2^{-1}L\mathcal{L}^i x(h^i f^i_\cdot,v^i),$$

$$R^i_0>2^{-1}L\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^i f^i_\cdot,v^i),1),j\in\mathcal{J},j>i.$$

Тогда существует траектория модели $(\mathcal{J}^t_c, A^t_c,(K^\rho_t)(\rho\in\mathcal{J}^t_c),(R^\rho_t,C^\rho_t)(\rho\in A^t_c))\ (t=0,\ldots,T)$ такая, что

$$\mathcal{J}^T_c=\{0,\ldots,\tau(j)\},\ A^T_c=A^0_c\cup\{j\},\ K^\rho_t>0\ (\rho\in\mathcal{J}^t_c,t=0,\ldots,T),$$

$$R^j_T>2^{-1}L\mathcal{L}^j(1-u^j)^{-1}(1-h^j)f^j(x(h^j f^j_\cdot,v^j),1),$$

$$K^j_T>2^{-1}L\mathcal{L}^j x(h^j f^j_\cdot,v^j),\ C^i_T>2^{-1}w^i L\ (t=1,\ldots,T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемая траектория строится по индукции таким образом, что новшество в первом секторе с номером $\rho\in\{\tau(i)+1,\ldots,\tau(j)\}$ внедряется в момент времени $T(\rho), T(\tau(i))=0$, новшество во втором секторе с номером j внедряется в момент времени $\tau<T$, причем $T(\rho)<T(\rho+1)<\tau(\rho\in\mathcal{J},\tau(i)\le\rho<\tau(j))$, и никакие другие новшества на нашей траектории не внедряются.

Предположим, что $\rho\in\mathcal{J},\tau(i)\le\rho<\tau(j)$, определены состояния экономики в моменты времени от нуля до $T(\rho)$ включительно, причем

$$A^{T(\rho)}_c=A^0_c,\ \mathcal{J}^{T(\rho)}_c=\{0,\ldots,\rho\},\tag{3}$$

$$K^n_t>0\ (n\in\mathcal{J}^t_c,\ t=0,\ldots,T(\rho)),\tag{4}$$

$$K^i_{T(\rho)}>2^{-1}L\mathcal{L}^i x(h^i f^i_\cdot,v^i),\tag{5}$$

$$R^i_{T(\rho)}>2^{-1}L\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^i f^i_\cdot,v^i),1),\tag{6}$$

$$C_t^i > 2^{-1}\omega^i L \; (1 \le t \le T(\rho)), \tag{7}$$

а если $\rho > \tau(i)$, то

$$\rho \in \mathcal{J}_c^{T(\rho)} \setminus \mathcal{J}^{T(\rho)-1}. \tag{8}$$

Заметим, что при $\rho = \tau(i)$ наше предположение справедливо. Применяя лемму 2 к состоянию экономики в момент $T(\rho)$ при $\mathcal{J}_1=\{i\}, \mathcal{J}_2=\phi, L^i=L, \ell^n=\ell(1,\rho,n), \tilde{\ell}^n=s^{(\rho+1)n}(x(f^n,\sigma^n)(1-\sigma^n))^{-1} (n\in\mathcal{J}^{T(\rho)})$,

получим, что существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^n)(n\in\mathcal{J}_c^t), (R_t^n, C_t^n)(n\in A_c^t)) \; (t=T(\rho),\dots,T)$$

такая , что

$$\mathcal{J}_c^t=\mathcal{J}_c^{T(\rho)}, \; A_c^t=A_c^{T(\rho)} \; (t=T(\rho),\dots,\bar{T}),$$

$$C_t^i > 2^{-1}\omega^i L^i \; (t=T(\rho)+1,\dots,\bar{T}),$$

$$K_t^n > 0 \; (n\in\mathcal{J}_c^t, t=T(\rho)+1,\dots,T), K_{\bar{T}}^n=a_{\bar{T}}^n+b_{\bar{T}}^n,$$

$$a_{\bar{T}}^n, b_{\bar{T}}^n \ge 0, \; f^n(b_{\bar{T}}^n,\ell^n) > s^{(\rho+1)n} \; (n\in\mathcal{J}_c^{T(\rho)}),$$

$$a_{\bar{T}}^i > 2^{-1} L \mathcal{L}^i x(h^i f^i,\sigma^i),$$

$$R_{\bar{T}}^i > 2^{-1} L \mathcal{L}^i (1-u^i)^{-1}(1-h^i) f^i(x(h^i f^i,\sigma^i),1).$$

Определим состояние экономики в момент $\bar{T}+1$, полагая

$$T(\rho+1)=\bar{T}+1, \; L_{\bar{T}}^n=\ell^n \; (n\in\mathcal{J}_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),$$

$$L_{\bar{T}}^i=\mathcal{L}^i L+\ell^i, \; H_{\bar{T}}^i=(1-\mathcal{L}^i)L, \; H_{\bar{T}}^n=0$$

$$(n\in A_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}), \; C_{\bar{T}+1}^n=g^n(R_{\bar{T}}^n,H_{\bar{T}}^n) \; (n\in A_c^{\bar{T}}),$$

$$\mathcal{J}_c^{\bar{T}+1}=\mathcal{J}_c^{\bar{T}}\cup\{\rho+1\}, \; A_c^{\bar{T}+1}=A_c^{\bar{T}},$$

$$K_{\bar{T}+1}^{\rho+1}=K^{\rho+1},$$

$$K_{\bar{T}+1}^n=\sigma^n K_{\bar{T}}^n+f^n(K_{\bar{T}}^n,\ell^n)-s^{(\rho+1)n} \; (n\in\mathcal{J}_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),$$

$$K_{\bar{T}+1}^i=\sigma^i K_{\bar{T}}^i+f^i(b_{\bar{T}}^i,\ell^i)-s^{(\rho+1)i}+h^i f^i(a_{\bar{T}}^i,\mathcal{L}^i L),$$

$$R_{\bar{T}+1}^n=u^n R_{\bar{T}}^n \; (n\in A_c^{\bar{T}})\setminus\{i\}),$$

$$R_{\bar{T}+1}^i=u^i R_{\bar{T}}^i+(1-h^i)f^i(a_{\bar{T}}^i,\mathcal{L}^i L).$$

Нетрудно видеть, что состояние экономики в момент $\bar{T}+1$ определено нами корректно. Из леммы I вытекает, что предположение, сделанное нами для ρ, справедливо и для $\rho+1$. Следовательно, существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^n)(n\in\mathcal{J}_c^t), (R_t^n, C_t^n)(n\in A_c^t))\,(t=0,\ldots,T(\tau(j))),$$

для которой при $\rho=\tau(j)$ выполняются соотношения (3)-(8).

Применяя лемму 2 к состоянию экономики в момент $T(\tau(j))$ при $\mathcal{J}_1=\{i\}$, $\mathcal{J}_2=\emptyset$, $L^i=L$, $\ell^n=\ell(2,j,n)$,

$$\tilde{\ell}^n=\sigma^{jn}(x(f^n,v^n)(1-v^n))^{-1}(0\le n\le\tau(j)),$$

получим, что существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^n)(n\in\mathcal{J}_c^t), (R_t^n, C_t^n)(n\in A_c))\,(t=T(\tau(j)),\ldots,\bar{T})$$

такая, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_c^t=\mathcal{J}_c^{T(\tau(j))},\ A_c^t=A_c^{T(\tau(j))}\ (t=T(\tau(j)),\ldots,\bar{T}),\\
&C_t^i>2^{-1}w^iL\,(t=T(\tau(j))+1,\ldots,\bar{T}),\\
&K_t^n>0\ (n\in\mathcal{J}_c^t,\ t=T(\tau(j))+1,\ldots,\bar{T}),\\
&K_{\bar{T}}^n=a_{\bar{T}}^n+b_{\bar{T}}^n,\ \ a_{\bar{T}}^n,\ b_{\bar{T}}^n\ge 0,\\
&f^n(b_{\bar{T}}^n,\ell^n)>\sigma^{jn}\ (n\in\mathcal{J}_c^{\bar{T}}),\\
&a_{\bar{T}}^i>2^{-1}L\mathcal{L}^ix(h^if^i,v^i),\\
&R_{\bar{T}}^i>2^{-1}L\mathcal{L}^i(1-u^i)^{-1}(1-h^i)f^i(x(h^if^i,v^i),1).
\end{aligned}$$

Определим состояние экономики в момент $\tau=\bar{T}+1$, полагая

$$\begin{aligned}
&L_{\bar{T}}^n=\ell^n(n\in\mathcal{J}_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),\ \ L_{\bar{T}}^i=\mathcal{L}^iL+\ell^i,\\
&H_{\bar{T}}^i=(1-\mathcal{L}^i)L,\ \ H_{\bar{T}}^n=0\ \ (n\in A_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),\\
&C_{\bar{T}+1}^n=g^n(R_{\bar{T}}^n,H_{\bar{T}}^n)(n\in A_c^{\bar{T}}),\\
&\mathcal{J}_c^\tau=\mathcal{J}_c^{\bar{T}},\ \ A_c^\tau=A_c^{\bar{T}}\cup\{j\},\\
&K_\tau^n=v^nK_{\bar{T}}^n+(f^n(K_{\bar{T}}^n,\ell^n)-\sigma^{jn})(n\in\mathcal{J}_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),\\
&R_\tau^n=u^nR_{\bar{T}}^n\ (n\in A_c^{\bar{T}}\setminus\{i\}),\\
&K_\tau^i=v^iK_{\bar{T}}^i+f^i(b_{\bar{T}}^i,\ell^i)-\sigma^{ji}+h^if^i(a_{\bar{T}}^i,\mathcal{L}^iL),
\end{aligned}$$

$$R_\tau^i = u^i R_\tau^i + (1-h^i) f^i(a_\tau^i, \mathcal{L}^i \angle),$$
$$R_\tau^j = R^j > 0.$$

Нетрудно видеть, что состояние экономики в момент τ определено корректно. Из леммы I вытекает, что

$$K_\tau^i > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i x(h^i f^i, \sigma^i),$$
$$R_\tau^i > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^i (1-\omega^i)^{-1} (1-h^i) f^i(x(h^i f^i, \sigma^i),$$
$$C_t^i > 2^{-1} \omega^i \angle \ (1 \le t \le \tau).$$

Имеем

$$\mathcal{J}_c^\tau = \{0, \ldots, r(j)\}, \ A_c^\tau = A_c^0 \cup \{j\}, \ K_t^p > 0 \ (p \in \mathcal{J}_c^t, \ t = 1, \ldots, \tau).$$

Применим лемму 2 к состоянию экономики в момент τ при

$$\mathcal{J}_1 = \{i\}, \mathcal{J}_2 = \{j\}, \angle^i = \angle^j = \angle, \hat{\ell}^n = 0, \ \ell^n = \ell (r(j)+1)^{-1} \ (0 \le n \le r(j)),$$

получим, что существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^i)(i \in \mathcal{J}_c^t), (R_t^i, C_t^i)(i \in A)) \quad (t = \tau, \ldots, T)$$

такая, что

$$\mathcal{J}_c^t = \mathcal{J}_c^\tau, \ A_c^t = A_c^\tau \ (t = \tau, \ldots, T),$$
$$C_t^i > 2^{-1} \omega^i \angle (t = \tau+1, \ldots, T), \ K_t^n > 0 \ (n \in \mathcal{J}_c^t, \ t = \tau+1, \ldots, T),$$
$$K_T^j > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^j x(h^j f^j, \sigma^j),$$
$$R_T^j > 2^{-1} \angle \mathcal{L}^j (1-\omega^j)^{-1} (1-h^j) f^j(x(h^j f^j, \sigma^j), 1).$$

Нетрудно видеть, что требуемая траектория нами построена. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Существует строго возрастающая последовательность целых чисел $\{i_n : n \in \mathcal{J}\}$ такая, что

$$i_0 = 0, \ i_n \in \tilde{\mathcal{J}}, \ i_{n+1} - i_n > 2 (n \in \mathcal{J}), \ \omega^{i_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Применяя лемму 2 к состоянию экономики в нулевой момент времени при

$$\mathcal{J}_1 = \emptyset, \ \mathcal{J}_2 = \{0\}, \ \angle^0 = \angle, \ \ell^0 = \ell, \ \hat{\ell}^0 = 0,$$

получим, что существует траектория модели

$$(\mathcal{J}_c^t, A_c^t, (K_t^i)(i \in \mathcal{J}_c^t), \ (R_t^i, C_t^i)(i \in A_c^t)) \ (t = 0, \ldots, T)$$

такая, что

$$\mathcal{J}_c^t = \mathcal{J}_c^0,\ A_c^t = A_c^0\ (t=0,\dots,T),\ C_t^0, K_t^0 > 0\ (t=1,\dots,T),$$
$$K_T^0 > 2^{-1}\angle \mathcal{L}^0 x(h^0 f^0, \sigma^0),$$
$$R_T^0 > 2^{-1}\angle \mathcal{L}^0 (1-u^0)^{-1}(1-h^0) f^0 (x(h^0 f^0, \sigma^0), 1).$$

Дальнейшее построение траектории модели осуществляется последовательным применением леммы 3 с $i = i_n,\ j = i_{n+1}\ (n \in \mathcal{J})$.
Теорема доказана.

Автор благодарит С.М. Мовшовича и А.М.Рубинова за полезные обсуждения.

Литература

I. Макаров В.Л. О динамических моделях экономики и развития идей Л.В.Канторовича // Экономика и мат. методы. - 1987.- Т.23., № I. - С.10-24.

2. Заславский А.Я. Дискретные новшества в однопродуктовых моделях экономической динамики. - М., 1988. (Препринт/ ЦЭМИ АН СССР).

3. Канторович Л.В., Коркина Е.И., Хованский А.Г. Оптимизация потребления в непрерывной и дискретной моделях двухсекторной экономики // Оптимальные модели в системном анализе. - М.: ВНИИСИ, 1983. - С.14-20.

Поступила в ред.-изд. отдел
5.09.1988 г.