Выпуск 44(6I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Теория игр

УДК 5I9.8

О МЕРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ МНОЖЕСТВ

Г.Н.Дюбин, Е.А.Черкаева

Настоящая заметка непосредственно примыкает к работе [I], посвященной вопросам существования дележа Шепли для кооперативных игр на отрезке [0,I]. Основные характеристики этих дележей существенным образом определяются свойствами мер, порождаемых соответствующими характеристическими функциями. Ниже рассматриваются некоторые условия неотрицательности и отсутствия счетно-аддитивных составляющих для мер, порождаемых характеристическими функциями вида $f \circ \lambda$.

I. Напомним некоторые понятия и обозначения, введенные в [I]. Пусть X - носитель вероятностной меры μ , заданной на отрезке [0,I], а Ω - пространство всех классов μ-эквивалентных подмножеств множества X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пара $\Gamma = \langle v, \Omega \rangle$, где v - функция на Ω , $v(\phi)=0$, ϕ - класс, соответствующий подмножествам нулевой меры, называется кооперативной игрой. Функция v называется характеристической функцией игры Γ .

Пусть

$$\Omega_s = \{ t \leq s, t, s \subset \Omega \},$$

где отношение $t \leq s$ означает, что почти все точки любого представителя класса t содержатся в каждом из представителей класса s . Обозначим через A алгебру, порожденную множествами вида Ω_s .

В работе [I] было показано, что каждая характеристическая функция v , имеющая конечную норму, однозначно определяет, вообще говоря, конечно-аддитивную меру ν на алгебре A , причем мера множества Ω_s полагалась равной $v(s)$. В этой же работе

установлено, что любая функция v с конечной нормой единственным образом представима в виде $v = v_c + v_p$, где характеристическая функция v_c порождает счетно-аддитивную меру ν_c, а характеристическая функция v_p – чисто конечно-аддитивную меру ν_p на алгебре A, причем $\nu = \nu_c + \nu_p$.

В дальнейшем главным объектом исследования являются характеристические функции v вида $f \circ \lambda$, где f – такая функция от n переменных, что $f(0,\dots,0) = 0$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – вектор неатомических мер, а $f \circ \lambda(S) = f(\lambda_1(S), \lambda_2(S), \dots, \lambda_n(S))$.

Основные результаты работы состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f – такая функция n переменных, что $f(0,\dots,0) = 0$ и все ее производные (в том числе и смешанные) неотрицательны, а $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – такой вектор неотрицательных неатомических мер, что каждая из мер λ_i абсолютно непрерывна относительно неатомической меры μ. Тогда мера ν, порождаемая характеристической функцией $v = f \circ \lambda$, неотрицательна на алгебре A.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f – такой полином от n переменных, что $f(0,\dots,0) = 0$, а $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – такой вектор неатомических мер, что каждая из мер λ_i^+ и λ_i^- ($\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-, \lambda_i^+ \geq 0, \lambda_i^- \geq 0$) абсолютно непрерывна относительно неотрицательной неатомической меры μ. Тогда характеристическая функция $v = f \circ \lambda$ порождает чисто конечно-аддитивную меру ν на алгебре A.*

2. В этом пункте будут сформулированы и доказаны вспомогательные результаты, представляющие и самостоятельный интерес.

---

*) О важной роли функций вида $f \circ \lambda$ в изучении дележей Шепли см. в [2].

ЛЕММА I. При натуральных $r \le k \le n$ справедливо тождество ($x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$):

$$\Big(\sum x_i\Big)^r=\sum (x_{i_1}+\dots+x_{i_k})^r-\binom{n-k}{1}\sum (x_{i_1}+\dots+x_{i_{k-1}})^r+\dots$$

$$\dots+(-1)^j\binom{n-k+j-1}{j}\sum (x_{i_1}+\dots+x_{i_{k-j}})^r+\dots+(-1)^{k-1}\binom{n-2}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\ , \qquad (I)$$

где $\sum(x_{i_1}+\dots+x_{i_\ell})$ обозначает сумму по всем различным наборам по ℓ элементов из множества $\{1,2,\dots,n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что коэффициент при

$$x_1^{r_1}\cdot x_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot x_j^{r_j},\ j\le r,\ \sum_{i=1}^{j} r_i=r,\ r_i>0,$$

в левой части доказываемого тождества равен

$$\frac{r!}{r_1!\dots r_j!}\ ,$$

а в правой -

$$\frac{r!}{r_1!\dots r_j!}\left[\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^i\binom{n-k-1+i}{i}\binom{n-j}{k-j-i}\right].$$

В силу [3, тождество 4, с.18] выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $\binom{k-j}{k-j}=1$. Таким образом, коэффициенты при $x_1^{r_1}\cdot x_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot x_j^{r_j}$ в левой и правой частях равенства (I) совпадают. Ввиду симметрии доказываемого тождества коэффициенты при каждом из произведений чисел $x_1\dots x_n$ в левой части равенства равны соответствующим коэффициентам в правой. Это доказывает тождество (I).

Пусть λ - некоторая мера, абсолютно непрерывная относительно μ, а f - вещественная функция одного переменного (определенная на области значений λ). Рассмотрим элемент $s\in\Omega$ такой, что $s=s_1+s_2+\dots+s_n$ ж). Обозначим через x_i λ-меру какого-нибудь представителя класса s_i. Очевидно, x_i не зависит от выбора этого представителя. Положим $a= =\bigcup\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_k}}$, где объединение берется по всем суммам по k

ж) Здесь и далее используются обозначения из [1].

различных элементов из множества $\{s_1,\dots,s_n\}$.

ЛЕММА 2. Если ν — мера, порожденная характеристической функцией $v = f\circ\lambda$ на алгебре A, то

$$\nu(a)=\sum f(x_{i_1}+\dots+x_{i_k}) - \binom{n-k}{1}\sum f(x_{i_1}+\dots+x_{i_{k-1}}) + \dots$$

$$\dots+(-1)^j\binom{n-k+j-1}{j}\sum f(x_{i_1}+\dots+x_{i_{k-j}}) + \dots + (-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (2)$$

где $\sum f(x_{i_1}+\dots+x_{i_\ell})$ обозначает сумму по всем различным наборам по ℓ элементов множества $\{1,\dots,n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем множества вида $\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_k}}$ числами от единицы до $N=\binom{n}{k}$. Тогда

$$\nu(a)=\sum_{i=1}^{N}\nu(\Omega)-\sum\nu(\Omega_i\cap\Omega_j)+\dots$$

$$\dots+(-1)^{N-1}\nu\Big(\bigcap_{i=1}^{N}\Omega_i\Big). \qquad (3)$$

Пусть R_j^r — количество наборов по r элементов из множества $\{\Omega_i\}_1^N$, пересечение которых равно $\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_{k-j}}}$, $j\le k$. В силу того, что $\nu(\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_\ell}}) = f(x_{i_1}+\dots+x_{i_\ell})$, и формулы (3) получим

$$\nu(a)=\sum f(x_{i_1}+x_{i_k}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1} f(x_{i_1}+\dots+x_{i_{k-j}})\sum_{r=2}^{M_j}(-1)^{r-1}R_j^r, \qquad (4)$$

где $M_j=\binom{n-k+j}{j}$ — количество множеств вида $\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_k}'}$, которые содержат фиксированное множество $\Omega_{s_{i_1}+\dots+s_{i_{k-j}}}$. Заметим, что

$$R_j^2=\frac{1}{2}\binom{n-k+j}{j}\binom{n-k}{j}, \qquad (5)$$

а при $r\geqslant 3$ справедливо равенство

$$R_j^r = \binom{M_j}{r} - \sum_{q=1}^{j-1} \binom{n-k+j}{q} R_{j-q}^r . \tag{6}$$

Вследствие этого

$$\sum_{r=2}^{M_j} (-1)^{r-1} R_j^r = -\frac{1}{2}\binom{n-k+j}{j}\binom{n-k}{j} +$$

$$+\sum_{r=3}^{M_j} (-1)^{r-1}\left[\binom{M_j}{r} - \sum_{q=1}^{j-1}\binom{n-k+j}{q} R_{j-q}^r\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\binom{n-k+j}{j}\binom{n-k}{j} + \sum_{r=3}^{M_j}(-1)^{r-1}\binom{M_j}{r} - \sum_{q=1}^{j-1}\binom{n-k+j}{q}\sum_{r=3}^{M_j}(-1)^{r-1} R_{j-q}^r . \tag{7}$$

В силу формулы (4) для доказательства равенства (2) достаточно установить справедливость следующего тождества:

$$\sum_{r=2}^{M_j}(-1)^{r-1} R_j^r = (-1)^j \binom{n-k+j-1}{j} . \tag{8}$$

При $j=1$ вследствие формул (5) и (6) левая часть соотношения (8) равна

$$-\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k) + \sum_{r=3}^{n-k+1}(-1)\binom{n-k+1}{r} = -(n-k) .$$

Но $-(n-k) = (-1)^1\binom{n-k+1-1}{1}$, и равенство (8) справедливо. Далее будем доказывать его по индукции.

Пусть равенство (8) справедливо при всех $j<\ell$. Докажем его для $j=\ell$. Из формулы (7) и индукционного предположения следует, что

$$\sum_{r=2}^{M_\ell}(-1)^{r-1} R_\ell^r = -\frac{1}{2}\binom{n-k+\ell}{\ell}\binom{n-k}{\ell} +$$

$$+\sum_{r=3}^{M_\ell}(-1)^{r-1}\binom{M_\ell}{r} - \sum_{q=1}^{\ell-1}\binom{n-k+\ell}{q}\sum_{r=3}^{M_\ell}(-1)^{r-1} R_{\ell-q}^r =$$

$$= -\frac{1}{2}\binom{n-k+\ell}{\ell}\binom{n-k}{\ell} + 1 - \binom{M_\ell}{1} + \binom{M_\ell}{2} -$$

$$-\sum_{q=1}^{\ell-1}\binom{n-k+\ell}{q}\left[\frac{1}{2}\binom{n-k+\ell-q}{\ell-q}\binom{n-k}{\ell-q} + (-1)^{\ell-q}\binom{n-k+\ell-q-1}{\ell-q}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\binom{n-k+\ell}{\ell}\binom{n-k}{\ell} + 1 - \binom{n-k+\ell}{\ell} + \frac{1}{2}\binom{n-k+\ell}{\ell}\left[\binom{n-k+\ell}{\ell} - 1\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\binom{n-k+\ell}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell-1}\binom{\ell}{q}\binom{n-k}{\ell-q}-(-1)^{\ell}\sum_{q=1}^{\ell-1}(-1)^{q}\binom{n-k+\ell}{q}\binom{n-k+\ell-q-1}{\ell-q}.$$

Подставляя в последнее выражение вместо величин

$$\sum_{q=1}^{\ell-1}\binom{\ell}{q}\binom{n-k}{\ell-q} \qquad \text{и} \qquad \sum_{q=1}^{\ell-1}(-1)^{q}\binom{n-k+\ell}{q}\binom{n-k+\ell-q-1}{\ell-q}$$

равные им величины $\binom{n-k+\ell}{\ell}-\binom{n-k}{\ell}-1$ и $(-1)^{\ell}-\binom{n-k+\ell-1}{\ell}-$ $-(-1)^{\ell}\binom{n-k+\ell}{\ell}$ (см. [3], формулы 3а и 5, с.18) и уничтожая члены с противоположными знаками, получим, что это выражение равно $(-1)^{\ell}\binom{n-k+\ell-1}{\ell}$. Этим доказательство равенства (8) завершено. Тем самым лемма доказана.

Пусть $M=\{1,2,\ldots,m\}$, $N=\{1,2,\ldots,n\}$, $x=\{x_t^i\}\in R^{n\cdot 2^m}$ ($t\subset M$, $i\in N$) - вектор размерности $n\cdot 2^m$, а $x_t=$ $=(x_t^1,\ldots,x_t^n)$ - вектор размерности n . Положим

$$y_s(x)=\sum_{M\supset t\supset s} x_t. \tag{9}$$

Далее определим отображение пространства $R^{n\cdot 2^m}$ в R^1 следующим образом:

$$x \longrightarrow F^M(x,f)=\sum_{s\subset M}(-1)^{|s|}f(y_s(x)), \tag{10}$$

где f - некоторая функция от n переменных. Частную производную функции f по i-й переменной будем обозначать через f_i' .

ЛЕММА 3. Если f - неотрицательная функция, у которой частные производные любого порядка (в том числе и смешанные) неотрицательны на R_+^n, то отображение, определяемое формулой (10), переводит неотрицательный ортант $R^{n\cdot 2^m}$ в некоторое подмножество неотрицательной полуоси R_+^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m=0$ утверждение леммы следует из неотрицательности функции f . Для $m=1$ справедливость леммы можно легко установить из неотрицательности первых частных производных функции f . Далее доказательство будет проводиться по индукции. Предположим, что лемма справедлива при всех $m\leq\ell$. Докажем ее для $m=\ell+1$.

Вследствие предположения индукции

$$F^M(x,f)\geqslant 0,\ F^M(x,f_i')\geqslant 0,\ x\in R_+^{n\cdot 2^m},$$
$$|M|=m\leqslant \ell,\quad i\in N, \tag{II}$$

так как все функции f_i' , $i\in N$, удовлетворяют условиям леммы.

Покажем, что частная производная функции $F^M(x,f)$ по любой координате $x_{t_0}^i$ неотрицательна на $R_+^{n\cdot 2m}$. Действительно,

$$F^M(x,f)=\sum_{s\subset M}(-1)^{|s|}f(y_s(x))=\sum_{s\subset M}f\Big(\sum_{t\subset s}x_t\Big);$$
$$\frac{\partial F(x,f)}{\partial x_{t_0}^i}=\sum_{s\subset t_0}(-1)^{|s|}f_i'\Big(\sum_{M\supset t\supset s}x_t\Big).$$

Учитывая, что

$$\sum_{M\supset t\supset s}x_t=\sum_{t_0\supset t\supset s}\ \sum_{t_2\subset M\setminus t_0}x_{t\cup t_2}=\sum_{t_0\supset t_0\supset s}z_t,$$

получим (см. формулы (9) и (10))

$$\frac{\partial F^M(x,t)}{\partial x_{t_0}^i}=\sum_{s\subset t_0}(-1)^{|s|}f_i'\Big(\sum_{t_0\supset t\supset s}z_t\Big)=F^{t_0}(z,f_i')\geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу предположения индукции (неравенство (II)).Таким образом, частные производные функции $F^M(x,f)$ по каждой из переменных неотрицательны, $|M|=m\leqslant$ $\leqslant \ell$. Положим далее

$$\gamma_t=x_{t\cup j},\ t\subset L,\ |L|=\ell,\ j\notin L,$$
$$\beta_t=\gamma_t+x_t,\ t\subset L.$$

Так как частные производные по каждой из переменных функции $F^L(x,f)$ неотрицательны, справедливо неравенство

$$F^L(\gamma,f)\leqslant F^L(\beta,f). \tag{I2}$$

С другой стороны,

$$F^{L}(\beta,f)-F^{L}(\gamma,f)=F^{L\cup j}(x,f). \tag{13}$$

Действительно, левая часть равенства (13) равна

$$\sum_{s\subset L}(-1)^{|S|}f\Big(\sum_{L\supset t\supset s}x_t+x_{t\cup j}\Big)-\sum_{s\subset L}(-1)^{|S|}f\Big(\sum_{L\supset t\supset s}x_{t\cup j}\Big)=$$

$$=\sum_{s\subset L}(-1)^{|S|}f\Big(\sum_{L\supset t\supset s}x_t\Big)+\sum_{s\subset L\cup j}(-1)^{|S|}f\Big(\sum_{L\cup j\supset t\supset s}x_t\Big)=$$

$$=\sum_{s\subset L\cup j}(-1)^{|S|}f\Big(\sum_{L\cup j\supset t\supset s}x_t\Big)=F^{L\cup j}(x,f).$$

Таким образом, равенство (13) справедливо. Теперь из этого равенства и неравенства (12) следует утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Характеристическая функция σ называется ∞-выпуклой, если для любого целого $m\geqslant 0$ и любых множеств $S_0,S_1,\dots,S_m\in\Omega$, $S_0\geqslant\sum_{i=1}^{m}S_i$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&\sigma(S_0)-\sum\sigma(S_i)+\sum_{i>j}\sigma(S_i\cap S_j)-\dots\\ &\dots+(-1)^{m-1}\sigma\Big(\bigcap_{i=1}^{m}S_i\Big)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{14}$$

ЛЕММА 4. Мера ν, порожденная ∞-выпуклой функцией, неотрицательна на алгебре A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 работы [1] индикаторная функция χ_a любого элемента $a\in A$ представима в виде

$$\chi_a=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\chi_{b_i},\ b_{i+1}\subset b_i, \tag{15}$$

где b_i - правильные элементы алгебры A, т.е.

$$\begin{aligned}&\chi_{b_i}=\sum_{r=1}^{k_i}\chi_{\Omega_{S_r^i}}-\sum_{\ell>r}\chi_{\Omega_{S_r^i\cdot S_\ell^i}}+\dots\\ &\dots+(-1)^{k_i-1}\chi_{\Omega_{S_1^i\dots S_{k_i}^i}},\quad S_i\in\Omega.\end{aligned} \tag{16}$$

Так как (следствие равенства (15))

$$\nu(a)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\nu(b_i),$$

для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\nu(b) - \nu(c) \geq 0,$$

если $b \supset c$, а b и c – правильные элементы алгебры A . Пусть

$$\chi_b = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\Omega_{s_j}} - \sum_{\ell < j} \chi_{\Omega_{s_j \cdot s_\ell}} + \ldots + (-1)^{k-1} \chi_{\Omega_{s_1 \cdot \ldots \cdot s_k}}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что

$$\chi_c = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\Omega_{t_j}} - \sum_{j > \ell} \chi_{\Omega_{t_j \cdot t_\ell}} + \ldots + (-1)^{k-1} \chi_{\Omega_{t_1 \cdot \ldots \cdot t_k}},$$

$$t_j \subset s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

(Некоторые t_j можно считать пустыми множествами, а некоторые s_j – повторяющимися.)

Положим

$$q_i^j = \begin{cases} s_i \cdot s_j, & i < j; \\ t_i \cdot s_j, & i \geq j. \end{cases}$$

Тогда, очевидно,

$$s_j \supset \sum_{i=1}^{k} q_i^j,$$

и вследствие ∞-выпуклости функции υ выполняются неравенства

$$\upsilon(s_j) \geq \sum_{i=1}^{k} \upsilon(q_i^j) - \sum_{i > \ell} \upsilon(q_i^j \cdot q_\ell^j) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1} \upsilon\left(\prod_{i=1}^{k} q_i^j\right), \; j = 1, \ldots, k. \qquad (17)$$

Можно заметить, что при суммировании неравенств (17) после уничтожения в правой части членов с противоположными знаками получим неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} \upsilon(s_j) \geq \sum_{i > \ell} \upsilon(s_i \cdot s_\ell) - \ldots + (-1)^{k-2} \upsilon(s_1 \cdot \ldots \cdot s_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \upsilon(t_i) - \sum_{i > \ell} \upsilon(t_i \cdot t_\ell) + \ldots + (-1)^{k-1} \upsilon(t_1 \cdot \ldots \cdot t_k).$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\nu(b) - \nu(c) \geq 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Покажем, что функция $v=f\circ\lambda$ в условиях теоремы I является ∞-выпуклой, т.е. что

$$v(s_0)-\sum_{i=1}^{m}v(s_i)+\sum_{i>j}v(s_i\cdot s_j)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k v(s_1\cdot\ldots\cdot s_m)\geq 0 \qquad (18)$$

для любого m и любых $s_0, s_1,\ldots, s_m, s_0\supset\sum_{i=1}^{m}s_i$. Неравенство (I8) эквивалентно условию ∞-выпуклости. Положим

$$x_t=\lambda\Bigl(\prod_{i\in t}s_i\setminus\sum_{j\in M\setminus t}s_j\Bigr), t\subset M=\{1,\ldots,m\}, t\neq\emptyset;$$
$$x_0=\lambda\Bigl(s_0\setminus\sum_{i=1}^{m}s_i\Bigr)$$

(все равенства векторные). Тогда

$$\lambda\Bigl(\prod_{i\in s}s_i\Bigr)=\sum_{M\subset t\subset s}x_t,\ s\neq\emptyset;$$

$$\lambda(s_0)=x_0+\sum_{t\subset M}x_t.$$

Таким образом, левая часть неравенства (I8) в точности равна $F^M(x,f)$. Так как $x\in R_+^{n2^m}$, в силу леммы 3 величина $F^M(x,t)$ неотрицательна. Следовательно, функция $f\circ\lambda$ является ∞-выпуклой. Теперь применение леммы 4 завершает доказательство теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция f и мера λ удовлетворяют условиям теоремы I, то норма функции $v=f\circ\lambda$ конечна и равна $f\circ\lambda(S_X)$, где S_X - класс, представителем которого является множество X - носитель меры μ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что элемент алгебры Ω_{S_X} содержит любой элемент $a\in A$. Вследствие неотрицательности меры ν на A норма характеристической функции v будет равна $f\circ\lambda(S_X)$ (см. определение нормы в работе [I]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Не ограничивая общности, векторную меру λ можно считать неотрицательной; в противном случае, заменяя λ на $\lambda^+-\lambda^-$ и возводя в соответствующие степени, получим некоторый другой полином f_1 (с большим числом

переменных) такой, что

$$\mathcal{V}(S)=f\circ\lambda(S)=f_1\circ\lambda^1(S)$$

для любого $S\in\Omega$. В силу предложения 7.2 монографии [2] функцию $f\circ\lambda$ можно представить в виде линейной комбинации целых положительных степеней неотрицательных мер. Так как дележ Шепли линейной комбинации характеристических функций равен линейной комбинации дележей, а линейная комбинация чисто конечно-аддитивных мер является чисто конечно-аддитивной мерой, достаточно доказать теорему 2 для $f\circ\lambda=\lambda^\ell$, где ℓ - натуральное число, $f=x^\ell$, а λ - неотрицательная мера.

В работе [I](следствие теоремы I) было доказано, что каждая характеристическая функция $\mathcal{V}$ с конечной нормой единственным образом представима в виде $\mathcal{V}=\mathcal{V}_p+\mathcal{V}_c$, где характеристические функции $\mathcal{V}_p$ и $\mathcal{V}_c$ соответственно порождают на A чисто конечно-аддитивную меру ν_p и счетно-аддитивную меру ν_c, причем

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_p(S)=\sup_{\{a_n\}}\lim_{n\to\infty}\nu(a_n);\\ a_n\in\Omega_S,\ a_{n+1}\subset a_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}a_n=\phi,\end{gathered}\tag{I9}$$

где ν - мера, порожденная на A характеристической функцией $\mathcal{V}$.

Отметим, что $\mathcal{V}=f\circ\lambda$ имеет конечную норму, так как $\|{-a}\lambda^\ell\|=|a|\,\|\lambda^\ell\|$, функция x^ℓ удовлетворяет условиям теоремы I и согласно следствию к этой теореме имеет конечную норму.

Пусть далее $K\geqslant\ell,\ n>K$. Вычислим значение $\mathcal{V}_p(S)$ для некоторого S. Для этого построим исчезающую последовательность $\{a_n\}$. Положим a_1 равным элементу a, который построен перед формулировкой леммы 2. Меру множества S_i обозначим через x_i. Если построен элемент алгебры

$$a_{n-1}=\bigcup\Omega_{S^{n-1}_{i_1}+\ldots+S^{n-1}_{i_K}},$$

где

$$\lambda(S^{n-1}_i)=x^{n-1}_i,\quad S=\sum_i S^{n-1}_i,\quad \lambda(S)=\sum x^{n-1}_i,$$

то элемент a_n строится следующим образом. Каждый из элементов S^{n-1}_i разбивается на два: $S^{n-1}_i=S^n_{i_1}+S^n_{i_2}$ и a_n пола-

гается равным $\bigcup \Omega_{s^n_{i_1}+\ldots+s^n_{i_k}}$, где объединение берется по всевозможным наборам по k элементов из множества $\{s^n_i\}$. Очевидно, что $a_n \subset a_{n-1}$, и если $\lim\limits_{n\to\infty} x^n_i = 0$, чего легко добиться, так как мера λ неатомическая, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset$.

Применяя теперь лемму 2 к элементу алгебры a_n , а затем лемму I, получим $v(S) = (\lambda(S))^\ell = \nu(a_n)$. Так как функция λ^ℓ удовлетворяет условиям теоремы I, величина $v(S) = \nu(\Omega_s)$ является максимальным значением меры ν на элементах алгебры A , содержащихся в Ω_s. Поэтому, принимая во внимание формулы (I9), получим $v(S) = v_\rho(S)$. Теорема доказана.

Литература

I. Дюбин Г.Н. О существовании значения по Шепли// Оптимизация. - 1988. - Вып.43(60). - С.102-118.
2. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. - М.: Мир, 1977.
3. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. - М.: Наука, 1982.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.01.1988 г.