Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

О РАВНОВЕСНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ МАКСИМАЛЬНОГО ТЕМПА РОСТА

А.Я.Заславский

1. Рассмотрим следующую модель экономической динамики, исследование которой начато в [1] и продолжено в работах [2-4]. Моделируемая экономика состоит из n отраслей, каждая из которых выпускает один продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Через R^n_+ обозначим конус, состоящий из векторов арифметического пространства R^n с неотрицательными координатами, через K - внутренность R^n_+, а через J - тождественный оператор в R^n. Под нормой вектора (матрицы) понимается максимум модуля его координат.

Производственная деятельность экономики определяется квадратной матрицей $V=(v^{ij})$, $v^{ij}\in[0,1]$ ($i,j=1,\dots,n$) и набором отличных от нуля суперлинейных непрерывных функций $\Phi^i: R^n_+\to R_+$ ($i=1,\dots,n$). Через V^i обозначим квадратную диагональную матрицу, на диагонали которой стоят числа $v^{i1},\dots,v^{in}$ ($i=1,\dots,n$). (Эти обозначения будут в дальнейшем использоваться для произвольной квадратной матрицы V.)

Состояние экономики в момент t перед началом производственного процесса, который будет проходить в течение временного интервала $[t,t+1]$, представляет собой вектор

$$x_t=(x^1_t,\dots,x^n_t)\in(R^n_+)^n,$$

где $x^i_t\in R^n_+$ - состояние i-й отрасли в этот момент (вектор продуктов, находящийся в ее распоряжении). В момент $t+1$ непосредственно после завершения производственного процесса i-я отрасль будет располагать вектором продуктов $V^i x^i_t$ и вновь произведенным i-продуктом в количестве $\varphi^i(x_t^i)$. Совокупный вектор продуктов, равный

$$\sum_{i=1}^{n} V^i x_t^i + (\varphi^i(x_t^i))_{i=1}^{n},$$

которым располагает экономика, перераспределяется между ее отраслями. Совокупность состояний, в которые в момент $t+1$ может перейти экономика, задается с помощью суперлинейного нормального отображения $a(\varphi, V)$ (здесь и далее используется терминология монографий [5,6]), определенного формулой

$$a(\varphi, V)(x_t) = \left\{ x_{t+1} \in (R_+^n)^n : \sum_{i=1}^{n} (x_{t+1}^i - V^i x_t^i) \leq (\varphi^i(x_t^i))_{i=1}^{n} \right\}.$$

Пусть $a'(\varphi, V)$ – отображение, двойственное к $a(\varphi, V)$. Через $\alpha(\varphi, V)$ обозначим неймановский темп роста отображения $a(\varphi, V)$.

В работах [1-4] исследовалась модификация рассматриваемой нами модели, в которой перераспределению между отраслями подлежал только вновь произведенный продукт. Такая модификация модели несомненно ближе к реальности, но с отображением $a(\varphi, V)$ удобнее работать. Этим и объясняется наш выбор в настоящей статье. В оправдание ему можно заметить, что свойства модели, определенной отображением $a(\varphi, V)$, и ее модификации во многом тождественны. У них один неймановский темп роста; если $\|V\| < \alpha(\varphi, V)$, то множества их неймановских векторов совпадают, а в том случае, когда $\alpha(\varphi, V) > \|V\|$, магистраль модифицированной модели – луч, порожденный вектором, содержащимся в K^n. Этот же луч – магистраль $a(\varphi, V)$, всякая траектория неймановского темпа роста отображения $a(\varphi, V)$, начиная с некоторого момента времени T, становится траекторией модифицированной модели. Это означает, что обмениваться продуктами, отличными от вновь произведенных, приходится только на конечном временном интервале, длина которого зависит от того, насколько непропорционально распределены начальные векторы между отраслями.

Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – стандартный базис в R^n. Введем следующие определения.

Функция $\psi : R_+^n \to R_+$ называется строго суперлинейной, если она суперлинейна, причем для любых $x \in K$, $y \in R_+^n$ таких, что y не пропорционален x, выполняется $\psi(x+y) > \psi(x) + \psi(y)$.

Функция $\psi: R_+^n \to R$, определенная формулой

$$\psi(x) = \gamma(\beta_1(x^1)^\rho + \ldots + \beta_n(x^n)^\rho)^{1/\rho}$$

$$(x \in R_+^n, \beta_i > 0, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \gamma > 0, \rho < 1, \rho \neq 0),$$

называется CES-функцией, а набор $(\gamma, \beta_i, \rho)(\psi) = (\gamma, \beta_i, \rho)$- ее координатами. Функция $\psi: R_+^n \to R$, определенная формулой

$$\psi(x) = \gamma(x^1)^{\beta_1} \ldots (x^n)^{\beta_n} (x \in R_+^n, \gamma > 0, \beta_i > 0, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1),$$

называется функцией Кобба - Дугласа, а набор $(\gamma, \beta_i)(\psi) = (\gamma, \beta_i)$ - ее координатами.

Символом $\mathcal{L}$ обозначим совокупность квадратных матриц $V = (v^{ij})$ размерности n таких, что $v^{ij} \in [0, 1]$. Символом $\mathfrak{M}$ обозначим совокупность всевозможных наборов $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$, где $\psi^i: R_+^n \to R_+$ ($i = 1, \ldots, n$) - ненулевая суперлинейная непрерывная функция. В пространстве $\mathfrak{M}$ вводится топология равномерной сходимости функций на пересечении единичного шара, центр которого в нуле, с R_+^n. Через $\tilde{\mathfrak{M}}$ обозначим совокупность всевозможных наборов $\psi \in \mathfrak{M}$, где ψ^i дифференцируема на K ($i = 1, \ldots, n$). В пространстве $\tilde{\mathfrak{M}}$ вводится топология равномерной сходимости функций на пересечении единичного шара, центр которого в нуле, с R_+^n и равномерной сходимости их градиентов на компактных подмножествах K. Положим

$\mathfrak{M}_0 = \{\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n) \in \mathfrak{M}: \psi^i$ - строго суперлинейная функция$\}$,

$$\tilde{\mathfrak{M}}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \tilde{\mathfrak{M}},$$

$\mathfrak{M}_k = \{\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n) \in \mathfrak{M}_0 : \psi^i$ - функция Кобба - Дугласа$\}$,

$\mathfrak{M}_c = \{\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n) \in \mathfrak{M}_0 : \psi^i$ - CES-функция, $\rho(\psi^i) > 0\}$.

Можно показать, что если $V \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathfrak{M}_k \cup \mathfrak{M}_c$, то $\|V\| < \alpha(\varphi, V)$, отображение $a(\varphi, V)$ имеет неймановский вектор $\chi \in K^n$. Справедливы также

ТЕОРЕМА I. Существует открытое всюду плотное подмножество $E \subset \mathfrak{M}_0 \times \mathcal{L}$ $(\tilde{\mathfrak{M}}_0 \times \mathcal{L}, \mathfrak{M}_k \times \mathcal{L}, \mathfrak{M}_c \times \mathcal{L})$ такое, что для любых

$(\varphi,V)\in E$ неймановский темп роста $\alpha(\varphi,V)>\|V\|$, магистраль $a(\varphi,V)$ – луч, порожденный вектором, содержащимся в K^n.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V\in\mathcal{L}$. Существует открытое всюду плотное множество $E\subset\mathfrak{M}_0(\tilde{\mathfrak{M}}_0,\mathfrak{M}_k,\mathfrak{M}_0)$ такое, что для любого $\varphi\in E$ выполняется $\alpha(\varphi,V)>\|V\|$, магистраль $a(\varphi,V)$ – луч, порожденный вектором, содержащимся в K^n.

Одной из наиболее интересных задач экономической динамики является вопрос о возможности пошагового построения траектории модели, имеющей неймановский темп роста, с использованием равновесного механизма. Отметим, что идея применения равновесного механизма для конструирования траекторий, близких к оптимальным, и первые результаты, полученные в этом направлении, принадлежат А.М.Рубинову.

В каждый момент времени $t+1$ непосредственно после окончания производственного процесса происходит перераспределение совокупного вектора продуктов. Естественно предположить, что каждый из участников (отраслей) имеет свою функцию полезности φ^i $(i=1,\ldots,n)$, которую стремится максимизировать при перераспределении. Мы также предполагаем существование центра, назначающего в момент $t+1$ цены и определяющего доход каждого из участников. Задача центра состоит в построении последовательности цен и доходов, которые в любой момент t оказываются равновесными, а сама строящаяся по ним траектория отображения – траекторией неймановского темпа роста. Дело в том, что из всех траекторий модели выделяются два класса "хороших". Это оптимальные траектории и близкие к ним траектории неймановского темпа роста [5,6]. Задача пошагового построения оптимальных траекторий очень сложна и поэтому центр и все участники должны быть удовлетворены, если им с помощью равновесного механизма удастся построить траекторию неймановского темпа роста. Вместе с тем, траектория, не имеющая неймановского темпа роста, заведомо не может никого устроить.

Введем следующие определения. Пусть $\varphi,\psi\in\mathfrak{M}$, $V\in\mathcal{L}$, U – n-мерная квадратная матрица, состоящая из положительных элементов. Набор $(x,y,f,g)(x,y\in(R^n_+)^n,\ f,g\in R^n_+\setminus\{0\})$

называется (Φ, V, ψ, U) - равновесным, если y^i является решением задачи

$$\psi^i(z) \to \max, z \in R^n_+, (U^i f, z) \leq g^i, \qquad (I)$$

причем $\sum_{i=1}^{n}(y^i - V^i x^i) = (\Phi^i(x^i))_{i=1}^{n}$.

Траектория (x_t) отображения $a(\Phi, V)$ называется (Φ, V, ψ, U)-равновесной, если существуют последовательности $(f_t)_{t=0}^{\infty}, (g_t)_{t=0}^{\infty} \subset R^n_+ \setminus \{0\}$ такие, что для любого целого $t \geq 0$ набор $(x_t, x_{t+1}, f_t, g_t) - (\Phi, V, \psi, U)$ равновесный.

В настоящей работе при заданных Φ, V, ψ строится матрица U, при которой из любой точки с положительными координатами выходит (Φ, V, ψ, U) - равновесная траектория неймановского темпа роста, а также дан способ пошагового построения этой траектории. Эти результаты получены в предположении, что ψ^i ($i = 1, \dots, n$) - либо функция Кобба - Дугласа, либо CES-функция.

2. Символом $\mathcal{D}$ обозначим совокупность квадратных матриц размера n, у которых все элементы положительны. Через $\psi'(x)$ в дальнейшем обозначается градиент функции ψ в точке x. Символом M обозначим множество $\psi \in \mathfrak{M}$ таких, что при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ функция ψ^i либо функция Кобба - Дугласа, либо CES- функция, причем $\rho(\psi^i) > 0$.

Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}, \psi \in \tilde{\mathfrak{M}}, V \in \mathcal{L}, U \in \mathcal{D}$, причем $\psi^i(x+y) > \psi^i(x) (x \in K, y \in R^n_+ \setminus \{0\}, i = 1, \dots, n)$, магистраль $a(\Phi, V)$- луч. Пусть, далее, $\alpha(\Phi, V) > \|V\|, X \in K^n, \alpha(\Phi, V) X \in a(\Phi, V) X$, $a = a(\Phi, V), \alpha = \alpha(\Phi, V)$. Справедлива

ЛЕММА I. Пусть $(x, y, f, g) - (\Phi, V, \psi, U)$ - равновесный набор, $x, y \in K^n, g, f \in R^n_+ \setminus \{0\}$. Тогда $f, g \in K$, векторы $(U^i)^{-1}(\psi^i)'(y^i)$ пропорциональны f $(i = 1, \dots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f \notin K$. Не ограничивая общности, считаем, что $f^1 = 0$. Существует s такое, что $g^s > 0$. Тогда $y^s + e^1$ - допустимая точка задачи (I) при $i = s, \psi^s(y^s + e^1) = \psi^s(y^s)$. Это противоречит предположениям, сделанным относительно ψ. Следовательно, $f \in K$. Отсюда и из определения (Φ, V, ψ, U)-равновесного набора легко вытекает оставшаяся часть леммы.

ЛЕММА 2. Пусть (x_t) – (φ, V, ψ, U)-равновесная траектория отображения a, имеющая неймановский темп роста. Тогда векторы $(U^i)^{-1}(\psi^i)'(X^i)$ $(i=1,\dots,n)$ пропорциональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют последовательности $(f_t)_{t=0}^{\infty}$, $(g_t)_{t=0}^{\infty} \subset R_+^n \setminus \{0\}$ такие, что для любого целого $t \geq 0$ набор (x_t, x_{t+1}, f_t, g_t) – (φ, V, ψ, U) -равновесный. Так как магистраль a – луч, то найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\alpha^{-t} x_t \to \lambda X$ при $t \to \infty$. Существует натуральное число T такое, что при $t \geq T$ выполняется $x_t \in K^n$. По лемме I имеем, что векторы

$$(U^i)^{-1}(\psi^i)'(x_{t+1}^i) \ (i=1,\dots,n)$$

пропорциональны друг другу. Переходя к пределу при $t \to \infty$, установим справедливость леммы.

Лемма 2 дает нам необходимые условия для определения матрицы U при заданных φ, V, ψ. Заметим, что эти условия определяют U с точностью до умножения справа и слева на диагональные матрицы с положительными элементами. В определенном смысле это означает ее единственность, так как совокупности (φ, V, ψ, U) и (φ, V, ψ, AUB) -равновесных траекторий (A, B – диагональные матрицы, на диагонали которых стоят положительные элементы) совпадают.

3. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_0$, $V \in \mathcal{L}$, $\alpha(\varphi, V) > \|V\|$, $X \in K^n$, $\alpha(\varphi, V)X \in a(\varphi, V)X$, $\varphi^i(x+y) > \varphi^i(x)$ $(x \in K, y \in R_+^n \setminus \{0\})$, $\psi \in M$. Положим $a = a(\varphi, V)$, $\alpha = \alpha(\varphi, V)$. Справедлива

ЛЕММА 3. $\alpha X = \sum_{i=1}^{n} V^i X^i + (\varphi^i(X^i))_{i=1}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – неймановский вектор отображения a'. Из предположения 2 [I] вытекает, что $p = (z, \dots, z)$, где $z \in R_+^n \setminus \{0\}$, причем

$$\alpha z - V^i z \in z^i \partial \varphi^i(X^i) \ (i=1,\dots,n). \tag{2}$$

Из строгой суперлинейности φ^i на K вытекает, что $z \in K$. Так как $(\alpha p, X) = sup\{(p, y) : y \in a(X)\}$, то

$$\alpha X = \sum_{i=1}^{n} V^i X^i + (\varphi^i(X^i))_{i=1}^n.$$

Лемма доказана.

Пусть $i \in \{1,\dots,n\}$. Если ψ^i - CES-функция, полагаем $(\gamma_i,\beta_i,\rho_i)=(\gamma,\beta,\rho)(\psi^i)$, если же ψ^i - функция Кобба - Дугласа, то $(\gamma_i,\beta_i)=(\gamma,\beta)(\psi^i)$, $\rho_i=0$. Пусть, далее, $U\in\mathcal{D}$, $(u^{i1},\dots,u^{in})=(\psi^i)'(X^i)$ $(i=1,\dots,n)$.

Дадим способ пошагового построения $(\varPhi V,\psi,U)$-равновесной траектории, выходящей из произвольной точки $x_0\in K^n$. Для $x\in(R^n_+)^n$ положим

$$q(x)=\sup\{\theta\in R_+ : \theta X\le x\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть $x\in K^n$, $z=\sum_{i=1}^n V^i x^i+(\varPhi^i(x^i))^n_{i=1}$, число $\lambda_j>0$ $(j=1,\dots,n)$ является решением следующего уравнения:

$$\sum_{i=1}^n \alpha q(x)\lambda_j^{1/(\rho_i-1)}X^{ij}=z^j, \tag{3}$$

$$y^{ij}=\lambda_j^{1/(\rho_i-1)}X^{ij}\alpha q(x)\quad (i,j=1,\dots,n). \tag{4}$$

Тогда (x,y,f,g) — $(\varPhi,V,\psi,U)$- равновесный набор, где $f=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $g^i=(U^i f,y^i)$ $(i=1,\dots,n)$, причем $q(y)\ge\alpha q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $z\ge\alpha q(x)\sum_{i=1}^n X^i$, уравнение (3) имеет единственное решение $\lambda_j\in(0,1]$, $\sum_{i=1}^n y^i=z$, $y\ge\alpha q(x)X$. Вектор $(\psi^i)'(y^i)$ пропорционален вектору

$$(\beta_{ij}(y^{ij})^{\rho_i-1})^n_{j=1}=(\alpha q(x))^{\rho_i-1}(\beta_{ij}(X^{ij})^{\rho_i-1}\lambda_j)^n_{j=1},$$

который, в свою очередь, пропорционален $U^i\lambda$. Отсюда вытекает справедливость леммы.

Лемма 4 дает нам простой способ пошагового построения $(\varPhi,V,\psi,U)$-равновесной траектории. Пусть $x_0\in K^n$, определены $x_0,\dots,x_t\in K^n$, $f_0,\dots,f_{t-1}$, $g_0,\dots,g_{t-1}\in K$. Решим уравнение (3) с

$$z=\sum_{i=1}^n V^i x^i_t+(\varPhi^i(x^i_t)),\ x=x_t.$$

Найдем y из (4) и положим

$$x_{t+1}=y,\ f_t=(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\ g^i_t=(U^i f_t,x^i_{t+1}).$$

Очевидно, что $x_{t+1}\in K^n$, $f_t, g_t\in K$. По лемме 4 набор (x_t,x_{t+1},f,g_t) - $(\varPhi,V,\psi,U)$-равновесный, $q(x_{t+1})\ge\alpha q(x_t)$. Индукцией по t доказывается, что траектория

(x_t) – (φ, V, ψ, U)-равновесна, причем $x_t \geqslant \alpha^t q(x_0) X$. Таким образом, при заданных φ, V, ψ существует единственная с точностью до умножения справа и слева на диагональные матрицы с положительными элементами матрица U (в качестве U можно взять, например, матрицу

$$\left(\frac{\partial \psi^i(X^i)}{\partial x^j}\right) \quad (i,j = 1, \ldots, n)),$$

для которой из любой точки $x_0 \in K^n$ выходит (φ, V, ψ, U)-равновесная траектория, строящаяся с помощью приведенного выше алгоритма.

Пусть наша модель определяется отображением $a(\varphi, V)$. Выясним, при каких функциях $\psi \in M$ в качестве U можно брать матрицу, всю состоящую из единичных элементов. Легко видеть, что это осуществимо тогда и только тогда, когда векторы $(\psi^i)'(X^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ пропорциональны. Последнее условие равносильно пропорциональности векторов

$$(\beta_{ij}(X^{ij})^{1/(\rho_i - 1)})_{j=1}^n \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $(\beta_i, \rho_i) = (\beta, \rho)(\psi^i)$, если ψ^i – CES-функция, $\rho_i = 0$, $\beta_i = \beta(\psi^i)$, если ψ^i – функция Кобба – Дугласа. Теперь понятно, как строить функции полезности ψ^i, которым будет соответствовать матрица U, состоящая из единичных элементов.

Заметим, что если $\varphi \in M$, то в качестве функций полезности можно брать выпуск продукта, т.е. $\psi = \varphi$. В этом случае U, разумеется, не обязана состоять из единичных элементов, но это произойдет, если $V^1 = \ldots = V^n$, так как векторы $(\psi^i)'(X^i) = (\varphi^i)'(X^i)$ будут пропорциональны друг другу в силу (2).

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_K$, (x, y, f, q) – (φ, V, ψ, U) – равновесный набор, определенный при формулировке леммы 4. Доход i-го участника вычисляется здесь следующим образом:

$$q^i = (U^i f, y^i) = \alpha q(x) \sum_{j=1}^n u^{ij} X^{ij} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

4. Пусть $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{M}}_o$, $V \in \mathcal{L}$, $\alpha(\varphi, V) > \|V\|$, $X \in K^n$, $\alpha(\varphi, V) X \in a(\varphi, V) X$. Положим $a = a(\varphi, V)$, $\alpha = \alpha(\varphi, V)$. Набор (x, y, f) $(x, y \in (R_+^n)^n$, $f \in R_+^n \setminus \{0\}$ называется a-равновесным, если y^i является решением задачи

$$\varphi^i(z) \longrightarrow \max,\ z \in R^n_+,$$
$$(f, z - V^i x^i) \le f^i \varphi^i(x^i), \qquad (5)$$

причем $y \in a(x)$.

Траектория $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ отображения a называется a-равновесной, если для любого t существует $f_t \in R^n_+ \setminus \{0\}$ такое, что набор (x_t, x_{t+1}, f_t) – a-равновесный.

ЛЕММА 5. Пусть $x, y \in K^n$, $y \in a(x)$, $f \in R^n_+ \setminus \{0\}$. Набор (x, y, f) – a-равновесный тогда и только тогда, когда $f \in K$, векторы $(\varphi^i)'(y^i)$ пропорциональны f,

$$(f, y^i - V^i x^i) = f^i \varphi^i(x^i)\ (i = 1, \dots, n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть набор (x, y, f) – a-равновесный. Предположим, что $f \notin K$. Не ограничивая общности, считаем, что $f^1 = 0$. Существует s такое, что $f^s > 0$. Имеем, что y^s-решение задачи (5) при $i = s$. Тогда $y^s + e^1$ удовлетворяет ограничениям задачи (5), $\varphi^s(y^s + e^1) = \varphi^s(y^s)$. Это противоречит строгой суперлинейности φ^s. Следовательно, $f \in K$. Теперь нетрудно убедиться в справедливости леммы.

Для $x \in (R^n_+)^n$ через $\tilde{x}$ обозначим матрицу (x^{ij}) размера $n \times n$, а через A' – матрицу, транспонированную к матрице A. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_K$, $V^1 = \dots = V^n$, на диагонали V^1 стоят числа $v^1, \dots, v^n$; $(\gamma_i, \beta_i) = (\gamma, \beta)(\varphi^i)(i = 1, \dots, n)$. В этом случае $\alpha > \|V\|$, отображение a имеет неймановский вектор $X \in K^n$. Положим $\beta(\varphi) = (\beta_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Через $D_1(x, V)$ $(D_2(x))$ обозначим диагональную матрицу, на диагонали которой стоят числа $\varphi^j(x^j) + V^j \sum_{i=1}^{n} x^{ij}$ $(j = 1, \dots, n)$ $(\varphi^j(x^j)$ $(j = 1, \dots, n))$.

ЛЕММА 6. Пусть $x \in K^n$, $y \in (R^n_+)^n \setminus \{0\}$, $f \in R^n_+ \setminus \{0\}$. Набор (x, y, f) a-равновесен тогда и только тогда, когда

$$f \in K,\ y^{ij} = \beta_{ij}(f^j)^{-1}[f^i \varphi^i(x^i) + (f, V^i x^i)]\ (i, j = 1, \dots, n), \qquad (6)$$
$$f = \mathcal{A}(x, V) f, \qquad (7)$$

где

$$\mathcal{A}(x, V) = D_1(x, V)^{-1} B(\varphi)'(D_2(x) + \tilde{x} V').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in K$, выполняются соотношения (6), (7). Очевидно, что $y \in K^n$. Из соотношения (6) вытекает, что векторы $(\varphi^i)'(y^i)$ пропорциональны f. Из соотношения (7) вытекает, что для $j=1,\dots,n$ выполняется

$$f^j(\varphi^j(x^j)+v^j\sum_{i=1}^{n}x^{ij})=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}(f^i\varphi^i(x^i)+(f,V^i x^i)).$$

Из последнего соотношения и соотношения (6) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}y^{ij}=\varphi^j(x^j)+v^j\sum_{i=1}^{n}x^{ij},$$

$$(f,y^j)=f^j\varphi^j(x^j)+(f,V^j x^j)\quad(j=1,\dots,n).$$

По лемме 5 набор (x,y,f) a-равновесный.

Пусть набор (x,y,f) a-равновесный. Предположим, что $f\in K$. Не ограничивая общности, считаем, что $f^1=0$. Существует s такое, что $f^s>0$. Тогда $\varphi^s(y^s)>0, y^s\in K$, $\varphi^s(y^s+e^1)=\varphi^s(y^s)$. Это противоречит строгой суперлинейности φ^s. Следовательно, $f\in K$. Отсюда вытекает, что $y\in K^n$. Из леммы 5 следует, что векторы $(\varphi^i)'(y^i)$ пропорциональны f,

$$\sum_{i=1}^{n}(y^i-V^i x^i)=(\varphi^i(x^i)),\ (f,y^i)=(f,V^i x^i)+f^i\varphi^i(x^i)\ (i=1,\dots,n).$$

Существуют числа $\theta^i>0$ $(i=1,\dots,n)$ такие, что

$$\beta_{ij}(y^{ij})^{-1}=(\theta^i)^{-1}f^j\ (j=1,\dots,n).$$

Имеем $(f,V^i x^i)+f^i\varphi^i(x^i)=(f,y^i)=\theta^i\ (i=1,\dots,n)$.
Отсюда вытекает соотношение (6). Имеем, далее,

$$\varphi^j(x^j)+v^j\sum_{i=1}^{n}x^{ij}=\sum_{i=1}^{n}y^{ij}=(f^j)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(f^i\varphi^i(x^i)+(f,V^i x^i))\beta_{ij}$$
$$(j=1,\dots,n).$$

Из этого соотношения вытекает справедливость соотношения (7). Лемма доказана.

Заметим, что уравнение $f=A(x,V)f$ при $x\in K^n$ всегда имеет единственное с точностью до множителя решение, принадлежащее K, так как все элементы матрицы $A(x,V)$ положительны,

$$(A(x,V))'(\varphi^j(x^j)+v^j\sum_{i=1}^{n}x^{ij})_{j=1}^{n}=(\varphi^j(x^j)+v^j\sum_{i=1}^{n}x^{ij})_{j=1}^{n}.$$

Из леммы 6 и сделанного нами замечания вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Из точки $x_0\in K^n$ выходит единственная a-равновесная траектория.*

Лемма 6 дает нам способ пошагового построения a-равновесных траекторий.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $V=0$, $a=a(\varphi,0)$, $d\in K$, $\beta(\varphi)'d=d$, $x_0\in K^n$. Существует и единственна a-равновесная траектория (x_t) отображения a, причем

$$x_{t+1}^{ij}=(G(x_t))^{ij}=d^i(d^j)^{-1}\beta(\varphi)_{ij}\varphi^j(x_t^j)\ (i,j=1,\ldots,n). \qquad (8)$$

Траектория (x_t) имеет неймановский темп роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность a-равновесной траектории следует из теоремы 3, справедливость соотношения (8) из леммы 6. Из монотонности отображения G и из соотношения $G(X)=\alpha X$ вытекает, что a-равновесная траектория (x_t) имеет неймановский темп роста.

Представляет интерес выяснить, верна ли теорема 4 при $V\neq 0$. Справедлив следующий результат, который будет доказан в другом месте.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $V\in\mathcal{L}$, $v^{ij}\neq v^{ij}$ при некоторых $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда существует открытое всюду плотное множество $E\subset\mathfrak{M}_k$ такое, что для любого $\varphi\in E$ выполняется $\alpha(\varphi,V)>\|V\|$, магистраль $a(\varphi,V)$ – луч, порожденный вектором, содержащимся в K^n, не существует $a(\varphi,V)$-равновесной траектории отображения $a(\varphi,V)$, имеющей неймановский темп роста.

Литература

1. Рубинов А.М. Об одной нелинейной модели леонтьевского типа// Оптимизация. – 1982. – Вып.32(49). – С.109-127.
2. Заславский А.Я. Асимптотика оптимальных траекторий одной модели леонтьевского типа, I// Оптимизация. – 1985. – Вып. 36(53). – С.87-100.
3. Заславский А.Я. Асимптотика оптимальных траекторий одной модели леонтьевского типа, II// Оптимизация. – 1986. – Вып. 37(54). – С.108-120.

4. Заславский А.Я. О единственности оптимальной траектории в одной нелинейной модели леонтьевского типа// Математические методы оптимизации и управления в сложных системах. - Калинин, 1986. - С.43-56.
5. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
6. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.

Поступила в ред.-изд. отдел
01.07.1987 г.