Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

МОДЕЛИ ВОСПРОИЗВОДСТВА ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.И.Круглов

Рассматривается модель экономической динамики, описанная в [1]. Модель содержит m ячеек, в каждой из которых производится n видов продуктов. Произведенный продукт ячейки перераспределяют между собой, перераспределенные продукты участвуют в дальнейшем процессе производства.

В общем случае процесс производства в каждой из ячеек описывается в момент t многозначным отображением a_t^i, определенным на конусе R_+^n. Здесь будем считать, что отображение a_t^i имеет вид [2]:

$$a_t^i(x)=\{y: P_t^i y\leq x,\ y\geq 0\},\ x\geq 0.$$

Здесь P_t^i – сублинейный возрастающий оператор [2]; в частности, можно считать, что P_t^i линеен, тогда он задается положительной матрицей, которую обозначим через C_t^i (размерности $n\times n$). В этом случае процесс производства в ячейках описывается динамической матричной моделью Леонтьева [3], где C_t^i – производственная матрица i-й ячейки на t-м шаге производства.

Далее рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{D}$, заданное на конусе $(R_+^n)^m$. Множество $\mathcal{D}(Y)$ состоит из векторов $z=(z^1,\dots,z^m)$, которые можно получить в результате перераспределения вектора Y между ячейками. Учитывая, что в нашей модели предполагается сохранение общего количества продуктов при распределении, запишем

$$\mathcal{D}(Y)=\{x\geq 0:\sum_{i=1}^{m} x^i=\sum_{i=1}^{m} y^i\},\ Y=(y^1,\ldots,y^m)\geq 0.$$

Для суперпозиции отображений $A_t=a_t^1\times\ldots\times a_t^m$ и $\mathcal{D}$ получим

$$(\mathcal{D}\circ A_t)(X)=\{\tilde{X}=(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^m)\geq 0:\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}^i=\sum_{i=1}^{m} y^i,$$

$$P_t^i y^i\leq x^i,\ y^i\geq 0\},\quad X=(x^1,\ldots,x^m)\geq 0 .$$

Модель, имеющую в момент t производственное отображение $(\mathcal{D}\circ A_t)$, назовем моделью воспроизводства леонтьевского типа. Как известно, последовательность $\{X(t)\}$ называется траекторией этой модели, если $X(t+1)\in(\mathcal{D}\circ A_t)(X(t))$, $t=0,1,\ldots$

Сопряженное отображение [4] для многозначного отображения $(\mathcal{D}\circ A_t)$ имеет вид

$$(\mathcal{D}\circ A_t)^*=A_t^*\circ\mathcal{D},$$

где $A_t^*=(a_t^1)^*\times\ldots\times(a_t^m)^*$.

Приведем описание отображения $(a_t^i)^*$ [2]:

$$(a_t^i)^*(g)=\{f\geq 0:[f,P_t^i y]\geq[g,y]\ \forall y\geq 0\},\ g\geq 0.$$

Используя [1], получим

$$(\mathcal{D}\circ A_t)^*(F)=\{\tilde{F}=(\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^m)\geq 0:[\tilde{f}^i,P_t^i y]\geq[\hat{f},y],$$

$$\forall y\geq 0\},\ F=(f^1,\ldots,f^m)\geq 0,$$

где $\hat{f}=(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n)$ и $\hat{f}_k=\max_{i=1,\ldots,m} f_k^i$.

Последовательность отображений $(\mathcal{D}\circ A_t)^*$ определяет модель, двойственную к исходной. Последовательность $\{F(t)\}$ является траекторией этой модели, если $F(t)\in(\mathcal{D}\circ A_t)^*(F(t+1))$, $t=0,1,\ldots$ Непосредственно из определения сопряженного отображения следует, что если $\{X(t)\}$ – траектория исходной модели, а $\{F(t)\}$ – траектория двойственной модели, то $[F(0),X(0)]\geq\ldots\geq[F(t),X(t)]\geq\ldots$

ТЕОРЕМА. Для того чтобы $[F(t),X(t)]=$ $=[F(t+1),X(t+1)]$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i=1,\ldots,m$ выполнялись следующие условия:

1) $[f^i(t),x^i(t)-P_t^i y^i(t+1)]=0;$

2) $[f_{\wedge}^{i}(t), P_t^i y^i(t+1)] = [\hat{f}(t+1), y^i(t+1)]$;

3) $[\hat{f}(t+1) - f^i(t+1), x^i(t+1)] = 0$.

Доказательство теоремы опускаем.

Пусть $\{X(t)\}$ – траектория исходной модели. Траекторию $\{F(t)\}$ двойственной модели, для которой выполнено $[F(t), X(t)] = [F(t+1), X(t+1)] > 0$, $t = 0, 1, \ldots$, называют характеристикой траектории $\{X(t)\}$.

В дальнейшем будем рассматривать только траектории, допускающие характеристику.

Известно [4], что каждая траектория, допускающая характеристику, эффективна. При этом каждая эффективная траектория, исходящая из точки $X(0) = (x^1(0), \ldots, x^m(0))$, у которой $\sum_{i=1}^{m} x_\kappa^i(0) > 0$ для всех $\kappa = 1, \ldots, n$, допускает характеристику $\{F(t)\}$ вида $F(t) = f^\Delta(t)$, где $f^\Delta(t) = (f(t), \ldots, f(t))$ [I].

Пусть $f > 0$. Положим для $i = 1, \ldots, m$, $t = 0, 1, \ldots$

$$\ell_t^i(f; g) = \max_{[f, P_t^i y] \le 1} [g, y],\ g \ge 0\ \forall y \ge 0.$$

Определим оператор $\mathcal{L}_t(f; \cdot) : R_+^n \longrightarrow R_+^n$ равенством

$$\mathcal{L}_t(f; g) = (\ell_t^1(f; g), \ldots, \ell_t^m(f; g)).$$

Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}_t(f; \cdot)$ сублинеен и возрастает.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{X(t)\}$ – эффективная траектория, $\{f^\Delta(t) > 0\}$ – ее характеристика. Тогда $f(t+1)$ есть решение уравнения*

$$\mathcal{L}_t(f(t); f) = \mathbb{1}, \tag{I}$$

где $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ – единичный вектор размерности m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$(a_t^i)(x^i(t)) = \{y^i(t+1) \ge 0 : P_t^i y^i(t+1) \le x^i(t)\}.$$

Пусть $f^i(t)$, $g^i(t+1) \ge 0$ – такие векторы цен, что

$$f^i(t) \in (a_t^i)^*(g^i(t+1)) \quad \text{и} \quad [f^i(t), x^i(t)] = [g^i(t+1), y^i(t+1)].$$

Имеем

$$\frac{[g^i(t+1), y]}{[f^i(t), x^i(t)]} \le 1 \quad \forall x^i(t) \ge 0,\ y \in a_t^i(x^i(t)).$$

Следовательно,

$$\max_{\substack{x^i(t)\geq 0\\ y\in a_t^i(x^i(t))}} \frac{[g^i(t+1),y]}{[f^i(t),x^i(t)]}\leq 1.$$

Мы рассматриваем движение вдоль эффективной траектории, где для точек $x^i(t)$, $y^i(t+1)$ имеет место равенство

$$\frac{[g^i(t+1),y^i(t+1)]}{[f^i(t),x^i(t)]}=1,$$

поэтому

$$\max_{\substack{x^i(t)\geq 0\\ y\in a_t^i(x^i(t))}} \frac{[g^i(t+1),y]}{[f^i(t),x^i(t)]}=1.$$

Поскольку движение осуществляется вдоль эффективной траектории, векторы цен на характеристике во всех ячейках одинаковы. Откуда имеем

$$\max_{y\in Q_0}[f(t+1),y]=1,$$

где

$$Q_0=\{y\geq 0:\exists x^i(t)\geq 0:[f(t),x^i(t)]=1,\ x^i(t)\geq P_t^i y\}.$$

Заметим

$$\max_{y\in Q_0}[f(t+1),y]=\ell_t^i(f(t);f(t+1)),$$

что доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Уравнение (I) может служить для определения вектора цен $f(t+1)$. Подчеркнем, что оператор $\angle_t(f(t);\cdot)$ полностью определяется вектором цен $f(t)$ и никак не зависит от исходной траектории $\{X(t)\}$ и характеристических цен $f(\tau)$ при $\tau\neq t$.

СЛЕДСТВИЕ. Когда отображения P_t линейны, оператор $\angle_t(f;\cdot)$ определен:

$$\ell_t^i(f;g)=\max_{k=1,\dots,n}\lambda_k^i(t)g_k,$$

а уравнение (I) имеет вид

$$f_k(t+1)=\min_{i=1,\dots,m} 1/\lambda_k^i(t)g_k, \tag{2}$$

где $\lambda_k^i(t)=1/(\sum_{j=1}^{n}(C_t^i)^*_{kj}\,f_j(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\max_{y \in Q_1} [f(t+1), y] = 1,$$

где $Q_1 = \{ y \geq 0 : [(C_t^i)^* f(t), y] \leq 1 \}$.

Максимум достигается в одной из крайних точек множества Q_1. Крайние точки имеют вид

$$\bar{y}_k = \lambda_k^i(t) e_k = (0, \ldots, 0, \lambda_k^i(t), 0, \ldots, 0), \; k = 1, \ldots, n; \bar{y}_{n+1} = 0.$$

Таким образом,

$$l_t^i(f(t), f(t+1)) = \max_{y \in Q_1} [f(t+1), y] = \max_{\bar{y}_k, k=1,\ldots,n} [f(t+1), \bar{y}_k] = \max_{k=1,\ldots,n} \lambda_k^i(t) f_k(t+1) = 1.$$

Имеем следующую систему уравнений относительно координат вектора $f(t+1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{k=1,\ldots,n} \lambda_k^1(t) f_k(t+1) = 1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \max\limits_{k=1,\ldots,n} \lambda_k^m(t) f_k(t+1) = 1. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Коэффициенты $\lambda_k^i(t)$ для системы (3) находятся из условия

$$[(C_t^i)^* f(t), \bar{y}_k] = 1,$$

откуда

$$1/\lambda_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} (C_t^i)^*_{kj} f_j(t).$$

В работе [5] показано, что когда система (3) имеет решение, оно определяется величиной

$$f_k(t+1) = \min_{i=1,\ldots,m} 1/\lambda_k^i(t),$$

что доказывает следствие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Укажем, когда система уравнений (3) имеет решение. Обозначим через S_k $(k=1,\ldots,n)$ множество всех строк S матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1(t) & \ldots & \lambda_n^1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^m(t) & \ldots & \lambda_n^m(t) \end{pmatrix}$$

таких, что

$$\lambda_k^s(t) = \max_{i=1,\dots,m} \lambda_k^i(t).$$

Множество всех строк матрицы обозначим через S.

В [5] утверждается, что система (3) имеет решение, когда множества $S_1,\dots,S_n$ составляют покрытие S, т.е. в совокупности исчерпывают S.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В линейном случае рассматриваемая модель переходит в модель Неймана - Леонтьева [6]. В [6] содержится приведенное выше следствие. Оно доказывается с помощью методов линейного программирования.

Используя теорему 2, можем описать алгоритм нахождения эффективной траектории $\{X(t)\}$, исходящей из начального $X(0)$ при наличии начального вектора цен $F(0)$.

Векторы цен $f^{\Delta}(t) > 0$ для $X(t)$, лежащих на эффективной траектории, находятся из (I). По $f^{\Delta}(t)$ определяем $f^{\Delta}(t+1)$.

Пусть $x(t)$ - вектор суммарного количества продуктов во всех ячейках перед t-м шагом производства:

$$x(t) = y^1(t) + \dots + y^m(t).$$

Тогда, чтобы найти распределение $x(t)$ по ячейкам, т.е. найти вектор $X(t) = (x^1(t),\dots,x^m(t))$, а также получить вектор $Y(t+1) = (y^1(t+1),\dots,y^m(t+1))$, необходимо решить следующую задачу выпуклого программирования:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f_k(t+1)\, y_k^i(t+1) \longmapsto \max$$

при ограничениях

$$P_t^i\, y^i(t+1) - x^i(t) \le 0, \quad i = 1,\dots,m,$$

$$x^1(t) + \dots + x^m(t) = x(t),$$

$$x^1(t),\dots,x^m(t),\, y^1(t+1),\dots,y^m(t+1) \ge 0.$$

Решая последовательно задачи выпуклого программирования такого типа, будем двигаться по эффективной траектории.

Отметим, что в случае линейности отображений P_t^i задача превращается в задачу линейного программирования (задачу ЛП), а вектор $f(t+1)$ определяется по $f(t)$ из (2).

Рассмотрим вопросы выбора характеристического вектора цен $F(0)$ для начального $X(0)$, а также условия обрыва производственного процесса при произвольном $F(0)$ (случай $X(t+1)=0$, но $X(t)\geq 0$).

Дадим ответы для линейных отображений ρ_t^i.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{X(t)\}$ – эффективная траектория модели (ρ_t^i линейны), $\{f^\Delta(t)>0\}$ – ее характеристика. Тогда при известном значении $f(t+1)$ координаты $f_k(t)$ являются решением системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\min_{k=1,\dots,n}\left[\mu_{k1}^1(t+1)f_1(t)+\dots+\mu_{kn}^1(t+1)f_n(t)\right]=1;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\min_{k=1,\dots,n}\left[\mu_{k1}^m(t+1)f_1(t)+\dots+\mu_{kn}^m(t+1)f_n(t)\right]=1,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

где

$$\mu_{kj}^i(t+1)=(C_t^i)_{kj}^*/f_k(t+1).$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 и следствию.

СЛЕДСТВИЕ. Обозначим через V_i $(i=1,\dots,m)$ множество тех номеров продуктов v, для которых выполняется

$$\sum_{j=1}^n \mu_{vj}^i(t+1)f_j(t)=\min_{k=1,\dots,n}\sum_{j=1}^n\mu_{kj}^i(t+1)f_j(t).$$

Тогда, если $\exists k_0\notin\bigcup_{i=1}^m V_i$, то $x_{k_0}(t+1)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества V_i зависят от вектора $f^\Delta(t+1)$. Однако существуют такие малые $\varepsilon>0$, что и для вектора $\bar f^\Delta(t+1)$:

$$\bar f_k(t+1)=f_k(t+1),\ k=1,\dots,n,\ k\neq k_0,\ \bar f_{k_0}(t+1)=f_{k_0}(t+1)+\varepsilon$$

множества V_i останутся теми же, что и для $f^\Delta(t+1)$ (и, в частности, k_0 по-прежнему не будет принадлежать $\bigcup_{i=1}^m V_i$).

Тогда согласно теореме 3 для $f^\Delta(t+1)$ и $\bar f^\Delta(t+1)$ значения $f_k(t)$ и $\bar f_k(t)$ будут равными.

Рассмотрим задачи ЛП для векторов-целей $f^\Delta(t+1)$ и $\bar f^\Delta(t+1)$. Эти задачи при одном и том же $x(t)$ имеют одинаковые множества ограничений.

Существует такой вектор $(X(t), Y(t+1))$ – решение за-

дачи ЛП для вектора $f^{\Delta}(t+1)$, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ он же является решением задачи ЛП для вектора $\bar{f}^{\Delta}(t+1)$.

Для этого решения выполняется

$$[F(t), X(t)] = [F(t+1), X(t+1)].$$

Кроме этого,

$$[f(t+1), x(t+1)] = [f(t+1), \sum_{i=1}^{m} y^i(t+1)].$$

Откуда

$$[f(t), x(t)] = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} f_k(t+1)\left(\sum_{i=1}^{m} y_k^i(t+1)\right) +$$

$$+ f_{k_0}(t+1)\left(\sum_{i=1}^{m} y_{k_0}^i(t+1)\right);$$

$$[f(t), x(t)] = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} f_k(t+1)\left(\sum_{i=1}^{m} y_k^i(t+1)\right) +$$

$$+ (f_{k_0}(t+1) + \varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{m} y_{k_0}^i(t+1)\right).$$

Таким образом,

$$x_{k_0}(t+1) = \sum_{i=1}^{m} y_{k_0}^i(t+1) = 0.$$

Следствие показывает, что если начальный вектор цен "не согласован" с начальным вектором продуктов $X(0)$, то возможно прекращение выпуска продуктов на следующих шагах.

Интересен случай, когда возможно разрешить систему экстремальных уравнений (4) в явном виде.

Это удается, в частности, когда модель содержит 2 ячейки (т.е. $m = 2$), в каждой из который производится 2 вида продуктов (т.е. $n = 2$).

Дополнительно потребуем, чтобы технологические матрицы не изменялись во времени, после чего введем обозначения:

$$C^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad C^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Система (4) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\min\left\{\frac{a_{11}}{f_1(t+1)}f_1(t)+\frac{a_{21}}{f_1(t+1)}f_2(t),\ \frac{a_{12}}{f_2(t+1)}f_1(t)+\frac{a_{22}}{f_2(t+1)}f_2(t)\right\}=1,\\ &\min\left\{\frac{b_{11}}{f_1(t+1)}f_1(t)+\frac{b_{21}}{f_1(t+1)}f_2(t),\ \frac{b_{12}}{f_2(t+1)}f_1(t)+\frac{b_{22}}{f_2(t+1)}f_2(t)\right\}=1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решениями системы (5) будут:

I)

$$f_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(t+1) & a_{21}\\ f_1(t+1) & b_{21}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\geq 0,\qquad f_2(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & f_1(t+1)\\ b_{11} & f_1(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\geq 0$$

при

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & f_1(t+1)\\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1)\\ a_{12} & a_{22} & f_2(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\leq 0;\qquad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & f_1(t+1)\\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1)\\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\leq 0;$$

2)

$$f_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} f_2(t+1) & a_{22}\\ f_1(t+1) & b_{21}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\geq 0;\qquad f_2(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & f_2(t+1)\\ b_{11} & f_1(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\geq 0$$

при

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & f_2(t+1)\\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1)\\ a_{11} & a_{21} & f_1(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\leq 0;\qquad \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & f_2(t+1)\\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1)\\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ b_{11} & b_{21}\end{vmatrix}}\leq 0$$

3)

$$f_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(t+1) & a_{21} \\ f_2(t+1) & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\geq 0;\quad f_2(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & f_1(t+1) \\ b_{12} & f_2(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\geq 0$$

при

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & f_1(t+1) \\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1) \\ a_{12} & a_{22} & f_2(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\leq 0;\quad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & f_1(t+1) \\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1) \\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\leq 0;$$

4)

$$f_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} f_2(t+1) & a_{22} \\ f_2(t+1) & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\geq 0;\quad f_2(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & f_2(t+1) \\ b_{12} & f_2(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\geq 0$$

при

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & f_2(t+1) \\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1) \\ a_{11} & a_{21} & f_1(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\leq 0;\quad \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & f_2(t+1) \\ b_{12} & b_{22} & f_2(t+1) \\ b_{11} & b_{21} & f_1(t+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}\leq 0.$$

Литература

1. Рубинов А.М. Модели равновесного типа как инструмент построения эффективных траекторий в моделях воспроизводства// Математические модели экономической динамики. – Вильнюс, 1988.

2. Рубинов А.М. Описание эффективных функционалов и магистралей для двух моделей Неймана – Гейла// Исследование по задачам равномерного приближения и асимптотики траекторий динамических систем. – Новосибирск, 1987. – С.102-110.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
4. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
5. Воробьев Н.Н. Экстремальная алгебра положительных матриц Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik.– N 3. – S.39-71
6. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. – М.: Наука, 1972.

Поступила в ред. изд. отдел
16.01.1989 г.