Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.853

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАССЫ НА ПЛОСКОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ ЛИПШИЦА

Ю.Н.Владимиров

В работе рассматривается один частный случай задач Монжа - Канторовича (см. [1-5; 6, гл.8, § 4]) об оптимальном перемещении массы. Предложенный автором в [7] метод решения поставленной задачи для случая евклидовой плоскости переносится, с использованием результатов [8], на случай плоскости с произвольной строго выпуклой нормой. Рассматриваются конкретные примеры. Приводятся результаты численных расчетов на ЭВМ.

§1. Необходимые сведения о задаче оптимального перемещения массы

Пусть на системе $\mathcal{B}$ борелевских множеств метрического пространства X с метрикой r заданы конечные меры φ_i с компактными носителями $supp\,\varphi_i$, $i=1,2$, причем $\varphi_1(X)=\varphi_2(X)>0$. Введем в рассмотрение семейство Ψ определенных на $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ неотрицательных счетно-аддитивных по каждому аргументу функций (перемещений) ψ.

ЗАДАЧА 1. В множестве допустимых перемещений

$$\Psi_{\varphi_1\varphi_2}=\{\psi\in\Psi \,|\, \psi(e,X)=\varphi_1(e),\ \psi(X,e)=\varphi_2(e),\ e\in\mathcal{B}\}$$

найти оптимальное перемещение, для которого достигает минимума величина

$$\tau_r(\psi)=\int_X\int_X r(x,y)\,\psi(dx,dy).$$

Заметим, что в поставленной задаче множество $\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ всегда не пусто. В него входит, например, функция

$$\psi(e,e')=\frac{\varphi_1(e)\varphi_2(e')}{\varphi_1(X)},\ e,e'\in\mathcal{B}.$$

Кроме того, носитель $supp\,\psi$ любого допустимого перемещения $\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ содержится в произведении $supp\,\varphi_1\times supp\,\varphi_2$.

Известно (см. [1-6]), что задача 1 всегда разрешима. Допустимое перемещение $\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ в том и только в том случае является оптимальным, если найдется так называемая потенциальная функция $u: supp\,\varphi_1\cup supp\,\varphi_2\to R$, удовлетворяющая следующему условию: при любых $x,y\in supp\,\varphi_1\cup supp\,\varphi_2$ выполняется неравенство

$$u(y)-u(x)\le r(x,y), \tag{1}$$

причем

$$u(y)-u(x)=r(x,y), \tag{2}$$

если пара (x,y) принадлежит носителю $supp\,\psi$ перемещения ψ.

Обозначим через Φ_α, где $\alpha>0$, множество всех определенных на $\mathcal{B}$ мер φ с компактными носителями, для которых $\varphi(X)=\alpha$.

Неотрицательная функция

$$\rho_{\alpha,r}(\varphi_1,\varphi_2)=\min\{\tau_r(\psi)\,|\,\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}\},\ \varphi_1,\varphi_2\in\Phi_\alpha,$$

является метрикой на множестве Φ_α. Эту метрику принято называть метрикой Канторовича - Рубинштейна (см., например, [6]). Заметим, что при любых $\alpha,\beta>0$ имеют место равенства

$$\Phi_\alpha=\alpha\Phi_1=\{\alpha\varphi\,|\,\varphi\in\Phi_1\};$$

$$\Psi_{\varphi_1\varphi_2}=\alpha\Psi_{\frac{\varphi_1}{\alpha}\frac{\varphi_2}{\alpha}}=\{\alpha\psi\,|\,\psi\in\Psi_{\frac{\varphi_1}{\alpha}\frac{\varphi_2}{\alpha}}\},$$

$$\rho_{\alpha,\beta r}(\varphi_1,\varphi_2)=\alpha\beta\rho_{1,r}\left(\frac{\varphi_1}{\alpha},\frac{\varphi_2}{\alpha}\right),\ \varphi_1,\varphi_2\in\Phi_\alpha.$$

Следовательно, исходные меры φ_1 и φ_2 в задаче 1 можно выбирать из множества Φ_1. Положим $\rho_r=\rho_{1,r}$.

Допустим теперь, что для фигурирующих в задаче 1 мер φ_1 и φ_2 имеют место неравенства $0<\varphi_1(X)<\varphi_2(X)$. В этом случае возникает следующая экстремальная

ЗАДАЧА 2. Среди мер $\varphi_2'\in\Phi_{\varphi_1(X)}$, удовлетворяющих условию $\varphi_2'(e)\le\varphi_2(e),\ e\in\mathcal{B}$, найти такую, для которой до-

достигает минимума величина $\rho_{\varphi_1(X),r}(\varphi_1,\varphi_2')$.

В задаче 2 всегда существует решение φ_2' (см. [5]), характеризующееся наличием перемещения $\psi\in\Psi_{\varphi_1,\varphi_2'}$ и функции $u:\operatorname{supp}\varphi_1\cup\operatorname{supp}\varphi_2\to\mathbb{R}$ таких, что

а) при всех $x,y\in\operatorname{supp}\varphi_1\cup\operatorname{supp}\varphi_2$ выполняется неравенство (I);

б) при всех $(x,y)\in\operatorname{supp}\psi$ выполняется равенство (2);

в) если $x\in\operatorname{supp}\varphi_2'$, $y\in\operatorname{supp}(\varphi_2-\varphi_2')$, то $u(x)\le u(y)$.

§2. Функции Липшица, связанные с задачей оптимального перемещения массы

Рассмотрим класс $Lip_1(X,r)$ функций $u:X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих при любых $x,y\in X$ неравенству (I). Сразу заметим, что если $Y\subset X$, то сужение $v=u|_Y$ любой функции $u\in Lip_1(X,r)$ на множество Y принадлежит классу $Lip_1(Y,r)$. Верно и обратное утверждение: если $v\in Lip_1(Y,r)$, то найдется функция $u\in Lip_1(X,r)$, для которой $u|_Y=v$; правда, указанное продолжение u функции v, вообще говоря, не единственно (см. [8]). Сказанное означает, что потенциальные функции в задаче оптимального перемещения массы можно считать заданными на всем пространстве X.

Каждая функция $u\in Lip_1(X,r)$ порождает на X частичный порядок: $x\overset{u}{\le}y$ в том и только в том случае, когда для пары (x,y) имеет место равенство (2). Для точек $x,y\in X$, удовлетворяющих неравенству $x\overset{u}{\le}y$, введем в рассмотрение множества

$$[x,y]_u=\{z\in X\mid x\overset{u}{\le}z\overset{u}{\le}y\}.$$

Заметим, что если $z\in[x,y]_u$ и $u(z)=c$, то

$$u^{-1}(c)\cap B(x,r(x,z))=u^{-1}(c)\cap B(y,r(y,z))=\varnothing, \qquad (3)$$

где $u^{-1}(c)=\{z'\in X\mid u(z')=c\}$ – полный прообраз точки c, а $B(x,\varepsilon)=\{z'\in X\mid r(x,z')<\varepsilon\}$ – открытый шар с центром x радиуса ε.

Особую роль играют задачи оптимального перемещения массы в аффинных метрических пространствах X, метрика в которых может быть задана с помощью нормы

$$r(x,y)=\|x-y\|,\ x,y\in X,$$

определенной в некотором ассоциированном с X вещественном линейном пространстве. В множестве $\mathcal{P}$ указанных метрик выделим метрики, для которых выполняется следующее условие:

(СВ) при некотором (а тогда и при любом) $x \in X$ замкнутый шар $\bar{B}(x,1)$ является строго выпуклым множеством.

Если метрика r удовлетворяет условию (СВ), то для функции $u \in Lip_1(X,r)$ и любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $x \underset{u}{\leq} y$, соответствующее множество $[x,y]_u$ совпадает с замкнутым отрезком $[x,y]$ и является линейно-упорядоченным множеством. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции $u \in Lip_1(X,r)$, называются линиями тока этой функции. Каждая линия тока является подмножеством X одного из следующих типов: а) точкой; б) замкнутым направленным отрезком; в) замкнутым направленным лучом; г) направленной прямой. Если две различные линии тока имеют общую точку x, то x – либо минимальный, либо максимальный элемент каждой из этих линий тока.

Пусть $Y \subset X$ и $v \in Lip_1(Y,r)$. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества в Y, отвечающие функции v, естественно назвать линиями тока v. Как отмечалось выше, в $Lip_1(X,r)$ найдется функция u такая, что $u|_Y = v$. При этом, очевидно, каждая линия тока функции v является пересечением некоторой линии тока функции u с множеством Y.

Заметим, что на основании равенств (3) можно сделать следующее заключение: поверхности уровня каждой функции $u \in Lip_1(X,r)$ являются r-трансверсальными к ее линиям тока. Более подробно о свойствах линий тока см. [8]. Отдельные свойства линий тока функций Липшица в конечномерных евклидовых пространствах изучались также в работах [9-11].

Знание свойств линий тока потенциальной функции в задаче перемещения массы позволяет строить соответствующие оптимальные перемещения (см. [7, 12-14]).

Функции Липшица одной вещественной переменной описываются достаточно просто (см. [8, §7]). Это позволяет сравнительно легко строить соответствующие оптимальные перемещения (см., например, [14]).

Принципиальные трудности при построении оптимальных перемещений возникают уже на плоскости. Приведем одно утверждение (см. [8, предложение 8]), которое позволяет строить эффективные численные методы решения определенного класса задач оптимального

перемещения массы на плоскости (см. также [15-17]).

Пусть X - двумерное аффинное пространство, $r\in\mathcal{P}$, G - открытое выпуклое множество в X, $\overline{G}$ - его замыкание. Рассмотрим в X семейство $\mathcal{L}_G$ направленных прямых ℓ (соответствующий порядок на ℓ обозначается через $\overset{\ell}{\leq}$), удовлетворяющих условиям:

(Л1) любая прямая $\ell\in\mathcal{L}_G$ пересекает множество G;

(Л2) для каждого $x\in G$ найдется такая прямая $\ell=\ell_x\in\mathcal{L}_G$, что $x\in\ell$;

(Л3) если $y\in G\setminus\ell_x$, то $\ell_x\cap\ell_y\cap G=\emptyset$;

(Л4) если $x_n, y_n, x, y\in G$, $y_n\in\ell x_n$, $x_n\overset{\ell x_n}{\leq} y_n$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim_{n\to\infty}y_n=y$, то $x\overset{\ell x}{\leq} y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любой метрики $r\in\mathcal{P}$ удовлетворяющей условию (СВ), найдется функция $u\in Lip_1(\overline{G},r)$, для которой замкнутые линейно-упорядоченные множества $d=\ell\cap\overline{G}$, где $\ell\in\mathcal{L}_G$, являются линиями тока.

Для случая евклидовой метрики приведенное утверждение по существу использовалось уже в работах [7,12-13]. В следующем параграфе приводятся примеры оптимального перемещения массы на плоскости для различных метрик $r\in\mathcal{P}$, удовлетворяющих условию (СВ).

§ 3. Оптимальные перемещения лебеговой меры на плоскости

Пусть $X=\mathbb{R}^2=\{x=(\xi,\eta)\mid\xi,\eta\in\mathbb{R}\}$. Сразу заметим, что все метрики $r\in\mathcal{P}$ порождают на X одну и ту же топологию. Это означает, что система $\mathcal{B}$ борелевских множеств плоскости X не зависит от выбора метрики $r\in\mathcal{P}$.

В дальнейшем нас в основном будет интересовать случай, когда в качестве исходных распределений массы в задаче I принимаются функции

$$\varphi_i(e)=\mu(e\cap Q_i),\ e\in\mathcal{B},\ i=1,2,\tag{4}$$

где μ - лебегова мера, Q_1 и Q_2 - заданные компактные подмножества X, для которых $\mu(Q_1)=\mu(Q_2)=1$, а в качестве r выбирается произвольная метрика из $\mathcal{P}$, для которой справедливо условие (СВ). В рассматриваемом случае всегда (см. [18])

существует оптимальное перемещение вида

$$\psi_f(e,e')=\mu(f(e)\cap e'),\ e,e'\in\mathcal{B}, \qquad (5)$$

где f – взаимно-однозначное отображение почти всего компакта Q_1 на почти весь компакт Q_2, удовлетворяющее равенству

$$\mu(f(e))=\mu(e),\ e\in\mathcal{B},\ e\subset Q_1. \qquad (6)$$

Пусть $u\in Lip_1(X,r)$ – соответствующая потенциальная функция. Тогда для почти всех $x\in Q_1$ замкнутый отрезок $[x,f(x)]$ содержится в некоторой линии тока функции u. Множество точек $x\in Q_1$, принадлежащих более чем одной линии тока, имеет меру нуль. Из равенства (6) вытекает, в частности, следующее условие:

I°. Для любого множества $L\in\mathcal{B}$, являющегося объединением некоторого семейства линий тока функции u, выполняется равенство $\varphi_1(L)=\varphi_2(L)$.

Предположим теперь, что Q_1 и Q_2 – выпуклые множества, не имеющие общих внутренних точек: $int\,Q_1\cap int\,Q_2=\emptyset$. Тогда, очевидно, через каждую внутреннюю точку компакта $Q=Q_1\cup Q_2$ проходит некоторая невырожденная линия тока функции u, пересекающая оба множества Q_1 и Q_2. Допустим, что выполняется следующее условие:

2°. Множество $int\,Q$ не содержит граничных точек линий тока функций u.

Тогда через каждую точку $x\in int\,Q$ проходит единственная линия тока $\ell=\ell_x$. Условие I° в данном случае можно записать в следующей форме:

3°. Для любой линии тока $\ell_x,\ x\in int\,Q$, функции u справедливы равенства

$$\mu(Q_1\cap F_x^i)=\mu(Q_2\cap F_x^i),\ i=1,2, \qquad (7)$$

где F_x^i – замкнутые полуплоскости, порожденные проходящей через ℓ_x прямой.

С другой стороны, пусть $G=int(conv\,Q)$, где $conv\,Q$ – выпуклая оболочка множества Q. Предположим, что семейство $\mathcal{L}_G$ направленных прямых удовлетворяет условиям (Л1)-(Л3), причем для каждой прямой $\ell_x,\ x\in G$, наряду с импликацией

$$x_1\in\ell_x\cap Q_1,\ x_2\in\ell_x\cap Q_2\Longrightarrow x_1\overset{\ell_x}{\leq}x_2$$

выполняются равенства (7). Тогда, очевидно, семейство $\mathcal{L}_G$ удовлетворяет условию (Л4) и, следовательно, по предложению I най-

дется функция $u \in Lip_1(conv Q, r)$, для которой замкнутые линейно-упорядоченные множества $d_x = \ell_x \cap conv Q$ являются линиями тока. Более того, семейство $\mathcal{L}_G$ определяет в задаче I оптимальное перемещение вида (5), где в качестве f выбирается удовлетворяющее (6) гомеоморфное отображение множества $int\, Q_1$ на множество $int\, Q_2$, для которого $f(x) \in \ell_x$. Указанное отображение f можно построить, например, следующим образом: обозначим через r_0 евклидову метрику в $\mathbb{R}^2$ и пусть

$$x \in int Q_1,\ [x_1, y_2] = \ell_x \cap conv Q,\ [x_1, x_2] = \ell_x \cap Q_1,$$

$$[y_1, y_2] = \ell_x \cap Q_2,\ a = r_0(x_1, x_2),\ b = r_0(y_1, y_2),$$

$$c = r_0(x, x_2),\ a_0 = r_0(x_2, y_1),\ h = \frac{a^2 + 2aa_0 + b^2}{2(b-a)};$$

точке x поставим в соответствие точку $y = f(x) \in [y_1, y_2]$, для которой справедливо равенство

$$r_0(y, y_1) = \begin{cases} h - sign(h)\sqrt{h^2 - (2h + 2a_0 + c)c}, & \text{если } a \neq b, \\ c, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

При этом, очевидно,

$$\rho_r(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{T}_r(\psi_f) = \int_{Q_1} r(x, f(x))\, d\mu. \qquad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Важно отметить, что в рассматриваемой ситуации семейство $\mathcal{L}_G$, отображение f и, следовательно, оптимальное перемещение ψ_f не зависят от выбора метрики $r \in \mathcal{P}$, удовлетворяющей условию (СВ).

Как отмечалось в [7], далеко не всегда существуют семейства $\mathcal{L}_G$, удовлетворяющие всем приведенным выше условиям, даже для множеств Q, рассматриваемых в этом параграфе. В этой же работе выделяется некоторый класс компактов Q и отвечающих им семейств $\mathcal{L}_G$, для которых поставленные условия всегда выполняются. А именно: если исходное множество Q является выпуклым, то через каждую точку $x \in G = int\, Q$ проходит единственная прямая ℓ_x такая, что для отвечающих ей замкнутых полуплоскостей F_x^i, $i = 1, 2$, выполняются равенства (7). Это и позволяет сравнительно просто и независимо от выбора удовлетворяющей условию (СВ) метрики $r \in \mathcal{P}$ строить соответствующие оптимальные перемещения.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу оптимального перемещения массы треугольника в прямоугольник:

$$Q_1=\{x=(\xi,\eta)\in R^2 \mid \pm\xi-\eta\le 1,\ \eta\le 0\},$$
$$Q_2=\{x=(\xi,\eta)\in R^2 \mid -1\le\xi\le 1,\ 0\le\eta\le 0{,}5\}.$$

Для случая евклидовой метрики $\tau=\tau_0$ эта задача изучалась в [7]. Рассмотрим в R^2 замкнутые, телесные, центрально-симметричные, строго выпуклые множества

$$B_1=\{x=(\xi,\eta)\in R^2 \mid 4\xi^2+\eta^2\le 1\},$$
$$B_2=\{x=(\xi,\eta)\in R^2 \mid (\xi\pm 0{,}5)^2+\eta^2\le 1{,}25\},$$
$$B_3=\{x=(\xi,\eta)\in R^2 \mid (\xi\pm 1)^2+\eta^2\le 2\}.$$

Каждое из этих множеств определяет некоторую норму

$$\|x\|_i=\min\{\lambda>0 \mid x\in\lambda B_i\},\ x\in R^2,\ i=1,2,3.$$

Соответствующие метрики

$$\tau_i(x,y)=\|x-y\|_i,\ x,y\in R^2,\ i=1,2,3.$$

по определению удовлетворяют условию (СВ). Следовательно, для них применим метод решения задачи I, рассмотренный в этом параграфе. В результате приближенного вычисления интеграла (8) на ЭВМ ЕС-1033 получены следующие результаты:

$$\mathcal{T}_{\tau_1}(\psi_f)=0{,}691212;\qquad \mathcal{T}_{\tau_2}(\psi_f)=0{,}703505;\qquad \mathcal{T}_{\tau_3}(\psi_f)=0{,}807381.$$

Перейдем теперь к случаю, когда $1=\mu(Q_1)<\mu(Q_2)$, где Q_1 и Q_2 - компактные выпуклые подмножества , не имеющие общих внутренних точек. Рассмотрим задачу 2, где в качестве исходных распределений массы принимаются функции (4), а в качестве τ выбирается произвольная метрика из $\mathcal{P}$, для которой справедливо условие (СВ). Пусть $\gamma'\subset(\mathrm{conv}\,Q)\setminus\mathrm{int}\,Q_1$ - простая кривая, граничные точки которой принадлежат границе множества $\mathrm{conv}\,Q$. Тогда γ' разбивает $\mathrm{conv}\,Q$ на два замкнутых односвязных подмножества. Подмножество, содержащее Q_1 , обозначим через Q'. Положим

$$\gamma=\gamma'\cap Q_2,\ Q^\gamma=Q\cap Q',\ Q_2^\gamma=Q_2\cap Q';\ \varphi_\gamma(e)=\mu(e\cap Q_2^\gamma),\ e\in\mathcal{B}.$$

Непосредственно из приведенного в §I критерия оптимальности для задачи 2 вытекает следующее утверждение: мера φ_γ , удовлетворяющая условию $\varphi_\gamma(Q)=1$, доставляет минимум функции $\mathcal{V}_\tau(\varphi_2')=\rho_\tau(\varphi_1,\varphi_2')$ в задаче 2 в том и только в том случае, ког-

да для некоторого $\psi \in \Psi_{\varphi_1, \varphi_\gamma}$ найдется потенциальная функция $u \in Lip_1(X,\tau)$, для которой кривая γ является линией уровня.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечалось, кривая γ, определяющая оптимальную меру φ_γ в задаче 2, является τ-трансверсальной к линиям тока соответствующей потенциальной функции $u \in Lip_1(X,\tau)$. Это, в частности, означает, что указанная кривая γ, а также искомые функции φ_γ и $\psi \in \Psi_{\varphi_1 \varphi_\gamma}$ зависят от выбора метрики $\tau \in \mathcal{P}$, удовлетворяющей условию (СВ).

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу оптимального перемещения массы треугольника в полуполосу:

$$Q_1 = \{x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm\xi - \eta \le 1, \eta \le 0\},$$
$$Q_2 = \{x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le \xi \le 1, \eta \ge 0\}.$$

Для случая евклидовой метрики $\tau = \tau_0$ эта задача изучалась в [7]. Для каждой метрики τ_i, $i = 1,2,3$, кривая γ_i, определяющая искомую меру φ_{γ_i} в задаче 2, является графиком четной вогнутой функции $\eta_i = \eta_i(\xi), \xi \in [-1,1]$, т.е. множество Q^{γ_i} выпукло. Используя результаты настоящего параграфа, теперь легко составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\eta_i = \eta_i(\xi)$, $i = 1,2$.

Функция $\eta_1 = \eta_1(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta_1' = \frac{A[A(2C + \eta_1 \zeta_1^2) + 2B\zeta_1(\zeta_1 - 1)]}{4B^2 - 0{,}5A^2\eta_1^2}, \quad \xi \in [0,1],$$

где $\zeta_1 = \eta_1'$, $A = \zeta_1^2 + 4$, $B = \xi - \eta_1 - 1$, $C = \xi + \eta_1 - 1$.
Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\zeta_1(0) = 0, \quad \int_0^1 \eta_1(\xi)\,d\xi = 0{,}5.$$

Функция $\eta_1 = \eta_1(\xi)$, удовлетворяющая поставленным условиям, единственна. Ее значения приведены в таблице. Наименьшее значение функции $\nu_{\tau_1}(\varphi_2')$ равно $\nu_1 = 0{,}636711$.

Функция $\eta_2 = \eta_2(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta_2' = \frac{2H\mathcal{D}[H(\sqrt{5}C + 2G\eta_2\zeta_2) - \sqrt{5}BG(1 - \zeta_2)]}{(5B^2 - 2H^2\eta_2^2)(\sqrt{5}\mathcal{D} + \zeta_2)}, \quad \xi \in (0,1],$$

где $\zeta_2 = \eta_2'$, $B = \xi - \eta_2 - 1$, $C = \xi + \eta_2 - 1$, $\mathcal{D} = \sqrt{1 + \zeta_2^2}$, $G = \mathcal{D} + \sqrt{5}\zeta_2$, $H = G + \sqrt{5}$.

Соответствующие граничные условия имеют вид

$$(\rho_2)'_+(0)=-0{,}5, \quad \int_0^1 \rho_2(\xi)\,d\xi=0{,}5.$$

Функция $\rho_2=\rho_2(\xi)$, удовлетворяющая поставленным условиям, единственна. Ее значения приведены в таблице. Наименьшее значение функции $\nu_{\tau_2}(\varphi_2')$ равно ν_2 = 0,653398.

При численном решении полученных дифференциальных уравнений на ЭВМ ЕС-1033 была использована подпрограмма $DRKGS$ (метод Рунге – Кутта четвертого порядка с модификацией Гилла) пакета научных подпрограмм SSP (см. [19, с.195-207]).

В последнем случае множество $Q_2^{\delta_3}$ симметрично множеству Q_1 относительно первой координатной оси, т.е. $\rho_3=1-\xi, \xi\in[0,1]$. Линии тока соответствующей потенциальной функции параллельны второй координатной оси. Наименьшее значение функции $\nu_{\tau_3}(\varphi_2')$ равно ν_3 = 0,666667.

Значения функций $\rho_1=\rho_1(\xi)$ и $\rho_2=\rho_2(\xi)$

ξ	ρ_1	ρ_2	ξ	ρ_1	ρ_2
0,00	0,700210	0,806507	0,05	0,698659	0,781195
0,10	0,694070	0,755242	0,15	0,686526	0,728622
0,20	0,676091	0,701305	0,25	0,662813	0,673255
0,30	0,646719	0,644433	0,35	0,627822	0,614795
0,40	0,606113	0,584289	0,45	0,581564	0,552851
0,50	0,554122	0,520411	0,55	0,523705	0,486879
0,60	0,490194	0,452150	0,65	0,453421	0,416088
0,70	0,413147	0,378524	0,75	0,369035	0,339233
0,80	0,320582	0,297906	0,85	0,267002	0,254105
0,90	0,206932	0,207155	0,95	0,137564	0,155950
1,00	0,050824	0,098838			

Литература

1. Канторович Л.В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. – 1942. Т.37, № 7–8. – С.227–229.
2. Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа// Успехи мат. наук. 1948. – Т.3, вып.2. – С.225–226.
3. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном

пространстве и некоторых экстремальных задачах// Докл. АН СССР. - 1957. - Т.115, № 6. - С.1058-1061.
4. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций// Вестник ЛГУ. - 1958, № 7. - С.52-59.
5. Рубинштейн Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа// Усп. мат. наук.- 1970. - Т.25. - С.171-201.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
7. Владимиров Ю.Н. К задаче перемещения лебеговой меры на евклидовой плоскости// Оптимизация, 1985. - Вып.36(53). - С. 17-30.
8. Владимиров Ю.Н. О максимальных функциях Липшица, связанных с задачей оптимального перемещения массы// Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61). - С.96-113.
9. Ехлаков Н.П. Существование оптимальных перевозок меры Лебега с плотностями// Оптимизация. - 1974. - Вып.15(32). - С. 90-114.
10. Владимиров Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве// Оптимизация. - 1980. - Вып. 24(41). - С.60-69.
11. Владимиров Ю.Н. Добавление к статье// Оптимизация. - 1981. Вып.26(43). - С.141-142.
12. Рвачев М.А. К задаче о перемещении масс// Оптимизация. - 1973. - Вып. 9(26). - С.203-208.
13. Рвачев М.А. О решении некоторых задач монжевского типа// Докл. АН СССР. - 1974. - Т.219, № 1. - С.46-48.
14. Владимиров Ю.Н. О наилучших приближениях нормального распределения в метрике Канторовича - Рубинштейна//Оптимизация.- 1984. - Вып.34(51). - С.13-23.
15. Владимиров Ю.Н. Задачи оптимального перемещения массы и связанные с ними функции Липшица// Тез. конф. молодых ученых Сибири и Дальнего Востока. - Новосибирск: изд. НГУ, 1987. - С.21-23.
16. Владимиров Ю.Н. Задачи оптимального перемещения массы на плоскости и связанные с ними функции Липшица// Методы математического программирования и программное обеспечение/ Тез. докл. - Свердловск: изд. УНЦ АН СССР, 1987. - С.27-28.

17. Владимиров Ю.Н. Задачи наилучшего приближения распределений в метрике Канторовича- Рубинштейна// Математическое обеспечение рационального раскроя в системах автоматизированного проектирования/ Тез. докл. Ч.I. - Уфа: изд. УАИ, 1987. - С.37-38.
18. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений/ Труды МИАН, 1941. - Л.: Наука, 1976.
19. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. - Минск, 1973, вып.2.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.02.1988 г.