Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Численные методы оптимизации

УДК 519.8

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

В.В.Калашников

В этой работе приводятся более слабые, чем, например, в [1], достаточные условия существования решения в нелинейной задаче дополнительности, зависящей от параметров: для произвольного набора $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in R^m$ найти точку $x \in R^n$ такую, чтобы были выполнены соотношения

$$x \geq 0, \; f(x,u) \geq 0, \; x^T \cdot f(x,u) = 0. \qquad (1)$$

Здесь и далее $f : R^n \times R^m \to R^n$ - непрерывное по $x \in R^n$ отображение.

1. Недифференцируемый случай

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f : R^n \times R^m \longrightarrow R^n$ называется локально сильно монотонным по первым n переменным (по $x \in R^n$) если определена (невозрастающая по первой переменной t) функция $\beta : R^1_+ \times R^m \to R^1_+$ такая, что $\beta(t,u) > 0$ при всех $t > 0$ и $u \in R^m$ и для любых x, y из шара

$$S_t(0) = \{ z \in R^n : \|z\|_{R^n} \leq t \}$$

выполнено неравенство

$$(f(x,u) - f(y,u), x-y)_{R^n} \geq \beta(t,u) \cdot \|x-y\|^2_{R^n} \qquad (2)$$

для любых $u \in R^m$.

Понятно, что локально сильно монотонное отображение является строго монотонным по соответствующим переменным.

ТЕОРЕМА I. Если отображение $f: R^n \times R^m \to R^n$ непрерывно по x при каждом u и локально сильно монотонно по первым n переменным, а функция $\beta(t,u)$ обладает свойством

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(t,u) \cdot t = +\infty \quad \text{при любом } u \in R^m, \tag{3}$$

то решение задачи (I) существует и единственно при всех u. Если при этом $f(x,u)$ непрерывно по совокупности переменных и предельное равенство (3) выполняется равномерно по u, то решение $x_*(u)$ задачи (I) непрерывно зависит от u.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено индукцией по числу переменных n.

БАЗА ИНДУКЦИИ ($n=1$). Зафиксируем произвольный набор параметров $u=(u_1,u_2,\dots,u_m) \in R^m$ и покажем, что существует единственное решение $x_*(u) \in R^1_+$ одномерной задачи о дополнительности: найти $x \in R^1$ такой, что

$$x \geq 0, \ f(x,u) \geq 0, \ x \cdot f(x,u) = 0. \tag{4}$$

В самом деле, если $f(0,u) \geq 0$, то $x_*(u) = 0$. Пусть теперь $f(0,u) < 0$. Из локальной сильной монотонности отображения f по x имеем

$$y \cdot [f(y,u) - f(0,u)] \geq \beta(y,u) \cdot y^2$$

для всех $y \geq 0$. Значит, для любых $y > 0$ справедливо соотношение

$$f(y,u) \geq f(0,u) + \beta(y,u) \cdot y.$$

Тогда в силу непрерывности функции f по x и свойства (3) найдется единственное значение

$$0 < y_* \leq \inf\{y > 0 : \beta(y,u) \cdot y \geq -f(0,u)\} \tag{5}$$

такое, что $f(y_*,u) = 0$. Это означает, что y_* - решение задачи (4), т.е. $x_*(u) = y_*$.

Теперь докажем, что если f непрерывное по (x,u) и предельное равенство (3) выполнено равномерно по u, то отображение $x_*: R^m \to R^1_+$ непрерывно по u. В самом деле,

пусть последовательность $\{u_k\}$ точек из R^m сходится к точке $u \in R^m$. Тогда, во-первых, последовательность $\{x_*(u_k)\}$ ограничена в силу (5), ограниченности последовательности $\{-f(0,u_k)\}$ и равномерности по u предельного равенства (3). Пусть, далее, $w \in R^1_+$ – произвольная предельная точка последовательности $\{x_*(u_k)\}$, а $\{x_*(u_{k_m})\}_{m=1}^{\infty}$ – сходящаяся к ней подпоследовательность. Так как отображение f непрерывно по совокупности переменных и параметров, то

$$f(w,u) = \lim_{m\to\infty} f(x_*(u_{k_m}), u_{k_m}) \geq 0,$$

$$w \cdot f(w,u) = \lim_{m\to\infty} f(x_*(u_{k_m}), u_{k_m}) \cdot x_*(u_{k_m}) = 0.$$

Следовательно, $w \in R^1_+$ – решение задачи (4) для набора параметров u, т.е. $x_*(u) = w$. Из единственности решения задачи (4) вытекает единственность предельной точки последовательности $\{x_*(u_k)\}$, т.е. непрерывность отображения $x_*: R^m \to R^1_+$.

ИНДУКЦИОННЫЙ ШАГ ($n \geq 2$). По имеющемуся отображению $f: R^n \times R^m \to R^n$ построим отображение $\bar{f}: R^{n-1} \times R^{m+1} \to R^{n-1}$, отнеся переменную x_n к числу параметров и оставив лишь первые $n-1$ компонент исходного отображения:

$$\bar{f}_i(\bar{x}, x_n, u) = f_i(x,u), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^T \in R^{n-1}$. Легко проверить, что $\bar{f}$ как отображение, зависящее от $n-1$ переменной и $m+1$ параметра, удовлетворяет условию теоремы, т.е. является локально сильно монотонным. В самом деле, зафиксируем произвольный набор параметров $v = (x_n, u) \in R^{m+1}$. Тогда для любых векторов $\bar{x}, \bar{y}$ из шара $\bar{S}_{\bar{t}}(\bar{0}) = \{\bar{z} \in R^{n-1}: \|\bar{z}\| \leq \bar{t}\}$ в силу локальной сильной монотонности f имеют место соотношения

$$(\bar{f}(\bar{x}, x_n, u) - \bar{f}(\bar{y}, x_n, u), \bar{x} - \bar{y})_{R^{n-1}} =$$

$$= (f(x,u) - f(y,u), x-y)_{R^n} \geq \beta(t,u) \cdot \|x-y\|^2_{R^n} =$$

$$= \beta(t,u) \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\|^2_{R^{n-1}},$$

где $x = (\bar{x}^T, x_n)^T$, $y = (\bar{y}^T, x_n)^T$, а $t = \sqrt{\bar{t}^2 + x_n^2}$. Таким образом, для всяких $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{S}_{\bar{t}}(\bar{0})$ справедливо неравенство

$$(\bar f(\bar x,v)-\bar f(\bar y,v),\bar x-\bar y)_{R^{n-1}} \geqslant \bar\beta(\bar t,v)\cdot\|\bar x-\bar y\|^2_{R^{n-1}},$$

где функция $\bar\beta : R^1_+ \times R^{m+1} \longrightarrow R^1_+$ определяется по формуле

$$\bar\beta(\bar t,v) = \beta(\sqrt{\bar t^2+x_n^2},\ u).$$

Наконец,

$$\lim_{\bar t\to+\infty} \bar\beta(\bar t,v)\cdot\bar t = \lim_{t\to+\infty} \beta(t,u)\cdot\sqrt{t^2-x_n^2} =$$

$$=\lim_{t\to+\infty} [\beta(t,u)\cdot t]\cdot\frac{\sqrt{t^2-x_n^2}}{t} = +\infty, \qquad (7)$$

причем предельное равенство (7) выполняется равномерно по v, если предельное равенство (3) выполнено равномерно по v, а величина $v_1 = x_n$ принимает значение в ограниченном отрезке не вещественной полуоси R^1_+.

Зафиксируем произвольный набор параметров $u=(u_1,\ldots,u_m)' \in R^m$ и положим $v=(0,u^T)^T\in R^{m+1}$. Если f непрерывно по $x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in R^n$, то $\bar f$, очевидно, непрерывно по переменным $\bar x=(x_1,\ldots,x_{n-1})^T\in R^{n-1}$. Тогда по индукционному предположению существует единственное решение нелинейной задачи о дополнительности: найти $\bar x_* = \bar x_*(v)\in R^{n-1}$ такое, что

$$\bar x_*\geqslant 0,\ \bar f(\bar x_*,v)\geqslant 0,\ \bar x_*^T\cdot\bar f(x_*,v)=0. \qquad (9)$$

Рассмотрим точку $\tilde x=\tilde x(0,u)=(\bar x_*(0,u)^T,0)^T\in R^n_+$. Если $f_n(\tilde x,u)=f_n(\bar x_*(0,u),0,u)\geqslant 0$, то точка $\tilde x$ является решением задачи (I), т.е.

$$x_*=x_*(u)=(\bar x_*(0,u)^T,0)^T. \qquad (10)$$

Пусть теперь

$$f_n(\tilde x,u)=f_n(\bar x_*(0,u),0,u)<0.$$

Из локальной сильной монотонности отображения f для любого $y\geqslant 0$ имеем неравенство

$$[\bar x_*(y,u)-\bar x_*(0,u)]^T\cdot[\bar f(\bar x_*(y,u),y,u)-$$

$$-\bar f(\bar x_*(0,u),0,u)]+y\cdot[f_n(\bar x_*(y,u),y,u)-$$

$$-f_n(\bar x_*(0,u),0,u)]\geqslant$$

$$\geqslant\beta(t(y),u)\cdot[\|\bar x_*(y,u)-\bar x_*(0,u)\|^2_{R^{n-1}}+y^2], \qquad (11)$$

где $\bar{x}_*(y,u)$ – однозначно определенное (по индукционному предположению) решение задачи (9) при $v=(y,u^T)^T\in R^{m+1}$, а

$$t(y)=max\left\{\sqrt{\|\bar{x}_*(y,u)\|^2_{R^{n-1}}+y^2},\ \ \|\bar{x}_*(0,u)\|_{R^{n-1}}\right\}. \tag{12}$$

Далее, так как $\bar{x}_*(y,u)$ и $\bar{x}_*(0,u)$ – решения задачи (9), то справедливы соотношения

$$\bar{x}_*(y,u)^T\cdot\bar{f}(\bar{x}_*(y,u),y,u)=0,$$
$$\bar{x}_*(0,u)^T\cdot\bar{f}(\bar{x}_*(0,u),0,u)=0,$$
$$\bar{x}_*(0,u)^T\cdot\bar{f}(\bar{x}_*(y,u),y,u)\geq 0,$$
$$\bar{x}_*(y,u)^T\cdot\bar{f}(\bar{x}_*(0,u),0,u)\geq 0,$$

которые позволяют вывести из (11) неравенство

$$y\cdot[f_n(\bar{x}_*(y,u),y,u)-f_n(\bar{x}_*(0,u),0,u)]\geq$$
$$\geq\beta(t(y),u)\cdot[\|\bar{x}_*(y,u)-\bar{x}_*(0,u)\|^2_{R^{n-1}}+y^2], \tag{13}$$

где $y\geq 0$, а $t(y)$ определено по формуле (12). Понятно, что $t(y)\geq y$ при любых $y\geq 0$, и

$$t(y)=\sqrt{\|\bar{x}_*(y,u)\|^2_{R^{n-1}}+y^2}=\|\tilde{x}(y,u)\|_{R^n}$$

для достаточно больших $y>0$; здесь $\tilde{x}(y,u)=(\bar{x}_*(y,u)^T,y)^T\in R^n_+$. Отсюда вытекает, что $t(y)\longrightarrow+\infty$ при $y\longrightarrow+\infty$, и

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\|\tilde{x}(y,u)-\tilde{x}(0,u)\|^2_{R^n}}{\|\tilde{x}(y,u)\|^2_{R^n}}=1. \tag{14}$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to+\infty}\beta(t(y),u)\cdot\frac{\|\bar{x}_*(y,u)-\bar{x}_*(0,u)\|^2_{R^{n-1}}+y^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}[\beta(t(y),u)\cdot t(y)]\cdot\frac{\|\tilde{x}(y,u)-\tilde{x}(0,u)\|^2_{R^n}}{\|\tilde{x}(y,u)\|^2_{R^n}}\cdot\frac{t(y)}{y}\geq$$

$$\geq\lim_{y\to+\infty}[\beta(t(y),u)\cdot t(y)]\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{\|\tilde{x}(y,u)-\tilde{x}(0,u)\|^2_{R^n}}{\|\tilde{x}(y,u)\|^2_{R^n}}= \tag{15}$$
$$=+\infty.$$

Очевидно, что из (I3) и (I5) вытекает существование величины

$$0 < y_* \le \inf\{y > 0 : \beta(t(y),u)\cdot[y + \\ + \frac{\|\bar{x}_*(y,u) - \bar{x}_*(0,u)\|^2_{R^{n-1}}}{y}] \ge -f(\bar{x}_*(0,u),0,u)\} \qquad (I6)$$

такой, что

$$f_n(\bar{x}_*(y_*,u), y_*, u) = 0.$$

Но в этом случае точка

$$x_*(u) = (\bar{x}_*(y_*,u)^T, y_*)^T \in R^n_+ \qquad (I7)$$

является решением задачи (I).

Таким образом, существование решения задачи (I) для любого $u \in R^m$ доказано. Его единственность следует из строгой монотонности отображения $f: R^n \times R^m \to R^n$ по первым n переменным.

Для завершения индукционного шага покажем, что если f непрерывно по совокупности переменных и параметров и предельное равенство (3) выполнено равномерно по u, то отображение $x_*: R^m \to R^n_+$ непрерывно относительно параметров $u = (u_1,\dots,u_m)^T$. В самом деле, пусть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из R^m сходится к точке $u \in R^m$. Тогда ограничена последовательность точек $\{\bar{x}_*(0,u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ в силу непрерывности (по индукционному предположению) отображения $\bar{x}_*: R^{m+1} \to R^{n-1}_+$ при зафиксированной первой координате $v_1 = x_n = 0$. Отсюда и из (I5) следует, что предельное равенство

$$\lim_{y\to+\infty} \beta(t(y),u_k)\cdot\left[\frac{\|\bar{x}_*(y,u_k) - \bar{x}_*(0,u_k)\|^2_{R^{n-1}}}{y} + y\right] = +\infty$$

выполнено равномерно по $k = 1,2,\dots,$ а значит, из непрерывности функции f_n и соотношения (I6) можно сделать вывод об ограниченности последовательности значений $\{y_*^k = y_*(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$.
В этом случае можно снова воспользоваться индукционным предположением и сделать вывод о непрерывности отображения $\bar{x}_*$: $R^{m+1} \to R^{n-1}_+$ относительно переменной $y_*(0 \le y_* \le \sup y_*^k)$ и параметров $u \in R^m$. Из всего сказанного и из (I0) и (I7) вытекает ограниченность последовательности точек $\{x_*(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть, далее, $w \in R^n_+$ – произвольная предельная точка

последовательности $\{x_*(u_k)\}$, а

$\{x_*(u_{k_m})\}_{m=1}^{\infty}$ – сходящаяся к ней подпоследовательность. Так как отображение f непрерывно по совокупности переменных и параметров, то

$$f(w,u) = \lim_{m\to\infty} f(x_*(u_{k_m}), u_{k_m}) = 0,$$

$$w^T f(w,u) = \lim_{m\to\infty} x_*(u_{k_m})^T \cdot f(x_*(u_{k_m}), u_{k_m}) = 0.$$

Следовательно, $w \in R^n_+$ – решение задачи (I) для набора параметров u , т.е. $w = x_*(u)$. Из единственности решения задачи (I) вытекает единственность предельной точки последовательности $\{x_*(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. непрерывность отображения $x_* : R^m \to R^n_+$. Индукционный шаг завершен. В силу принципа математической индукции, теорема доказана.

2. Дифференцируемый случай

Простым следствием теоремы I является

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение $f : R^n \times R^m \to R^n$ непрерывно дифференцируемо по первым переменным. Если для всякого $x \in R^n_+$ и любого $u \in R^m$ все собственные значения симметричной матрицы Якоби $f_x(x,u)$ ограничены снизу числом $\beta(\|x\|, u)$, где $\beta : R^1_+ \times R^m \to R^1_+$ – невозрастающая (для любого фиксированного $u \in R^m$) положительная функция, обладающая свойством (3), то для любого набора параметров $u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in R^m$ существует единственная точка $x_* = x_*(u) \in R^n$ такая, что

$$x_* \geq 0, \; f(x_*, u) \geq 0, \quad \text{и} \quad x_*^T \cdot f(x_*, u) = 0.$$

Если, к тому же, отображение f непрерывно по совокупности переменных и параметров (x,u) и предельное равенство (3) выполнено равномерно по u , то отображе-

ние $x_*: R^m \to R^n_+$ непрерывно относительно $u \in R^m$.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий теорему I.

ПРИМЕР. Пусть $f: R^1 \times R^1 \to R^1$ имеет вид $f(x,u) = \sqrt{|x|} + u$. Если $u \geq 0$, то $x_*(u) = 0$. Если же $u < 0$, то $x_*(u) = u^2 > 0$. Заметим, что при этом отображение f не является сильно монотонным. Оно локально сильно монотонно: в качестве $\beta(t,u)$ можно взять функцию $\beta(t) = t^{-1/2}$, обладающую свойством (3).

Литература

I. Karamardian S. The nonlinear complementarity problem with applications. Part I// J. Optim. Theory and Appl. - 1969. - V. 4, N 2. - P.87-92.

Поступила в ред.-изд. отдел
08.02.1989 г.