Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.853

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ В R_+^n

В.И.Шмырёв

В настоящей заметке рассматривается специальная однородная линейная задача дополнительности в R_+^n, порождаемая частичной упорядоченностью переменных и некоторой неразложимой неотрицательной матрицей. Показывается, что задачи рассматриваемого класса всегда имеют решение, и притом единственное, ибо приводят к неоднородным задачам дополнительности в традиционной форме с положительными главными минорами матрицы ограничений.

Описывается алгоритм решения, являющийся конкретизацией общей схемы алгоритма полиэдральной комплементарности, изложенного автором в [1].

Задача рассматриваемого типа возникла при построении алгоритма отыскания равновесия в линейной модели обмена [2].

1 . Постановка вопроса. Пусть имеется граф Γ с множеством вершин $\{1,2,\ldots,n\}$ и множеством дуг $U=\{u_s=(i_s,j_s) \mid s=1,\ldots,n-1\}$, являющийся деревом. Кроме того, заданы положительный вектор $g=(g_1,\ldots,g_n)$ и квадратная матрица $D=\{d_{ij}\}$ размером $n\times n$ - неотрицательная, неразложимая и $\sum_{i=1}^n d_{ij}=1$ при каждом $j=1,2,\ldots,n$. Пусть d^i - строки этой матрицы. Дереву Γ, вектору g и матрице D сопоставляются две системы линейных однородных неравенств:

$$g_{i_s}p_{i_s}-g_{j_s}p_{j_s}\geq 0,\quad s=1,\ldots,n-1, \qquad (1)$$

$$\sum_{k\sim i_s}(p_k-(p,d^k))\geq 0,\ s=1,\ldots,n-1, \qquad (2)$$

где $k \sim i_s$ означает, что вершины k и i_s лежат на одной компоненте связности, возникающей после удаления дуги $u_s = (i_s, j_s)$ (иными словами, $k \sim i_s$ означает, что цепь дуг графа Γ, соединяющая вершины k и i_s, не содержит дуги u_s).

Требуется найти нетривиальный вектор $\rho \in R^n_+$, компоненты которого решали бы системы (I) и (2) и при этом выполнялась бы система условий дополнительности:

$$(g_{i_s}\rho_{i_s} - g_{j_s}\rho_{j_s})(\sum_{k\sim i_s}(\rho_k - (\rho, d^k)) = 0, \quad s = 1,\ldots,n-1.$$

2. Разрешимость задачи. Покажем, что сформулированная задача всегда имеет положительное решение, и притом единственное, с точностью до положительного множителя.

Ввиду однородности условий можно наложить на вектор ρ некоторое требование нормировки. В качестве такового возьмем $\sum_j g_j\rho_j = 1$. Тогда решение рассматриваемой задачи будет решением и расширенной задачи дополнительности, получающейся из исходной добавлением еще пары неравенств: неравенство

$$\sum_j g_j \rho_j \geq 0 \tag{3}$$

добавляется в систему (I), и неравенство

$$\sum_j g_j \rho_j \geq 1 \tag{4}$$

добавляется в систему (2). Ясно, что требование дополнительности для пары неравенств (3), (4) выполняется лишь в случае, когда в (4) достигается равенство.

Таким образом, разрешимость и единственность решения исходной задачи (при выполнении условия нормировки) будет показана, если мы покажем, что этим свойством обладает расширенная (уже неоднородная) задача дополнительности, порождаемая системами неравенств (I), (3) и (2),(4), и решение этой задачи неотрицательно. Несложные рассуждения, которые мы приведем позже, показывают, что это решение всегда положительно.

Рассмотрим вопрос о разрешимости расширенной задачи дополнительности. Введем новые переменные:

$$g_{i_s}\rho_{i_s} - g_{j_s}\rho_{j_s} = \lambda_s, \quad s = 1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j \rho_j = \lambda_n, \tag{6}$$

или, в векторном виде,

$$Hp = \lambda. \tag{7}$$

Матрица H неособенная, ибо однородная система $Hp = 0$ имеет только нулевое решение: если $g_{i_s} p_{i_s} = g_{j_s} p_{j_s}$ при всех s, то все p_j одного знака, и из $\sum_j g_j p_j = 0$ следует, что все p_j нули.

В новых переменных система (I), (3) принимает традиционный вид: $\lambda \geq 0$.

Запишем в векторном виде систему (2), (4):

$$Wp \geq e_n, \tag{8}$$

e_n - n-й координатный орт. Переходя от p к λ, имеем

$$WH^{-1}\lambda \geq e_n. \tag{8'}$$

Таким образом, в переменных λ мы получили традиционную постановку задачи линейной дополнительности с матрицей $G = WH^{-1}$.

ТЕОРЕМА. Главные миноры матрицы G положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что последние строки у матриц W и H совпадают, а потому последняя строка матрицы WH^{-1} - это орт e_n. Следовательно, требуемое утверждение о положительности главных миноров нужно доказать для матрицы G_{n-1}, получающейся из G отбрасыванием последних строки и столбца.

Сначала покажем положительность диагональных элементов матрицы G_{n-1}. Несложно указать явно столбцы матрицы H^{-1}. Столбец h^s, $s < n$, имеет следующую структуру:

$$h_{k_s} = \frac{\alpha}{g_k}, \quad k \sim i_s, \tag{10}$$

$$h_{k_s} = -\frac{\beta}{g_k}, \quad k \sim j_s, \tag{11}$$

где α и β следует определить из условий $h_{s i_s} g_{i_s} - h_{s j_s} g_{j_s} = 0$ и $\sum_k h_{sk} g_k = 0$. Это дает

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + \beta = 1, && (12)\\ &r_s\alpha - (n - r_s)\beta = 0, && (13) \end{aligned}\right\}$$

где r_s - число вершин k таких, что $k \sim i_s$. Ясно, что такие α и β всегда существуют и положительны.

Таким образом, s -й диагональный элемент матрицы G_{n-1} определяется формулой

$$(w_s, h^s) = \sum_{k \sim i_s} w_{sk} \frac{\alpha}{g_k} - \sum_{k \sim j_s} w_{sk} \frac{\beta}{g_k} .$$

Но из вида системы (2) следует, что в s -й строке матрицы W имеем $w_{sk} > 0$ при $k \sim i_s$ и $w_{sk} < 0$ при $k \sim j_s$. Тем самым $(w_s, h^s) > 0$.

Перейдем к доказательству положительности миноров более высокого порядка. Любой такой минор может быть получен последовательным наращиванием размерности, начиная от минора первого порядка. Теперь достаточно показать, что в таком процессе любые два соседних минора будут одного знака.

Пусть имеем минор $(k-1)$-го порядка и объемлющий его минор k -го порядка. Для простоты считаем, что речь идет о минорах

$$\Delta_{k-1} = G\begin{pmatrix} 1,\dots,k-1 \\ 1,\dots,k-1 \end{pmatrix} \text{ и } \Delta_k = G\begin{pmatrix} 1,\dots,k \\ 1,\dots,k \end{pmatrix} .$$

Пусть W^{1k} - матрица, образованная из первых k строк матрицы W, а H^{-1}_{1k} - матрица, образованная из первых k столбцов матрицы H^{-1}. Для доказательства того, что миноры Δ_{k-1} и Δ_k имеют один знак, достаточно показать, что в решении γ системы

$$W^{1k} H^{-1}_{1k} \gamma = e_k \tag{14}$$

последняя компонента $\gamma_k = \Delta_{k-1}/\Delta_k$ положительна (e_k - k -й координатный орт в R^{k}).

Покажем, что матрица системы (14) неособенная. Для этого достаточно показать, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение.

Совокупность векторов ρ вида $\rho = H^{-1}_{1k}\gamma$ при различных γ зачеркивает подпространство, являющееся решением системы

$$H^{k+1,n} \rho = 0 , \tag{15}$$

где $H^{k+1,n}$ - матрица, образованная из строк матрицы H с номерами $k+1,\dots,n$. Таким образом, нужно показать, что только тривиальное решение имеет система

$$\left.\begin{aligned} W^{1k}\rho = 0, \\ H^{k+1,n}\rho = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(столбцы матрицы H_{1k}^{-1} линейно-независимы и из $\rho = H_{1k}^{-1}\gamma = 0$ получаем $\gamma = 0$). Убедимся, что из (16) следует $\rho = 0$. Строки матрицы W с номерами $1, \ldots, k$ отвечают дугам $u_1, \ldots, u_k$ исходного графа Γ . Исключение этих дуг порождает граф $\tilde{\Gamma}$, имеющий $(k+1)$ компонент связности. Если J_ν - множество вершин ν-й компоненты, то система $W^{1k}\rho = 0$, как легко показать, эквивалентна такой:

$$\sum_{j \in J_\nu} (\rho_j - (\rho, d^j)) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, k+1. \tag{17}$$

Система (15) эквивалентна условию, что на каждой компоненте связности графа $\tilde{\Gamma}$ между величинами ρ_j соблюдаются взаимные пропорции, задаваемые величинами $f_j = 1/g_j$, и, кроме того, $\sum_j \rho_j g_j = 0$. Введем новые переменные $\pi_\nu = \rho_j g_j$, $j \in J_\nu$, и произведем подстановку $\rho_j = \pi_\nu f_j$, $j \in J_\nu$, в (17). В результате относительно переменных π_ν получим систему вида

$$\pi = A\pi, \tag{18}$$

где A - снова неразложимая неотрицательная матрица и сумма элементов в каждом ее столбце равна единице. В силу теоремы Фробениуса система (18) имеет единственное, с точностью до множителя, нетривиальное решение, и все π_ν в этом решении одного знака. Тем самым одного знака будут и отвечающие им ρ_j , а из условия $\sum_j \rho_j g_j = 0$ получаем, что все ρ_j равны нулю. Это и требовалось.

Таким образом, матрица $W^{1k}H_{1k}^{-1}$ неособенная, и система (14) имеет единственное решение. Перейдем к доказательству того, что в этом решении $\gamma_k > 0$.

Пусть дуга (i_k, j_k) соединяет компоненты связности, имеющие номера k и $k+1$, и при этом $i_k \in J_k$, $j_k \in J_{k+1}$. Пусть γ - решение системы (14). Обозначая, как и выше, $\rho = H_{1k}^{-1}\gamma$, будем иметь для ρ систему уравнений (15) и

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j\in J_\nu}(p_j-(p,d^j))=0,\ \nu=1,\dots,k-1,\\&\sum_{j\in J_k}(p_j-(p,d^j))=1,\\&\sum_{j\in J_{k+1}}(p_j-(p,d^j))=-1.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Кроме того, $(g_{i_k}e_{i_k}-g_{j_k}e_{j_k},p)=(g_{i_k}e_{i_k}-g_{j_k}e_{j_k},H_{1k}^{-1}\gamma)=\gamma_k$, ибо $g_{i_k}e_{i_k}-g_{j_k}e_{j_k}$ - это k-я строка матрицы H.

Таким образом, доказательство $\gamma_k>0$ сводится к тому, чтобы для вектора $p=\hat{p}$, удовлетворяющего системе (19) и такого, что на каждой компоненте связности графа Γ значения $\hat{p}_j$ пропорциональны величинам $f_j=1/g_j$, а также $\sum g_j\hat{p}_j=0$, выполнялось $g_{i_k}\hat{p}_{i_k}-g_{j_k}\hat{p}_{j_k}>0$. В переменных π_ν, вводимых, как и выше, формулой $\pi_\nu=g_jp_j$, $j\in J_\nu$, это означает $\hat{\pi}_k>\hat{\pi}_{k+1}$. В этих переменных систему (19) можно, аналогично (18) переписать в виде

$$\pi-A\pi=e_k-e_{k+1},\qquad(20)$$

а условие $\sum_j g_j\hat{p}_j=0$ примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{k+1}\alpha_\nu\hat{\pi}_\nu=0,$$

где $\alpha_\nu=|J_\nu|$ - число вершин на ν-й компоненте связности графа Γ.

Дальнейшие рассуждения опираются на следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть A - неотрицательная неразложимая матрица, x - ее положительный собственный вектор, λ - соответствующее ему собственное число. Если для некоторого положительного вектора $\tilde{x}$ вектор $\tilde{z}=\lambda\tilde{x}-A\tilde{x}$ таков, что все его компоненты, кроме $\tilde{z}_{i_1}$ и $\tilde{z}_{i_2}$, равны нулю, то $\tilde{z}_{i_1}>0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\tilde{x}_{i_1}}{\tilde{x}_{i_2}}>\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}.\qquad(21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – порядок матрицы A. Для простоты считаем также, что $i_1=1, i_2=n$. Рассмотрим вектор $h\in R^n$ с компонентами $h_j=\tilde{x}_j-x_j$. Для этого вектора имеем

$$(\lambda E-A)h=\tilde{z},$$

E – единичная матрица. Так как $h_n=0$, то для вектора $\bar{h}=(h_1,\dots,h_{n-1})$ получаем

$$(\lambda\bar{E}-\bar{A})\bar{h}=e_1\tilde{z}_1,$$

где $\bar{E},\bar{A}$ – матрицы порядка $(n-1)$, полученные из матрицы E и A вычеркиванием последних строк и столбца, а $e_1\in R^{n-1}$ – первый координатный орт. Так как A – неразложимая матрица, то максимальное собственное число неотрицательной матрицы $\bar{A}$ строго меньше λ ([3, с.367]). Поэтому матрица $B=\lambda E-\bar{A}$ неособенная и $B^{-1}\geqslant 0$. Кроме того, на том же основании можно утверждать, что все главные миноры матрицы B положительны ([3, с.368]), а потому положительны диагональные элементы β_{ii} матрицы B^{-1}. Но $h_1=(e_1,B^{-1}e_1)\tilde{z}_1=\beta_{11}\tilde{z}_1$. Отсюда и следует требуемое. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству неравенства $\hat{\pi}_k>\hat{\pi}_{k+1}$.

Пусть π^o – положительный вектор, решающий систему (18), т.е. однородную систему, отвечающую системе (20) (как уже отмечалось, такой π^o существует по теореме Фробениуса). Пусть $\pi_k^o=\pi_{k+1}^o$. Ясно, что вектор вида $\pi(t)=\hat{\pi}+t\pi^o$ при достаточно большом t будет положительным и удовлетворять (20). Тем самым применима приведенная выше лемма, что дает

$$\frac{\hat{\pi}_k+t\pi_k^o}{\hat{\pi}_{k+1}+t\pi_{k+1}^o}>\frac{\pi_k^o}{\pi_{k+1}^o}.$$

Но $\pi_k^o=\pi_{k+1}^o$ и, значит, $\hat{\pi}_k>\hat{\pi}_{k+1}$, что и требуется.

Пусть теперь $\pi_k^o\neq\pi_{k+1}^o$. Рассмотрим систему вида (18), но порожденную сокращенным набором дуг $u_1,\dots,u_{k-1}$. По сравнению с прежней ситуаций, когда рассматривался набор дуг $u_1,\dots,u_{k-1},u_k$, произойдет объединение k-й и $(k+1)$-й компонент связности графа Γ (посредством дуги u_k), что приведет к замене в матрице A последних двух строк их суммой, а последних двух столбцов – их полусуммой. Пусть положительные $\pi_1,\dots,\pi_k$ решают возникшую систему вида (18). Полагая $\pi_{k+1}=\pi_k$, получим вектор $\pi\in R^{k+1}$, для которого $(\pi-A\pi)_k=-(\pi-A\pi)_{k+1}=\delta\neq 0$ (ибо в случае $\delta=0$ этот вектор

π с точностью до множителя совпадал бы с π^0, и имел бы $\pi_k^0 = \pi_{k+1}^0$, а это противоречит предположению). Если оказалось, что $\delta > 0$, то в силу леммы

$$1 = \frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} > \frac{\pi_k^0}{\pi_{k+1}^0},$$

т.е. $\pi_{k+1}^0 > \pi_k^0$. Теперь, рассматривая $\pi(t) = \frac{1}{\delta}\pi - t\pi^0$, будем при $t = \hat{t} = \sum_{\nu=1}^{k+1} \alpha_\nu \pi_\nu / \delta \sum_{\nu=1}^{k+1} \alpha_\nu \pi_\nu^0 > 0$ иметь $\sum_{\nu=1}^{k+1} \alpha_\nu \pi_\nu(\hat{t}) = 0$, и $\pi(\hat{t})$ удовлетворяет системе (20). Тем самым $\pi(\hat{t})$ и есть $\hat{\pi}$, а из $\pi_k = \pi_{k+1}$, $\pi_k^0 < \pi_{k+1}^0$ и $\hat{t} > 0$ следует требуемое $\hat{\pi}_k > \hat{\pi}_{k+1}$.

В случае $\delta < 0$ по лемме получаем

$$1 = \frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} > \frac{\pi_{k+1}^0}{\pi_k^0},$$

т.е. $\pi_{k+1}^0 < \pi_k^0$. Снова вектор $\pi(t)$ при $t = \hat{t}$ совпадает с $\hat{\pi}$, но теперь $\hat{t} < 0$. Поэтому $(-\hat{t})\pi_k^0 > (-\hat{t})\pi_{k+1}^0$ и снова $\hat{\pi}_k > \hat{\pi}_{k+1}$. Теорема доказана.

Таким образом, все главные миноры матрицы WH^{-1} положительны, а это, как известно, (см. [6]), обеспечивает существование и единственность решения задачи дополнительности с такой матрицей и любой правой частью, а стало быть, и с правой частью e_n, как в нашем случае. Заметим, теперь, что из рассуждений, использованных в приведенном выше доказательстве, достаточно очевидно, что вектор $\hat{\rho} = H^{-1}\hat{\lambda}$, отвечающий решению $\hat{\lambda}$, всегда будет положительным. Действительно, если $\hat{\lambda}_1 = \ldots = \hat{\lambda}_{n-1} = 0$, то $\hat{\rho}_j = \frac{1}{n g_j} > 0$; если же среди $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_{n-1}$ есть ненулевые, то, исключая из исходного графа Γ дуги u_s, отвечающие таким ненулевым $\hat{\lambda}_s$, будем иметь на ν-й компоненте получающегося графа $\hat{\rho}_j = \hat{\hat{\pi}}_\nu \frac{1}{g_j}$, и $\hat{\hat{\pi}}_\nu$ образуют положительное решение возникающей системы вида (20), т.е. и в этом случае все $\hat{\rho}_j$ положительны.

В итоге мы показали, что исходная задача дополнительности для систем (I) и (2) всегда разрешима и ее решение $\hat{\rho}$ единственно с точностью до множителя и положительно.

3. <u>Алгоритм</u>. Приведем алгоритм решения рассматриваемой задачи, реализующей применительно к данному случаю общую схему алгоритма полиэдральной дополнительности [I].

К началу k-го шага процесса имеется некоторое множество $\alpha_k \subset \{1,2,\ldots,n\}, n \notin \alpha_k$ и пара точек $p^k, q^k \in R_+^n$ таких, что

I) p^k решает систему неравенств (I) и при этом неравенства с номерами $s \in \alpha_k$ при $p = p^k$ обращаются в равенства;

2) q^k решает систему неравенств (2), (4) и при этом неравенства с номерами $s \notin \alpha_k$ при $p = q^k$ обращаются в равенства.

Находим точку z^k, решая систему

$$q_{i_s} p_{i_s} - q_{j_s} p_{j_s} = 0, \quad s \in \alpha_k, \tag{22}$$

$$\sum_{j \sim i_s} (p_j - (p, d^j)) = 0, \quad s \notin \alpha_k, \tag{23}$$

$$\sum_j p_j q_j = 1. \tag{24}$$

Из предыдущих рассмотрений следует, что решение этой системы существует, единственное и положительное. Его отыскание сводится к решению системы вида (I8).

Рассматриваем точки $p(t) = p^k + t(z^k - p^k)$ и $q(t) = q^k + t(z^k - q^k)$.

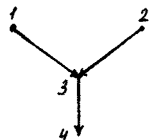
Увеличиваем t от $t = 0$, следя за тем, чтобы $p(t)$ удовлетворял системе (I), а $q(t)$ - системе (2). Если при этом оказывается достижимым значение $t = 1$, то z^k - искомое решение исходной задачи. Если же максимальное достижимое значение $t = t^* < 1$, то переходим к следующему шагу с $p^{k+1} = p(t^*)$, $q^{k+1} = q(t^*)$, а множество α_{k+1} получается из α_k добавлением или исключением из него s' - номера неравенства, лимитирующего увеличение t за t^* -в зависимости от того, в какой из систем, (I) или (2), это неравенство находится: если лимитирующее неравенство находится в системе (I), то $\alpha_{k+1} = \alpha_k \cup \{s'\}$, если в системе (2) - $\alpha_{k+1} = \alpha_k \setminus \{s'\}$. Возможно, конечно, что s' определяется неединственным образом, т.е. реализуется ситуация вырожденности, как в симплексных процедурах линейного программирования. Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь, что преодоление вырожденности достигается незначительной вариацией исходных точек p^0 и q^0. В случае отсутствия вырожденности будем иметь на каждом шаге $t^k > 0$, и процесс закончится через конечное число шагов. В качестве начального состояния можно принять, например, следующее: $\alpha_0 = \emptyset$, точка q^0 получается решением системы

$$g_j = (q, d^j), \ j = 1, \dots, n, \tag{25}$$

$$\sum_j q_j g_j = 1. \tag{26}$$

В качестве ρ^0 можно взять любой $\rho > 0$, для которого все неравенства системы (I) выполняются как строгие. Такой ρ^0 можно получить, например, следующей процедурой: возьмем какую-либо из вершин графа Γ, к которой примыкают только исходящие дуги (источник), пусть это вершина j_0. Полагаем $\rho_{j_0} = \dfrac{n}{g_{j_0}}$ и движемся из j_0 в прочие вершины j, получая при этом соответствующие ρ_j по правилу: если дуга $u_s = (i_s, j_s)$ проходится от i_s к j_s, то $g_{j_s}\rho_{j_s} = g_{i_s}\rho_{i_s} - 1$; если же дуга проходится в обратном направлении, т.е. от j_s к i_s, то $g_{i_s}\rho_{i_s} = g_{j_s}\rho_{j_s} + 1$. Ясно, что все ρ_j окажутся положительными, и $g_{i_s}\rho_{i_s} - g_{j_s}\rho_{j_s} = 1 > 0$.

4. <u>Иллюстративный пример</u>. Пусть исходный граф Γ имеет вид:



т.е. множество вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и множество дуг $U = \{(1,3), (2,3), (3,4)\}$. Пусть $q = (1, 1, 1, 1)$, а строками матрицы D являются векторы

$$d^1 = (1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/6),$$
$$d^2 = (1/6,\ 1/2,\ 1/8,\ 1/6),$$
$$d^3 = (1/6,\ 1/8,\ 1/2,\ 1/6),$$
$$d^4 = (1/6,\ 1/8,\ 1/4,\ 1/2).$$

Таким образом, системы (I) и (2) в данном случае имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 \geq \rho_3, \\ \rho_2 \geq \rho_3, \\ \rho_3 \geq \rho_4, \end{array}\right\} \tag{I$'$}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 \geq (\rho, d^1), \\ \rho_2 \geq (\rho, d^2), \\ \rho_4 \geq (\rho, d^4), \end{array}\right\} \tag{2$'$}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&1/2\rho_1 - 1/4\rho_2 - 1/8\rho_3 - 1/6\rho_4 \geq 0,\\
&-1/6\rho_1 + 1/2\rho_2 - 1/8\rho_3 - 1/6\rho_4 \geq 0,\\
&1/6\rho_1 + 1/8\rho_2 + 1/4\rho_3 - 1/2\rho_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2''}$$

Положим $\alpha_0 = \emptyset$ и из системы (25) - (26) получаем

$$q^0 = (0{,}2647,\ 0{,}2353,\ 0{,}2353,\ 0{,}2647);$$

для получения ρ^0 принимаем $i_0 = 1$ и $\rho_1^0 = 4$. Тогда в соответствии с описанной процедурой получим $\rho_3^0 = 3$, $\rho_2^0 = 4$ и $\rho_4^0 = 2$, т.е.

$$\rho^0 = (4,\ 4,\ 3,\ 2).$$

<u>Итерация 0</u>. Имеем $\tau^0 = q^0; q(t) \equiv q^0$ и

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 4\\ 4\\ 3\\ 2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 3{,}7353\\ 3{,}7647\\ 2{,}7647\\ 1{,}7353 \end{pmatrix}.$$

Для определения $t = t^*$ имеем систему неравенств (1′), куда нужно поставить $\rho = \rho(t)$. Лимитирующим является неравенство $\rho_3(t) \geq \rho_4(t)$, откуда имеем $t^* = 0{,}9714$. В результате

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0{,}3714\\ 0{,}3428\\ 0{,}3143\\ 0{,}3143 \end{pmatrix}, \quad q^1 = q^0, \quad \alpha^1 = \{3\}.$$

<u>Итерация 1</u>. Система (22)-(23) для определения $\rho = \tau^1$ имеет вид

$$\begin{cases}
1/2\rho_1 - 1/4\rho_2 - 1/8\rho_3 - 1/6\rho_4 = 0,\\
-1/6\rho_1 + 1/2\rho_2 - 1/8\rho_3 - 1/6\rho_4 = 0,\\
\rho_3 - \rho_4 = 0.
\end{cases}$$

Решением этой системы является, например,

$$\rho_1 = 1.05,\ \rho_2 = 0.9333,\ \rho_3 = 1,\ \rho_4 = 1.$$

Проводя нормировку, получаем

$$r^1 = \begin{pmatrix} 0,2636 \\ 0,2343 \\ 0,2510 \\ 0,2510 \end{pmatrix}, \ p(t) = \begin{pmatrix} 0,3714 \\ 0,3428 \\ 0,3143 \\ 0,3143 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0,1078 \\ 0,1085 \\ 0,0633 \\ 0,0633 \end{pmatrix}, \ q(t) \begin{pmatrix} 0,2647 \\ 0,2353 \\ 0,2353 \\ 0,2647 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0,0011 \\ 0,0010 \\ 0,0157 \\ 0,0137 \end{pmatrix}.$$

Лимитирующими при определении t^* оказывается неравенство $p_2(t) \geq p_3(t)$, откуда получаем $t^* = 0,6305$ и, следовательно,

$$p^2 = \begin{pmatrix} 0,3034 \\ 0,2744 \\ 0,2744 \\ 0,2744 \end{pmatrix}, \quad q^2 = \begin{pmatrix} 0,2640 \\ 0,2347 \\ 0,2452 \\ 0,2561 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \{2, 3\}.$$

<u>Итерация 2</u>. Для определения $p = r^2$ имеем систему

$$\begin{cases} 1/2\, p_1 - 1/4\, p_2 - 1/8\, p_3 - 1/6\, p_4 = 0, \\ \qquad\qquad p_2 - p_3 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad p_3 - p_4 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем

$$r^2 = \begin{pmatrix} 0,2653 \\ 0,2449 \\ 0,2449 \\ 0,2449 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора $p = r^2$ удовлетворяют всем условиям исходной задачи дополнительности. Это ее решение.

Литература

1. Шмырев В.И. Задача полиэдральной комплементарности// Оптимизация. - 1989. - Вып.44(61). - С.82-95.
2. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена// Сиб. мат. журн. - 1985. - Т.26, № 2. - С.162-175.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.
4. Lemke C.E. A survey of complementarity theory// Variational inequalities and complementarity problems. - N.Y., 1980. - P.211-239.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.12.1988 г.