Выпуск 46(63) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Численные методы

УДК 519.865.3

ОБ ОДНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА-ОБМЕНА ТИПА ЭРРОУ - ДЕБРЕ

В.И.Шмырев

Рассматривается линейная модель производства-обмена, в которой каждый из производителей, выпуская товары, затрачивает какой-то определенный ресурс, имеющийся у него в ограниченном количестве; весь доход каждого производителя в некоторой пропорции распределяется между потребителями, а потребители на полученные денежные средства приобретают товары, стремясь максимизировать свои функции полезности. Исследуется вопрос о нахождении равновесной системы цен. Показывается, что задача сводится к отысканию некоторой фиксированной точки при взаимно-однозначном отображении возникающего полиэдрального многообразия в евклидово пространство. Предлагаемый алгоритм идейно примыкает к алгоритму полиэдральной комплементарности, рассмотренному автором в [1].

1. Исходная модель

Пусть имеется n товаров, которые производятся ℓ производителями и потребляются m потребителями. Введем общую нумерацию участников модели, считая, что при $i \in I = \{1,\dots,m\}$ i-й участник является потребителем, а при $k \in K = \{m+1,\dots,m+\ell\}$ k-й участник является производителем.

Участник $s \in S = \{1,\dots,m+\ell\} = I \cup K$ выбирает план $x^s = (x_1^s,\dots,x_n^s)$, где x_j^s указывает количество товара $j \in J = \{1,\dots,n\}$, запланированного участником для потребления или производства (в зависимости от того, является участник потре-

бителем или производителем). При этом производитель K затрачивает некоторый ресурс (например, труд). Эти затраты являются некоторой линейной функцией компонент плана $\sum\limits_j c_j^k x_j^k = (c^k, x^k)$ и не должны превышать заданной величины ζ_k^*. Реализация плана x^k по ценам p_j $(j = 1,\ldots,n)$ дает доход $\lambda_k = (p, x^k) = \sum p_j x_j^k$. Естественно считать, что план x^k выбирается так, чтобы величина дохода была максимальной, т.е. компоненты вектора x^k должны быть решением задачи

$$\lambda_k = \sum_j p_j x_j^k \text{ — } max! \tag{1}$$

$$\sum_j c_j^k x_j^k \le \zeta_k^*, \tag{2}$$

$$x_j^k \ge 0, \; j = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Предполагается, что доход λ^k целиком распределяется между потребителями в соответствии с заданной системой коэффициентов θ_i^k, указывающих долю i-го потребителя в доходе k-го производителя:

$$\sum_i \theta_k^i = 1, \; k \in K,$$

$$\theta_k^i \ge 0, \; i \in I, \; k \in K.$$

В результате, i-й потребитель получает суммарный денежный ресурс в количестве $\sum\limits_k \theta_k^i \lambda_k$, который он расходует на приобретение товаров в количествах x_j^i, стремясь при этом максимизировать полезность получаемого набора товаров, характеризующуюся величиной $\sum\limits_j c_j^i x_j^i = (c^i, x^i)$.

Иными словами, i-й потребитель выбирает свой план x^i, решая задачу

$$\sum_j c_j^i x_j^i \text{ — } max! \tag{4}$$

$$\sum_j p_j x_j^i \le \sum_k \lambda_k \theta_k^i, \tag{5}$$

$$x_j^i \ge 0, \; j = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Требуется указать такую систему цен $p_j = \widetilde{p}_j$ $(j = 1,\ldots,n)$, чтобы среди оптимальных решений приведенных задач участников нашлись такие $\widetilde{x}^s$, $s \in S$, что выполняется условие баланса товаров:

$$\sum_{i\in I}\tilde{x}^i = \sum_{\kappa\in K}\tilde{x}^\kappa. \qquad (7)$$

Цены $\tilde{p}_j$ именуются равновесными, а о векторе равновесных цен $\tilde{p}$ и отвечающих ему планах $\tilde{x}^s$, $s\in S$, будем говорить, что они определяют состояние равновесия.

2. Вспомогательная параметрическая модель обмена

В дальнейшем будем считать, что

$$\begin{aligned} &\theta^i_\kappa > 0,\ i\in I,\ \kappa\in K;\\ &c^s_j > 0,\ j\in J,\ s\in S. \end{aligned} \qquad (8)$$

Ясно, что на оптимальных решениях задач (I)-(3) и (4)-(6) неравенства (2) и (5) будут выполняться как равенства. Поэтому задаче (I)-(3) можно сопоставить эквивалентную (т.е. имеющую то же самое оптимальное решение) задачу вида

$$(c^\kappa, x^\kappa) - \min! \qquad (9)$$

$$(p, x^\kappa) = \lambda_\kappa, \qquad (10)$$

$$x^\kappa \geq 0, \qquad (11)$$

где λ_κ - оптимальное значение целевой функции в задаче (I)-(3). Это обстоятельство побуждает ввести в рассмотрение вспомогательную параметрическую модель обмена, в которой величины λ_κ рассматриваются как параметры, а планы x^s участники выбирают, решая соответствующие задачи (9)-(II) и (4)-(6). Равновесные цены в этой модели (при фиксированных значениях λ_κ) - это по определению, как и выше,такой набор положительных величин $\tilde{p}_j$, $j\in J$, для которого среди оптимальных решений задач (9)-(II) и (4)-(6) найдутся такие $\tilde{x}^s$, $s\in S$, что выполняется (7). Если при этом, т.е. при данных фиксированных значениях λ_κ и p_j, окажется, что оптимальные значения функций (9) (величины $\sum_j c^\kappa_j \tilde{x}^\kappa_j$) равны соответствующим величинам ζ^*_κ, то имеем, очевидным образом, состояние равновесия в исходной модели, в чем легко убедиться, переходя от задач (9)-(II) обратно к задачам (I)-(3).

Таким образом, отношение равновесия в исходной модели сводится к исследованию двух вопросов:

I) Как находить равновесие в параметрической модели обмена при фиксированных значениях параметров λ_k ?

2) Как подобрать значения параметров λ_k , чтобы среди состояний равновесия параметрической модели обмена, отвечающих зафиксированному набору величин λ_k , нашлось такое (состояние равновесия), для которого оптимальные значения функций (9) совпадают с заданными ζ_k^* ?

Для решения первого из этих вопросов введем, аналогично [2], следующую задачу транспортного типа:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{k\in K} z_{kj} \ln c_j^k - max! \qquad (I2)$$

$$-\sum_{j\in J} z_{ij} = -\sum_{k\in K}\lambda_k \theta_i^k, i\in I, \qquad (I3)$$

$$\sum_{j\in J} z_{kj} = \lambda_k,\ k\in K, \qquad (I4)$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} - \sum_{k\in K} z_{kj} = 0,\ j\in J, \qquad (I5)$$

$$z_{sj} \geq 0,\quad s\in S, j\in J. \qquad (I6)$$

Эта задача относится к классу сетевых транспортных задач: здесь пункты сети, отвечающие уравнениям (I3), являются пунктами производства, а пункты, отвечающие уравнениям (4), - пунктами потребления; пункты, отвечающие уравнениям (I5), являются промежуточными пунктами (т.е. с нулевым балансом груза). Так как любой пункт производства связан с любым пунктом потребления некоторым путем (через любой из промежуточных пунктов) и задача сбалансирована (суммарный объем производства совпадает с суммарным объемом потребления: $\sum\limits_k \lambda_k = \sum\limits_i \sum\limits_k \theta_k^i \lambda_k$), то в данной задаче при любых $\lambda_k \geq 0$ имеются допустимые решения. Ввиду очевидной ограниченности множества допустимых решений при таких λ_k будут существовать и оптимальные решения.

Таким образом, при любых $\lambda_k \geq 0$ задача (I2)-(I6) разрешима. Тогда, как известно, разрешима и двойственная к ней задача, имеющая вид:

$$-\sum_i u_i \sum_K \lambda_k \theta_k^i + \sum_k u_k \lambda_k - min! \qquad (I7)$$

$$-u_i + v_j \geq \ln c_j^i, \; i \in I, \; j \in \mathcal{J}, \tag{18}$$

$$u_k - v_j \geq -\ln c_j^k, \; k \in K, \; j \in \mathcal{J}. \tag{19}$$

Ответ на первый из упомянутых выше вопросов дается следующим утверждением.

ЛЕММА I. Если $\{\tilde{z}_{ij}, \tilde{z}_{kj}\}$ и $\{\tilde{u}_i, \tilde{u}_k, \tilde{v}_j\}$ – оптимальные решения соответственно транспортной задачи (12) – (16) и двойственной к ней задачи (17) – (19), то равновесные цены во вспомогательной задаче обмена (с данными λ_k) задаются величинами

$$\tilde{p}_j = e^{\tilde{v}_j}, \; j = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

а компоненты оптимальных планов участников получаются по формулам

$$\tilde{x}_j^s = \tilde{z}_{sj} / \tilde{p}_j, \; s = 1, \ldots, m\ \ell, \; j = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оптимальные значения двойственных переменных в транспортной задаче определены не однозначно, а (в лучшем случае) лишь с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому наряду с $\tilde{p}_j$ равновесными будут и $t\tilde{p}_j$ при любом $t > 0$. При этом оптимальные планы участников будут задаваться величинами $(1/t)\tilde{x}_j^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I. Полагая $y_s = e^{-\tilde{u}_s}, \; s = 1, \ldots, m+\ell$, будем иметь из (18)-(19)

$$y_i \tilde{p}_j \geq c_j^i, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

$$y_k \tilde{p}_j \leq c_j^k, \; k = m+1, \ldots, m+\ell; \; j = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

А это неравенства задач, двойственных к задачам участников. Кроме того, $\tilde{p}_j \tilde{x}_j^s = \tilde{z}_{sj}$ и из (13)-(14) следует, что $\tilde{x}^s$ – допустимые планы участников. Далее, из условий дополняющей нежесткости, которые должны выполняться для оптимального решения транспортной задачи, следует, что для $\tilde{u}_i, \tilde{u}_k, \tilde{v}_j$ в неравенствах (18)-(19), отвечающих $\tilde{z}_{sj} > 0$, должно иметь место равенство. Последнее эквивалентно равенству в соответствующих условиях (22)-(23). Наконец, $\tilde{z}_{sj} > 0$ эквивалентно условию

$\tilde{x}_j^s > 0$. Тем самым условия дополняющей нежесткости выполняются для задач участников, и допустимые решения $\tilde{x}^s$ являются оптимальными в этих задачах. Остается заметить, что из

$$\sum_i \tilde{z}_{ij} = \sum_k \tilde{z}_{kj}, \; j = 1, \ldots, n,$$

делением на $\tilde{p}_j$ получаем

$$\sum_i \tilde{x}_j^i = \sum_k \tilde{x}_j^k, \; j = 1, \ldots, n.$$

Лемма доказана.

Таким образом, вопрос об отыскании равновесия во вспомогательной модели обмена при фиксированных значениях параметров λ_k решается просто: нужно решить транспортную задачу (I2)-(I6), после чего равновесные цены и равновесные планы участников находятся по формулам (20)-(2I). При этом, учитывая сделанное выше замечание, получаем не одно состояние равновесия, а по крайней мере целое однопараметрическое семейство таких состояний: наряду с равновесием $\{p_j, x_j^s\}$ равновесным будет и состояние $\{tp_j, (1/t)x_j^s\}$ при любом $t > 0$.

Перейдем к вопросу о подборе таких значений λ_k , чтобы среди значений функций (9), отвечающих получившимся равновесным состояниям, оказались требуемые ξ_k^* . Отметим, что если $\{p_j, x_j^s\}$ - состояние равновесия при данных $\lambda_k = \hat{\lambda}_k$, то при $\lambda_k = t\hat{\lambda}_k$, $t > 0$, равновесным будет состояние $\{tp_j, x^s\}$, в котором значения функций (9) будут теми же. Тем самым на величины λ_k и p_j можно наложить какое-либо условие нормировки. В качестве такового примем условие

$$\sum_{k \in K} \lambda_k = 1. \tag{24}$$

3. Алгоритмы отыскания состояния равновесия в исходной модели

Будем предполагать выполненным условие двойственной невырожденности для транспортной задачи (I2)-(I6): для любого решения системы неравенств (I8)-(I9) в равенства обращаются не более $m+n+\ell-1$ из этих неравенств.

Выполнение этого условия обеспечивает единственность решения транспортной задачи (I2)-(I6) при любых $\lambda_k \geq 0$.

Опишем один шаг предлагаемого процесса отыскания состояния равновесия в рассматриваемой модели.

На очередном шаге процесса с номером $\varkappa$ имеются положительные величины:

$$p_j^{\varkappa},\ j \in \mathcal{J},$$
$$\lambda_k^{\varkappa},\ k \in K,$$

и множество $\mathcal{B}_{\varkappa} \subset S \times \mathcal{J}$, для которых выполняются следующие условия согласования:

(α) Величины $p_j = p_j^{\varkappa}$ удовлетворяют следующей системе линейных неравенств:

$$\frac{p_j}{c_j^i} \geq \frac{p_h}{c_h^i},\ i \in I,\ j \in \mathcal{J},\ (i,h) \in \mathcal{B}_{\varkappa}, \tag{25}$$

$$\frac{p_j}{c_j^k} \leq \frac{p_h}{c_h^k},\ k \in K,\ j \in \mathcal{J},\ (k,h) \subset \mathcal{B}_{\varkappa}. \tag{26}$$

Обозначим через $\Xi(\mathcal{B}_{\varkappa})$ множество положительных векторов p , решающих эту систему. Тем самым условие на величины $p_j^{\varkappa}$ принимает вид $p^{\varkappa} \in \Xi(\mathcal{B}_{\varkappa})$.

($\alpha\alpha$) Величины $z_{sj} = \hat{z}_{sj}$, задающие решения транспортной задачи (I2)-(I6) при $\lambda_k = \lambda_k^{\varkappa}$, удовлетворяют требованию

$$z_{sj} = 0,\ (s,j) \notin \mathcal{B}_{\varkappa}. \tag{27}$$

Для дальнейшего изложения целесообразно переформулировать условие ($\alpha\alpha$) по аналогии с условием (α). С этой целью введем в рассмотрение ориентированный граф $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$ с множеством вершин $V = S \cup \mathcal{J}$ и множеством дуг $U = \mathcal{B}_{\varkappa}$. Благодаря упомянутому условию двойственной невырожденности задачи (I2)-(I6) такой граф не содержит циклов. Пусть τ - число компонент связности этого графа, $K_\nu \subset K, I_\nu \subset I, \mathcal{J}_\nu \subset \mathcal{J}$ - множества вершин $k \in K, i \in I,\ j \in \mathcal{J}$, попадающих на компоненту связности с номером ν . Будем предполагать, что для каждой компоненты связности все эти множества непусты. Из дальнейшего следует, что это свойство наследуемо, т.е. если оно выполняется для графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$, то это так и для графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$. Тем самым речь идет об условии на начальное множество $\mathcal{B}_0$.

Рассмотрим систему условий

$$\sum_{k\in K_\nu}\lambda_k=\sum_{i\in I_\nu}\sum_{k\in K}\lambda_k\theta_i^k,\ \nu=1,\dots,\tau. \tag{28}$$

Эти условия представляют собой условия баланса груза на каждой компоненте связности и являются необходимыми и достаточными условиями совместности системы линейных уравнений, состоящей из уравнений (I3)-(I5) и (27), которая при этом будет иметь единственное решение, линейно зависящее от параметров λ_k.

Для краткости изложения введем вектор λ с компонентами $\lambda_k,\ k\in K$ (предполагая естественную упорядоченность элементов множества K).

Таким образом, для любого $\lambda\geqslant 0$, удовлетворяющего условиям (28), однозначно определены величины $z_{sj}=z_{sj}^{\varkappa}(\lambda)$ и можно рассмотреть множество

$$\Omega(\mathcal{B}_\varkappa)=\left\{\lambda\geqslant 0\,|\,z_{sj}^{\varkappa}(\lambda)\geqslant 0,\ (s,j)\in\mathcal{B}_\varkappa\right\}.$$

В результате условие ($\alpha\alpha$) принимает вид $\lambda^{\varkappa}\in\Omega(\mathcal{B}_\varkappa)$.

Вводя в $R^{n+\ell}$ множество $\Theta(\mathcal{B}_\varkappa)=\Xi(\mathcal{B}_\varkappa)\times\Omega(\mathcal{B}_\varkappa)$ и точку $\vartheta^{\varkappa}=(p^{\varkappa},\lambda^{\varkappa})\in R^{n+\ell}$, можно условия согласования (α), ($\alpha\alpha$) записать в виде $\vartheta^{\varkappa}\in\Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$.

Выполнение шага алгоритма начинается с определения точки $\bar\vartheta^{\varkappa}=(\bar p^{\varkappa},\bar\lambda^{\varkappa})$, координаты которой $\bar p_j^{\varkappa}$ и $\bar\lambda_k^{\varkappa}$ решают систему уравнений, задаваемую условиями

$$\frac{p_g}{c_g^s}=\frac{p_h}{c_h^s},\ (s,g),(s,h)\in\mathcal{B}_\varkappa, \tag{29}$$

$$c_h^k\lambda_k=\xi_k^* p_k,\ (k,h)\in\mathcal{B}_\varkappa, \tag{30}$$

совместно с условием (28) и условием нормировки (24). Ниже будет показано, что при сделанных предположениях такая система уравнений имеет единственное решение.

Отметим, что система равенств (29) следует из системы неравенств (25)-(26), описывающей множество $\Xi(\mathcal{B}_\varkappa)$. Тем самым (29) выполняется для любого $p\in\Xi(\mathcal{B}_\varkappa)$. Аналогично, (28) выполняется для любого $\lambda\in\Omega(\mathcal{B}_\varkappa)$.

Поясним происхождение системы (30). Как легко убедиться, если при некоторых p, λ и $\mathcal{B}_\varkappa$ выполняются условия согласования (α)-($\alpha\alpha$), то величины $\hat{x}_j^s=\hat{z}_{sj}/p_j$ задают оптимальные решения задач участников (4)-(6) и (9)-(II) с данными p и λ. При этом значения целевых функций (9) в силу известных соотно-

шений двойственности в задачах линейного программирования определяются формулами

$$(c^{\kappa}, \hat{x}^{\kappa}) = \frac{c_h^{\kappa}}{p_h} \lambda_{\kappa}, \ (\kappa, h) \in \mathcal{B}_{\varkappa}. \qquad (31)$$

Тем самым условия (30) являются условиями того, что значения целевых функций (9) совпадают с заданными величинами ζ_k^* .

Продолжим описание алгоритма. Если для $\bar{p}^{\varkappa}$, $\bar{\lambda}^{\varkappa}$, $\mathcal{B}_{\varkappa}$ выполняются условия согласования (α)-$(\alpha\alpha)$, т.е. точка $\bar{v}^{\varkappa} = (\bar{p}^{\varkappa}, \bar{\lambda}^{\varkappa}) \in R^{n+\ell}$ принадлежит множеству $\Theta(\mathcal{B}_{\varkappa})$, то, согласно вышеизложенному, вектор $p = \bar{p}^{\varkappa}$ задает искомые равновесные цены исходной модели. В противном случае рассмотрим зависящие от вещественного параметра t векторы

$$\begin{aligned} p(t) &= p^{\varkappa} + t(\bar{p}^{\varkappa} - p^{\varkappa}), \\ \lambda(t) &= \lambda^{\varkappa} + t(\bar{\lambda}^{\varkappa} - \lambda^{\varkappa}). \end{aligned} \qquad (32)$$

Вводя $v(t) = (p(t), \lambda(t)) \in R^{n+\ell}$, имеем $v(0) \in \Theta(\mathcal{B}_{\varkappa})$ и $v(1) = \bar{v}^{\varkappa} \notin \Theta(\mathcal{B}_{\varkappa})$. Найдем максимальное $t = t_{max}$, для которого $v(t) \in \Theta(\mathcal{B}_{\varkappa})$, и примем $p^{\varkappa+1} = p(t_{max})$, $\lambda^{\varkappa+1} = \lambda(t_{max})$.

(i) Если лимитирующим при определении t_{max} оказалось условие $p(t) \in \Xi(\mathcal{B}_{\varkappa})$, то пара (i,j) или (κ,j) , отвечающая лимитирующему из неравенств системы (25)-(26), пополняет множество $\mathcal{B}_{\varkappa}$. Пусть для определенности лимитирующим оказалось неравенство из системы (25), отвечающее паре $(i,j) = (i_0, j_0)$. Принимая $\mathcal{B}_{\varkappa+1} = \mathcal{B}_{\varkappa} \cup \{(i_0, j_0)\}$, переходим к следующему шагу.

(ii) Если лимитирующим при определении t_{max} оказалось условие $\lambda(t) \in \Omega(\mathcal{B}_{\varkappa})$, т.е. какая-то из величин $x_{sj}^{\varkappa}(\lambda(t))$ при $t > t_{max}$ становится отрицательной, то соответствующая пара (s_0, j_0) исключается из $\mathcal{B}_{\varkappa}$; принимаем $\mathcal{B}_{\varkappa+1} = \mathcal{B}_{\varkappa} \setminus \{(s_0, j_0)\}$ и переходим к следующему шагу.

Пару (s_0, j_0) , отвечающую лимитирующему неравенству, будем также именовать лимитирующей. Ситуация, когда лимитирующая пара определена неоднозначно, требует уточнения. Формально в этом случае процесс можно продолжить, выбирая в качестве (s_0, j_0) какую-то одну из лимитирующих пар.

Доказательство конечности процесса проводится в предположении ограниченной вырожденности, о чем речь пойдет ниже. Сейчас покажем, что приведенное описание процесса корректно. Для этого необходимо показать, что векторы $\bar{\rho}^{\varkappa}$ и $\bar{\lambda}^{\varkappa}$ определяются однозначно и они строго положительны. Покажем это.

Рассмотрим систему уравнений (28)-(30), из которой при дополнительном условии нормировки (24) определяются $\bar{\rho}^{\varkappa}$ и $\bar{\lambda}^{\varkappa}$. Система (29) задает на ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$ некоторые пропорции между величинами ρ_j, отвечающими вершинам $j \in \mathcal{J}_{\nu}$ .. Вводя переменные π_{ν}, $\nu = 1,\ldots,\tau$, можем записать

$$\rho_j = \pi_{\nu} \hat{\rho}_j, \; j \in \mathcal{J}_{\nu}, \tag{33}$$

где $\hat{\rho}_j$ - некоторые положительные константы. Используя (30), можно и переменные λ_k, относящиеся к одной компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$, также выразить через соответствующую переменную π_{ν} :

$$\lambda_k = \hat{\lambda}_k \pi_{\nu}, \; k \in K_{\nu}, \tag{34}$$

и $\hat{\lambda}_k$ - положительные константы. Относительно $\hat{\lambda}_k$ можно дополнительно предполагать, не ограничивая общности, что

$$\sum_{k \in K_{\nu}} \hat{\lambda}_k = 1, \; \nu = 1, 2, \ldots, \tau.$$

В результате, подставляя представление λ_k в (28), получим систему относительно переменных π_{ν} вида

$$\pi = \gamma \pi, \tag{35}$$

где $\pi \in R^{\tau}$ - вектор из компонент π_{ν}, а γ - положительная матрица, в каждом столбце которой сумма элементов равна единице. Тем самым вектор $(1,\ldots,1) \in R^{\tau}$ является собственным вектором матрицы γ^{T}, а единица - максимальным по модулю собственным числом матрицы γ^{T}, а значит, и матрицы γ. По теореме Перрона система (35) имеет единственное с точностью до положительного множителя положительное решение

$$\pi = \mu \hat{\pi}, \; \hat{\pi} > 0, \; \mu > 0.$$

Теперь из (33) и (34) найдутся

$$\rho_j = \mu \hat{\pi}_{\nu} \hat{\rho}_j, \; j \in \mathcal{J}_{\nu}; \; \nu = 1,\ldots,\tau,$$
$$\lambda_k = \mu \hat{\pi}_{\nu} \hat{\lambda}_k, \; k \in K_{\nu}; \; \nu = 1,\ldots,\tau.$$

Множитель μ определится из условия нормировки (24)

$$\mu = 1/\sum_{\nu=1}^{\tau} \hat{\pi}_\nu \sum_{\kappa\in K_\nu} \hat{\lambda}_\kappa = 1/\sum_{\nu=1}^{\tau} \hat{\pi}_\nu > 0.$$

Таким образом, векторы $\bar{\rho}^{\varkappa}$ и $\bar{\nu}^{\varkappa}$ определяются однозначно и положительны, что и требовалось.

Отметим также, что из положительности $\rho^{\varkappa}, \lambda^{\varkappa}, \bar{\rho}^{\varkappa}, \bar{\lambda}^{\varkappa}$ следует положительность и $\rho^{\varkappa+1}, \lambda^{\varkappa+1}$. Кроме того, так как $\lambda = \lambda^{\varkappa}$ удовлетворяет (28) и $\lambda^{\varkappa} > 0$, то множества K_ν, I_ν либо пусты, либо непусты одновременно, т.е. пустота одного из них влечет пустоту другого и, наоборот, если непусто одно из этих множеств, то непусто и другое. Так как на очередном шаге из графа $\Gamma(\mathcal{B}_\varkappa)$ может исключиться лишь одна дуга и нет дуг вида (i,κ), $i \in I$, $\kappa \in K$, то тем самым из непустоты множеств I_ν, K_ν, J_ν, отвечающих компонентам связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_\varkappa)$, следует непустота таких множеств и для графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$. Это завершает обоснование корректности описания алгоритма.

4. Сходимость процесса

На каждом многограннике $\Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$ можно рассмотреть отображение $\zeta : \vartheta = (\rho, \lambda) \in R^{m+\ell} \longrightarrow \zeta(\vartheta) \in R^{\ell}$, задаваемое формулами (30):

$$\zeta_\kappa(\vartheta) = c_h^\kappa \frac{\lambda_\kappa}{\rho_h}, \quad (\kappa, h) \in \mathcal{B}_\varkappa .$$

Задача состоит в отыскании такого $\mathcal{B}_\varkappa$ и $\vartheta \in \Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$, что $\zeta(\vartheta) = \zeta^*$.

Легко убедиться, что направление сдвига $\bar{\vartheta}^{\varkappa} - \vartheta^{\varkappa}$ ведет к уменьшению евклидового расстояния от текущей точки $\zeta(\vartheta(t))$ до $\zeta(\bar{\vartheta}^{\varkappa}) = \zeta^*$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left[\zeta_\kappa(\vartheta(t)) - \zeta_\kappa^*\right]^2\Big|_{t=0} = (c_h^\kappa)^2 \left(\frac{\lambda_\kappa^{\varkappa}}{\rho_h^{\varkappa}} - \frac{\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa}}{\bar{\rho}_h^{\varkappa}}\right)\left(\frac{\rho_h^{\varkappa}\bar{\lambda}_h^{\varkappa} - \lambda_\kappa^{\varkappa}\bar{\rho}_h^{\varkappa}}{(\rho_h^{\varkappa})^2}\right) =$$

$$= (c_h^\kappa)^2 \left(\frac{\lambda_\kappa^{\varkappa}}{\rho_h^{\varkappa}} - \frac{\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa}}{\bar{\rho}_h^{\varkappa}}\right)\left(\frac{\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa}}{\bar{\rho}_h^{\varkappa}} - \frac{\lambda_\kappa^{\varkappa}}{\rho_h^{\varkappa}}\right)\frac{\bar{\rho}_h \rho_h^{\varkappa}}{(\rho_h^{\varkappa})^2} =$$

$$= -(c_h^k)^2\left(\frac{\lambda_k^{\varkappa}}{\rho_k^{\varkappa}} - \frac{\bar\lambda_k^{\varkappa}}{\bar\rho_h^{\varkappa}}\right)\left(\frac{\bar\rho_h^{\varkappa}}{\rho_h^{\varkappa}}\right) < 0.$$

Таким образом, каждый квадрат в сумме, составляющей квадрат указанного расстояния, при сдвиге в направлении $\bar\vartheta^{\varkappa} - \vartheta^{\varkappa}$ строго убывает, а тем самым убывает и само расстояние. Однако величина сдвига лимитируется условием $\vartheta(t) \in \Theta(\mathcal{B}_{\varkappa})$, что привносит в анализ сходимости процесса известные трудности метода возможных направлений (вопросы преодоления "заедания").

Ниже мы следуем общей схеме анализа алгоритма полиэдральной комплементарности [I], восходящей к известной схеме линейной комплементарности Лемке [4].

ЛЕММА 2. В течение процесса выполняется условие

$$\mathcal{B}_{\varkappa+1} \neq \mathcal{B}_{\varkappa}. \tag{36}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что на итерации $\varkappa$ рассматриваются лишь такие векторы ρ, что $\rho > 0$ и выполняется система условий (29), можно ввести в рассмотрение величины

$$y_s = \frac{c_h^s}{\rho_h},\quad (s,h) \in \mathcal{B}_{\varkappa}. \tag{37}$$

Тогда неравенства (25), (26) можно переписать в виде

$$y_i \rho_j \geq c_j^i,\quad i \in I,\ j \in \mathcal{J}; \tag{25$'$}$$

$$y_k \rho_j \leq c_j^k,\quad k \in K,\ j \in \mathcal{J}. \tag{26$'$}$$

Каждому из неравенств (25$'$) отвечает неравенство вида $z_{ij} \geq 0$. Будем говорить, что такие два неравенства образуют комплементарную пару неравенств, а каждое из неравенств пары будем именовать комплементарным по отношению к другому неравенству пары. Аналогично для системы неравенств (26). Неравенства системы (25$'$)-(26$'$), отвечающие (i,j), $(k,j) \in \mathcal{B}_{\varkappa}$, а также неравенства $z_{sj} \geq 0$, отвечающие $(s,j) \notin \mathcal{B}_{\varkappa}$, будем именовать базовыми. Таким образом, на каждом шаге процесса ровно одно неравенство из комплементарной пары является базовым.

На очередной итерации $(\varkappa+1)$ одно из небазовых неравенств, оказавшееся лимитирующим на шаге $\varkappa$ при определении величины t_{max}, переходит в разряд базовых, а соответст-

вующее комплементарное неравенство - в разряд небазовых. Условие (36) говорит о том, что такое комплементарное неравенство может оказаться лимитирующим при выполнении шага $(\varkappa+1)$. Это утверждение будет доказано, если показать, что отмеченное неравенство выполняется для точки $\overline{\vartheta}^{\varkappa+1}$.

Доказательство последнего факта во многом аналогично соответствующей части работы автора [3], где рассуждения проводятся в условиях модели обмена. С целью дать представление об идейной стороне вопроса, воспроизведем частично соответствующие выкладки. Но чтобы избежать излишней громоздкости, ограничимся рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Рассмотрение остальных случаев отличается достаточно очевидными изменениями.

Пусть, для определенности, лимитирующим при определении величины t_{max} на шаге $\varkappa$ оказалось неравенство $z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda(t)) \geq 0$ и, значит, $\mathcal{B}_{\varkappa+1} = \mathcal{B}_{\varkappa} \setminus \{(i_0, j_0)\}$. Ясно, что (i_0, j_0) не является единственным элементом вида (i_0, j), принадлежащим $\mathcal{B}_{\varkappa}$, ибо в таком случае $z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda) = \sum_{k \in K} \lambda_k \theta^{i}_{k} \geq 0$ при любых $\lambda_k \geq 0$, а значит, неравенство $z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda(t)) \geq 0$ не могло бы быть лимитирующим при определении величины t_{max}. Пусть $(i_0, j_1) \in \mathcal{B}_{\varkappa}$ и, следовательно, $(i_0, j_1) \in \mathcal{B}_{\varkappa+1}$. Это означает, что на шаге $(\varkappa+1)$ будем иметь $y_{i_0} = c^{i_0}_{j_1}/p_{j_1}$, и неравенство, комплементарное к неравенству $z_{i_0 j_0} \geq 0$, может быть записано в виде

$$\frac{c^{i_0}_{j_1}}{p_{j_1}} p_{j_0} \geq c^{i_0}_{j_0}. \tag{38}$$

Нужно показать, что это неравенство выполняется для $p = \overline{p}^{\varkappa+1}$.

Пусть число компонент связности у графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$ равно τ, и, следовательно, $(\tau+1)$ у графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$. Чтобы различать множества I_{ν}, отвечающие компонентам связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa})$ от аналогичных множеств для графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$, будем писать $I^{\varkappa}_{\nu}$ в первом случае и $I^{\varkappa+1}_{\nu}$ - во втором. Аналогично для множеств J_{ν}, K_{ν}.

Пусть $i_0 \in I^{\varkappa}_{\tau}, I^{\varkappa+1}_{\tau}$; $j_0 \in J^{\varkappa}_{\tau}, J^{\varkappa+1}_{\tau}$; $j_1 \in J^{\varkappa}_{\tau}, J^{\varkappa+1}_{\tau}$.

По предположению, минимизирующим при определении величины t_{max} на шаге оказалось неравенство $z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda) \geq 0$. Из этого следует

$$z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\overline{\lambda}^{\varkappa}) < 0. \tag{39}$$

Для $z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda)$, как легко показать, справедлива формула

$$z^{\varkappa}_{i_0 j_0}(\lambda) = \sum_{i \in I_\tau^{\varkappa+1}} \sum_{k \in K} \lambda_k \theta_i^k - \sum_{k \in K_\tau^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa}. \qquad (40)$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{i \in I_\tau^{\varkappa+1}} \sum_{k \in K} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} \theta_i^k - \sum_{k \in K_\tau^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} < 0. \qquad (41)$$

Но $\lambda = \bar{\lambda}^{\varkappa}$ удовлетворяет системе (28), и поэтому

$$\sum_{i \in I_\tau^{\varkappa}} \sum_{k \in K} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} \theta_i^k - \sum_{k \in K_\tau^{\varkappa}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} = 0.$$

Учитывая, что $I_\tau^{\varkappa} = I_\tau^{\varkappa+1} \cup I_{\tau+1}^{\varkappa+1}$, $K_\tau^{\varkappa} = K_\tau^{\varkappa+1} \cup K_{\tau+1}^{\varkappa+1}$, отсюда получаем

$$\sum_{i \in I_{\tau+1}^{\varkappa+1}} \sum_{k \in K} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} \theta_i^k - \sum_{k \in K_{\tau+1}^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} > 0. \qquad (42)$$

Кроме того, так как $\lambda = \bar{\lambda}^{\varkappa}$ удовлетворяет (28) и $I_\nu^{\varkappa} = I_\nu^{\varkappa+1}$, $K_\nu^{\varkappa} = K_\nu^{\varkappa+1}$ при $\nu = 1, 2, \ldots, (\tau-1)$, то

$$\sum_{i \in I_\nu^{\varkappa+1}} \sum_{k \in K} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} \theta_i^k - \sum_{k \in K_\nu^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa} = 0, \ \nu = 1, \ldots, (\tau-1). \qquad (43)$$

Объединяя полученные соотношения (41), (42) и (43), видим, что они представляют собой результат подстановки $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^{\varkappa}$ в систему вида (28), но отвечающую множеству $\mathcal{B}_{\varkappa+1}$ (а не $\mathcal{B}_{\varkappa}$). Этой системе отвечает система вида (35)

$$\pi = \gamma_{\varkappa+1} \pi. \qquad (44)$$

При этом переменные π_ν связаны с переменными λ_k соотношениями (33), где $\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k^{\varkappa+1}$ задают пропорции между величинами λ_k, отвечающими ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$, и на каждой компоненте $\sum_{k \in K_\nu} \hat{\lambda}_k^{\varkappa+1} = 1$.

Как легко видеть, полученные соотношения (41)-(43) дают результат постановки вектора $\tilde{\pi}$ с компонентами

$$\tilde{\pi}_\nu = \sum_{k \in K_\nu^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_k^{\varkappa}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, (\tau+1), \qquad (45)$$

в систему (44), и для вектора $\tilde{z} = \tilde{\pi} - \gamma_{\varkappa+1} \tilde{\pi}$ имеем

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{z}_\tau > 0, \quad \tilde{z}_{\tau+1} < 0, \\ \tilde{z}_\nu = 0, \ \nu = 1, \dots, (\tau - 1).\end{array}\right\} \tag{46}$$

Применяя лемму 2 из [3] к положительной матрице $\gamma_{\varkappa+1}$, получим, что для положительного вектора $\pi^{\varkappa+1}$, решающего систему (44), и вектора $\tilde{\pi}$, ввиду (46), справедливо

$$\frac{\pi_\tau^{\varkappa+1}}{\pi_{\tau+1}^{\varkappa+1}} < \frac{\tilde{\pi}_\tau}{\tilde{\pi}_{\tau+1}} . \tag{47}$$

Теперь заметим, что ввиду (29)-(30) пропорции между величинами $\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa+1}$, $\bar{\rho}_j^{\varkappa+1}$, отвечающими вершинам какой-либо компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{\varkappa+1})$, сохраняются теми же, что и пропорции между соответствующими величинами $\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa}$, $\bar{\rho}_j^{\varkappa}$. Поэтому величины $\hat{\lambda}_\kappa^{\varkappa+1}$ задаются формулами

$$\hat{\lambda}_\kappa^{\varkappa+1} = \frac{\bar{\lambda}_\kappa^{\varkappa}}{\sum\limits_{h \in K_\nu^{\varkappa+1}} \bar{\lambda}_h^{\varkappa}}, \ \kappa \in K_\nu^{\varkappa+1}, \ \nu = 1, \dots, \tau+1 . \tag{48}$$

Зафиксировав некоторые $\kappa_1 \in K_\tau^{\varkappa+1}$, $\kappa_0 \in K_{\tau+1}^{\varkappa+1}$ (как отмечалось ранее, $K_\nu, I_\nu, \mathcal{J}_\nu \neq \emptyset$), домножим неравенство (47) на $\hat{\lambda}_{\kappa_1}^{\varkappa+1} / \hat{\lambda}_{\kappa_0}^{\varkappa+1}$. С учетом (45), (48) получаем

$$\frac{\bar{\lambda}_{\kappa_1}^{\varkappa+1}}{\bar{\lambda}_{\kappa_0}^{\varkappa+1}} < \frac{\bar{\lambda}_{\kappa_1}^{\varkappa}}{\bar{\lambda}_{\kappa_0}^{\varkappa}} ,$$

или

$$\frac{\bar{\lambda}_{\kappa_1}^{\varkappa+1}}{\bar{\lambda}_{\kappa_1}^{\varkappa}} < \frac{\bar{\lambda}_{\kappa_0}^{\varkappa+1}}{\bar{\lambda}_{\kappa_0}^{\varkappa}} . \tag{49}$$

По предположению $j_1 \in \mathcal{J}_\tau^{\varkappa+1}$, $j_0 \in \mathcal{J}_{\tau+1}^{\varkappa+1}$. Ввиду сделанного выше замечания о сохранении пропорций, из (49) слудует

$$\frac{\bar{\rho}_{j_1}^{\varkappa+1}}{\bar{\rho}_{j_1}^{\varkappa}} < \frac{\bar{\rho}_{j_0}^{\varkappa+1}}{\bar{\rho}_{j_0}^{\varkappa}} ,$$

или

$$\frac{\overline{p}_{j_1}^{\,\varkappa+1}}{\overline{p}_{j_0}^{\,\varkappa+1}} < \frac{\overline{p}_{j_1}^{\,\varkappa}}{\overline{p}_{j_0}^{\,\varkappa}} . \tag{50}$$

Но (i_0, j_0), $(i_0, j_1) \in \mathcal{B}_\varkappa$, и из (29) имеем

$$\frac{\overline{p}_{j_1}^{\,\varkappa}}{\overline{p}_{j_0}^{\,\varkappa}} = \frac{c_{j_1}^{i_0}}{c_{j_1}^{i_0}} . \tag{5I}$$

Окончательно из (50) и (5I) следует

$$\frac{\overline{p}_{j_1}^{\,\varkappa+1}}{\overline{p}_{j_0}^{\,\varkappa+1}} < \frac{c_{j_1}^{i_0}}{c_{j_0}^{i_0}} ,$$

и тем самым (38) для $p = \overline{p}^{\,\varkappa+1}$ выполняется, что и требовалось показать.

Вернемся к рассмотрению введенного в начале этого параграфа отображения $\zeta(\vartheta)$. Пусть $\zeta^\varkappa = \zeta(\vartheta^\varkappa)$. Это означает

$$c_h^\kappa \lambda_\kappa^\varkappa = \zeta_\kappa^\varkappa p_h^\varkappa , \quad (\kappa, h) \in \mathcal{B}_\varkappa . \tag{52}$$

С другой стороны,

$$c_h^\kappa \overline{\lambda}_\kappa^\varkappa = \zeta_\kappa^* \overline{p}_h^\varkappa , \quad (\kappa, h) \in \mathcal{B}_\varkappa . \tag{53}$$

Если $\zeta = \zeta^\varkappa$ удовлетворяет при некотором $\hat{\kappa} \in K$ условию

$$\zeta_\kappa = \zeta_\kappa^* , \quad \kappa \neq \hat{\kappa} , \tag{54}$$

то, умножая для $\kappa \neq \hat{\kappa}$ условия (52) на $(1-t)$, а (53) на t и складывая, получим, что (54) выполняется и для $\zeta = \zeta(\vartheta(t))$, а значит, и для $\zeta = \zeta^{\varkappa+1}$. Тем самым если (54) выполняется для начальной точки $\zeta = \zeta^0$, то оно выполняется в течение всего процесса. Только такой частный случай процесса (со специальным "стартом") и будет рассматриваться в дальнейшем.

При сделанном предположении точки $\zeta(\vartheta(t))$ будут двигаться по лучу $\Lambda \subset R^\ell$,

$$\Lambda = \left\{ \beta^\alpha \in R^\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} \beta_\kappa^\alpha = \zeta_\kappa^* , \ \kappa \neq \hat{\kappa} \\ \beta_{\hat{\kappa}}^\alpha = \alpha , \ \alpha \in R_+ \end{array} \right\} , \tag{55}$$

и направление движения на каждом шаге соответствует приближению к точке $\zeta^* \in \Lambda$.

ЛЕММА 3. Множество $\zeta(\Theta(\mathcal{B}_k)) \cap \Lambda$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширим область определения отображения $\zeta(\vartheta)$. Ясно, что его можно рассматривать не только для $\vartheta \in \Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$, но и на более широком множестве D, задаваемом условиями (28)-(29), (24) и требованиями $\lambda > 0$, $\rho > 0$. В этом случае отображение $\zeta(\vartheta)$, как следует из предыдущих рассмотрений, взаимно-однозначно отображает указанное множество D на множество положительных векторов (заменив в (30) ζ^* на произвольный $\beta > 0$ и решая совместно систему уравнений (28)-(30) и (24), однозначно получим $(\rho, \lambda) = \zeta^{-1}(\beta)$). Прообраз луча Λ при отображении $\zeta(\vartheta)$ будет являться порождением двух интервалов, которые зачеркиваются точками $\lambda(t)$ и $\rho(t)$, задаваемыми по формулам (32) при условии, что $\rho(t), \lambda(t) > 0$. (Не исключено, что один из этих интервалов вырождается в точку.) Таким образом, $\zeta^{-1}(\Lambda)$ - интервал в $R^{n+\ell}$. Учитывая, что $\Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$ - выпуклое множество, заключаем: $\zeta^{-1}(\Lambda) \cap \Theta(\mathcal{B}_\varkappa)$ - промежуток. Теперь требуемое утверждение о связности множества $\zeta(\Theta) \cap \Lambda$ следует из непрерывности отображения $\zeta(\vartheta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как расстояние текущей точки $\zeta(\vartheta^\varkappa)$ до точки ζ^* на каждом шаге процесса разве лишь убывает, то множество $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\varkappa$, для которого промежуток $\zeta(\Theta(\mathcal{B})) \cap \Lambda$ не вырождается в точку (и, значит, t_{max} на шаге $\varkappa$ строго положительно), на последующих шагах уже встретиться не может. Тем самым если бы такую ситуацию можно было гарантировать на каждом шаге, то отсюда и следовала бы конечность процесса. Однако, как показывают простые примеры, множество $\zeta(\Theta(\mathcal{B}_\varkappa)) \cap \Lambda$ может вырождаться в точку, и такие ситуации не могут быть исключены малыми вариациями исходных данных. Причиной тому однородность условий (15). Поэтому для доказательства конечности процесса мы следуем схеме полиэдральной комплементарности, которая не основывается на монотонном поведении в течение процесса значения какой-либо функции.

Пусть $\mathcal{L}$ - совокупность таких множеств $\mathcal{B}$, которые могут фигурировать в качестве $\mathcal{B}_\varkappa$ в описанном алгоритме, т.е. каждое $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$ отвечает равновесному состоянию параметрической модели обмена при некоторых значениях параметров λ_k.

Для $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$, как и для $\mathcal{B}_{\varkappa}$, можно ввести множества $\Omega(\mathcal{B})$, $\Xi(\mathcal{B})$, $\Theta(\mathcal{B}) = \Omega(\mathcal{B}) \times \Xi(\mathcal{B})$ и отображение $\zeta(\vartheta)$, о котором шла речь при доказательстве леммы. Через $\mathcal{L}_{\Lambda} \subset \mathcal{L}$ обозначим совокупность таких $\mathcal{B}$, которые могут фигурировать в качестве $\mathcal{B}_{\varkappa}$ в суженном варианте алгоритма, т.е. для которых $\zeta(\Theta(\mathcal{B})) \cap \Lambda = \emptyset$. Перемещая точку β по лучу Λ в пределах множества $\zeta(\Theta(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\Lambda}$, можно говорить о лимитирующих условиях, обусловленных требованием $\zeta^{-1}(\beta) = (\lambda^{\beta}, p^{\beta}) \in \Omega(\mathcal{B}) \times \Xi(\mathcal{B})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I (об ограниченной вырожденности). Для каждого $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{\Lambda}$ при смещении точки β в любом из двух возможных направлений по лучу Λ неединственность лимитирующей пары (s,j) возможна лишь, когда лимитирующим является условие $\lambda^{\beta} \in \Omega(\mathcal{B})$. Более того, неединственность может быть лишь одного вида: лимитирующих пар ровно две и относятся они к одному и тому же значению индекса $j = j_0$, т.е. имеют вид (s_1, j_0), (s_2, j_0), а других пар вида (s, j_0) в $\mathcal{B}$ нет.

Ясно, что при этом одна из указанных пар имеет вид (i_0, j_0), $i_0 \in I$, а другая – (k_0, j_0), $k_0 \in K$, т.е. речь идет о связи производителя k_0 с потребителем i_0 через товар j_0. Иначе, если бы, скажем, было $s_1, s_2 \in K$, имели бы $z_{s_1 j_0}(\lambda) \equiv -z_{s_2 j_0}(\lambda)$, а значит, обе пары (s_1, j_0) и (s_2, j_0) лимитирующими (по одному направлению) быть не могут (если одна из функций $z_{s_1 j}(\lambda)$, $z_{s_2 j}(\lambda)$ по направлению сдвига убывает, то другая растет).

Предполагая выполненным предположение I, можно конкретизировать алгоритм в случае неединственности лимитирующей пары. С этой целью фиксируем принадлежность каждого $j \in \mathcal{J}$ к одному из двух типов в зависимости от состава множества $S_j = \{s \mid (s,j) \in \mathcal{B}_0\}$: данный j может быть отнесен к i-типу, если $S_j \cap I \neq \emptyset$, и к k-типу, если $S_j \cap K \neq \emptyset$. Если обе возможности реализовались, то тип такого j фиксируется произвольно. Так как для начального множества $\mathcal{B}_0$ по предположению все множества S_j непусты, то определенный тип можно соотнести каждому $j \in \mathcal{J}$. Подчеркнем, что тип каждого $j \in \mathcal{J}$ фиксируется на все последующие итерации.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. При проведении процесса в случае неединственности лимитирующей пары на шаге $\varkappa$ исключаемая из $\mathcal{B}_{\varkappa}$ пара (s_0, j_0) выбирается в соответствии с типом j_0: если

j_0 имеет i-тип, то $s_0 \in K$, в противном случае $s_0 \in I$. Иными словами, сформулированное правило можно пояснить так: если предписание типов осуществлять на основе текущего множества $\mathcal{B}_{\varkappa}$, то мы заботимся о том, чтобы в качестве такого предписания на каждом шаге сохранилось то, которое было зафиксировано на основе множества $\mathcal{B}_0$.

Благодаря этому правилу по данному $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\varkappa}$, $\varkappa \neq 0$, однозначно определяются его "соседи": не только следующее за ним множество $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}_{\varkappa+1}$, но и предшествующее $\mathcal{B}^- = \mathcal{B}_{\varkappa-1}$. Действительно, как легко видеть из рассмотрений , приведенных при доказательстве леммы I, при смене направления изменения параметра t в формулах (32) неравенство, перешедшее из базовых в небазовые на предыдущем шаге, окажется в числе лимитирующих. Таким образом, для определения множества $\mathcal{B}^-$, являющегося предшествующим в процессе множеству $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\varkappa}$, нужно рассматривать смещение точки β по лучу Λ в сторону удаления от точки ζ^*. Согласно предположению I, в случае неединственности мы имеем ровно две лимитирующих пары вида (i_0, j_0), (k_0, j_0) . Но так как значение $j = j_0$ должно иметь вполне определенный тип, то из указанных пар однозначно выбирается одна, которой и пополнялось множество $\mathcal{B}_{\varkappa-1}$ при переходе к $\mathcal{B}_{\varkappa}$. Исключая ее из $\mathcal{B}$, получаем $\mathcal{B}^-$.

В результате проведенных рассуждений заключаем, что траектория множеств $\mathcal{B}_{\varkappa}$ не может возвратиться ни к какому уже пройденному множеству, кроме множества $\mathcal{B}_0$: если все множества $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{\varkappa+1}$ различны, то $\mathcal{B}_{\varkappa+2}$ отлично от $\mathcal{B}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{B}_{\varkappa+1}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для начального множества $\mathcal{B}_0$ при отвечающем ему отображении $\zeta(\vartheta)$ множество $\zeta(\Theta(\mathcal{B}_0))$ содержит бесконечную часть луча Λ .

При выполнении этого предположения для множества $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ нет множества $\mathcal{B}^-$, а значит, возврат траектории к множеству $\mathcal{B}_0$ также исключается.

Резюмируя все вышеизложенное, получаем требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА. При исходных условиях на модель и выполнении предположений I-3 описанный алгоритм позволяет получить состояние равнове-

сия рассматриваемой модели за конечное число шагов.

5. Построение начала

Начальное множество $\mathcal{B}_0$, удовлетворяющее предположению 3, однозначно определяется при условии двойственной невырожденности транспортной задачи (I2)-(I6) как то из базисных множеств этой задачи, которое является оптимальным при всех λ, удовлетворяющих (24), положительных и достаточно близких к орту $e_{\hat{k}}$, т.е. λ_k достаточно малы при $k \neq \hat{k}$ ($\hat{k}$ из (54)).

В самом деле, взяв такое базисное множество $\mathcal{B}_0$, из (29) с точностью до множителя $\varepsilon > 0$ получаем p^0:

$$p_j^0 = \varepsilon \hat{p}_j^0, \quad j \in J, \tag{56}$$

что позволяет из (30) выразить через ε и λ_k^0:

$$\lambda_k^0 = \zeta_k^* \frac{\hat{p}_j^0}{c_j^k} \varepsilon, \quad (k,j) \in \mathcal{B}_0, \; k \neq \hat{k}, \tag{57}$$

и $\lambda_{\hat{k}}^0$ определится из (24): $\lambda_{\hat{k}}^0 = 1 - \sum\limits_{k \neq \hat{k}} \lambda_k^0$. При $\varepsilon \to 0$ будет $\lambda_k^0 \to 0$, $k \neq \hat{k}$, и, значит, при достаточно малых ε имеем $\lambda^0 \in \Omega(\mathcal{B}_0)$, а $\vartheta^0 = (\lambda^0; p^0) \in \Theta(\mathcal{B}_0)$. При отображении $\zeta(\vartheta)$ будем иметь

$$\zeta_{\hat{k}}^0 = \frac{c_j^{\hat{k}}}{p_j^0} \lambda_{\hat{k}}^0, \quad (\hat{k}, j) \in \mathcal{B}_0,$$

и $\zeta_{\hat{k}}^0 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$, ибо $\lambda_{\hat{k}}^0 \longrightarrow 1$, а $p_j^0 \longrightarrow 0$. Таким образом, точка $\zeta(\vartheta^0)$ действительно зачерчивает бесконечно удаленную часть луча Λ при $\varepsilon \to 0$.

Для практического получения указанного $\mathcal{B}_0$ можно поступить следующим образом. Решим транспортную задачу (I2)-(I6) при $\lambda = e_{\hat{k}}$ (т.е. при $\lambda_{\hat{k}} = 1$ и $\lambda_k = 0$, $k \neq \hat{k}$). Не исключено, что зона оптимальности полученного при этом базисного множества и ограничивается точкой $e_{\hat{k}}$. Если это так, воспользуемся процедурой параметрического линейного программирования, смещая λ по какому-либо направлению внутрь множества положительных λ : $\lambda(\alpha) = e_{\hat{k}} + \alpha q$, $q > 0$. В результа-

те будет получено базисное множество $\hat{\mathcal{B}}$, являющееся оптимальным при всех достаточно малых положительных α. Оно и является требуемым. Покажем это.

Полученное базисное множество однозначно определяет величины z_{sj} как функции параметров λ_k из условий (13)-(15) и $z_{sj}=0$ при $(s,j)\notin\hat{\mathcal{B}}$. Требование неотрицательности этих функций и задает зону оптимальности базисного множества $\hat{\mathcal{B}}$. Рассмотрим какое-либо из возникающих неравенств. Пусть, для определенности, $s=k_0\in K$. Функция $z_{k_0j}(\lambda)$ имеет вид

$$z_{k_0j}(\lambda)=-\sum_{i\in I_0}\sum_{k\in K}\lambda_k\theta_k^i+\sum_{k\in K_0}\lambda_k,$$

где множества I_0 и K_0 отвечают той из компонент связности графа $\Gamma(\hat{\mathcal{B}}\setminus\{(k_0,j)\})$, которая содержит вершину k_0.

Если $K_0=K$, то $z_{k_0j}=\sum_{i\in I\setminus I_0}\sum_{k\in K}\lambda_k\theta_k^i$ и $z_{k_0j}(\lambda)\geqslant 0$ при всех $\lambda\geqslant 0$. Пусть $K_0\neq K$. Если при этом $I_0=\varnothing$, то $z_{k_0j}(\lambda)=\sum_{k\in K_0}\lambda_k$ снова неотрицательно при всех $\lambda\geqslant 0$. Если же $I_0\neq\varnothing$, то $I_0\neq I$, ибо тогда $z_{k_0j}(\lambda)=-\sum_{k\in K\setminus K_0}\lambda_k$ и условие $z_{k_0j}(\lambda)\geqslant 0$ не выполняется ни при одном $\lambda>0$, что противоречит выбору множества $\hat{\mathcal{B}}$ (оно оптимально для $\lambda=e_{\hat{k}}+\alpha q$ при $q>0$, $\alpha>0$ и α достаточно мало). А при $I_0\neq\varnothing$ и $I_0\neq I$ условие $z_{k_0j}(\lambda)\geqslant 0$ имеет вид:

$$z_{k_0j}(\lambda)=\sum_{k\in K_0}\alpha_k\lambda_k-\sum_{k\in K\setminus K_0}\beta_k\lambda_k\geqslant 0 \qquad (58)$$

и $\alpha_k,\beta_k>0$ (ввиду того, что все $\theta_k^i>0$ и $\sum_{k\in K}\theta_k^i=1$).
Так как это неравенство должно выполняться для $\lambda=e_{\hat{k}}$, то $\hat{k}\in K_0$. Ясно, что при этом неравенство (58) выполняется как строгое. А тогда выполняется и для всех λ, близких к $e_{\hat{k}}$.

Столь же просто анализируется случай $s=i_0\in I$.

Таким образом, действительно полученное базисное множество $\hat{\mathcal{B}}$ является искомым множеством $\mathcal{B}_0$.

6. Пример

Рассмотрим иллюстративный пример, в котором три производителя, два потребителя и три товара. Пусть $I = \{1,2\}$, $K = \{3,4,5\}$. Исходные данные таковы:

$$c^1 = (2,1,4), \quad \theta^1 = (1/2,\ 1/3,\ 3/4),$$

$$c^2 = (4,3,1), \quad \theta^2 = (1/2,\ 2/3,\ 1/4),$$

$$c^3 = (1,1,2), \quad \zeta_3^* = 4,$$

$$c^4 = (3,4,2), \quad \zeta_4^* = 6,$$

$$c^5 = (3,1,1), \quad \zeta_5^* = 8.$$

Текущую информацию о множестве $\mathcal{B}_\varkappa$ будем задавать в виде матриц размером 5x3, отмечая позиции $(s,j) \in \mathcal{B}_\varkappa$ знаком x, а прочие позиции - точкой. Эти матрицы будем также обозначать через $\mathcal{B}_\varkappa$.

В качестве $\hat{K}$ возьмем $K = 3$. Начальное множество $\mathcal{B}_0$, как легко убедиться, задается матрицей

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times \end{pmatrix}$$

Функции $z_{sj}(\lambda)$, порождаемые $\mathcal{B}_0$, имеют вид

$$z_{13}(\lambda) = (\theta^1, \lambda) = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{3}\lambda_4 + \frac{3}{4}\lambda_5,$$

$$z_{21}(\lambda) = (\theta^2, \lambda) = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{2}{3}\lambda_4 + \frac{1}{4}\lambda_5,$$

$$z_{31}(\lambda) = z_{21}(\lambda), \quad z_{32}^{(\lambda)} \equiv 0, \quad z_{33}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{2}{3}\lambda_4 - \frac{1}{4}\lambda_5,$$

$$z_{43}(\lambda) = \lambda_4, \quad z_{53}(\lambda) = \lambda_5.$$

Формулы (56) для начального ρ^0 в данном случае имеют вид

$$\rho_1^0 = \varepsilon, \quad \rho_2^0 = \varepsilon, \quad \rho_3^0 = 2\varepsilon.$$

А для λ_k^0 в соответствии с (57) получаем

$$\lambda_4^0 = 6\varepsilon, \quad \lambda_5^0 = 16\varepsilon, \quad \lambda_3^0 = 1 - 22\varepsilon.$$

Среди условий $z_{sj}(\lambda) \geq 0$ ограничивающим зону оптимального базисного множества $\mathcal{B}_0$ является лишь условие $z_{33}(\lambda) \geq 0$, которое эквивалентно $6\lambda_3 - 8\lambda_4 - 3\lambda_5 \geq 0$. Подставляя $\lambda_k = \lambda_k^0$, получим $6(1-22\varepsilon) - 8\cdot 6\varepsilon - 3\cdot 16\varepsilon \geq 0$. Отсюда $\varepsilon \leq 1/38$.

Таким образом, λ^0 удовлетворяет условию $z_{33}(\lambda) \geq 0$ при $\varepsilon \leq 1/38$. Можно зафиксировать любое $\varepsilon \in (0, 1/38]$ и с соответствующими такому ε начальными ρ^0 и λ^0 начать процесс в соответствии с описанием. Ясно, однако, что начальная итерация просто продолжит изменение векторов ρ и λ в том же направлении. Поэтому, фиксируя $\varepsilon = 1/38$, можно сразу получить ρ^1, λ^1 и множество $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \setminus \{(3,3)\}$. В результате

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 1/38 \\ 1/38 \\ 1/19 \end{pmatrix}, \quad \lambda^1 = \begin{pmatrix} 8/19 \\ 3/19 \\ 8/19 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times \end{pmatrix}, \quad \zeta_3(\rho^1, \lambda^1) = 16.$$

ИТЕРАЦИЯ I. Для определения величин $\bar{\rho}_j^1$, $\bar{\lambda}_k^1$ имеем систему уравнений

$$\rho_1 = \rho_2; \quad \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{2}{3}\lambda_4 - \frac{1}{4}\lambda_5 = 0,$$
$$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1;$$
$$\lambda_3 = 4\rho_1, \quad \lambda_4 = 3\rho_3, \quad \lambda_5 = 8\rho_3.$$

Решая эту систему, получаем

$$\bar{\lambda}^1 = \lambda^1; \qquad \bar{\rho}^1 = \begin{pmatrix} 2/19 \\ 2/19 \\ 1/19 \end{pmatrix}.$$

Тем самым $\lambda(t) \equiv \lambda^1$ и условия $z_{sj}(\lambda) \geq 0$ не будут лимитирующими при определении t_{max}. Имеем

$$p(t)=p^1+t\begin{pmatrix}3/38\\3/38\\0\end{pmatrix}.$$

Лимитирующей парой при определении t_{max} оказывается пара (5,2), т.е. условие

$$\frac{1}{p_2(t)}\geq\frac{1}{p_3(t)},$$

и $t_{max}=1/3$.

В результате имеем

$$p^2=\begin{pmatrix}1/19\\1/19\\1/19\end{pmatrix},\quad \lambda^2=\lambda^1,\quad \mathcal{B}_2=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\times\\\times&\cdot&\cdot\\\times&\times&\cdot\\\cdot&\cdot&\times\\\cdot&\times&\times\end{pmatrix},\ \zeta_3(\lambda^2,p^2)=8.$$

ИТЕРАЦИЯ 2. Система уравнений для определения $\bar{p}_j^2$, $\bar{\lambda}_k^2$:

$$p_1=p_2;$$

$$p_2=p_3;\qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1;$$

$$\lambda_4=3p_3,\ \lambda_5=8p_3;$$

Отсюда

$$\bar{p}^2=\begin{pmatrix}1/15\\1/15\\1/15\end{pmatrix},\quad \bar{\lambda}^2=\begin{pmatrix}4/15\\3/15\\8/15\end{pmatrix}.$$

Функции $z_{sj}(\lambda)$ имеют следующий вид:

$$z_{13}(\lambda)=(\lambda,\theta^1),\ z_{21}(\lambda)=(\lambda,\theta^2),\ z_{31}(\lambda)\equiv z_{21}(\lambda)=(\lambda,\theta^2),$$

$$z_{32}(\lambda)=\lambda_3-z_{31}=\lambda_3-(\lambda,\theta^2),\quad z_{43}(\lambda)=\lambda_4,$$

$$z_{52}(\lambda)=-z_{32}(\lambda)=-\lambda_3+(\lambda,\theta^2),\ z_{53}(\lambda)=z_{13}-z_{43}=(\lambda,\theta^1)-\lambda_4.$$

Легко видеть, что $t_{max}=0$, и при этом лимитирующей парой является пара (3,2): $z_{52}(\lambda^2)=0$, и условие $z_{52}(\lambda)\geq 0$ не является лимитирующим (согласно рассуждениям, приведенным при доказательстве леммы I); значит, лимитирующим является условие $z_{32}(\lambda)\geq 0$, ибо $z_{32}(\lambda)=-z_{52}(\lambda)$.

В результате

$$\rho^3=\rho^2,\quad \lambda^3=\lambda^2(=\lambda^1),\quad \mathcal{B}_3=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \times \end{pmatrix},\quad \zeta(\rho^3,\lambda^3)=8.$$

ИТЕРАЦИЯ 3. Система для определения величин $\bar{\rho}_j^3$, $\bar{\lambda}_k^3$ такова:

$$\rho_2=\rho_3;\quad \frac{1}{2}\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4-\frac{1}{4}\lambda_5=0,$$

$$\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1;$$

$$\lambda_3=4\rho_1,\quad \lambda_4=3\rho_3,\quad \lambda_5=8\rho_3.$$

Отсюда получаем

$$\bar{\rho}^3=\begin{pmatrix} 2/19 \\ 1/19 \\ 1/19 \end{pmatrix},\qquad \bar{\lambda}^3=\lambda^3.$$

Снова $\lambda(t)\equiv\lambda^3$ и условия $z_{sj}(\lambda)\geq 0$ не являются лимитирующими для t_{max}. Для $\rho(t)$ имеем

$$\rho(t)=\rho^3+t\begin{pmatrix} 1/19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Лимитирующей парой при определении t_{max} оказывается пара (2,2), т.е. условие

$$\frac{4}{\rho_1(t)}\geq\frac{3}{\rho_2(t)},$$

и $t_{max} = 1/3$, что дает

$$\rho^4 = \begin{pmatrix} 4/57 \\ 1/19 \\ 1/19 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \lambda^3 (= \lambda^2 = \lambda^1), \quad \mathcal{B}_4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \times \\ \times & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \times \end{pmatrix}, \quad \zeta_3(\rho^4, \lambda^4) = 6.$$

ИТЕРАЦИЯ 4. Система для определения $\bar{\rho}_j^4$, λ_k^4 такова:

$$3\rho_1 = 4\rho_2, \quad \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1,$$

$$\rho_2 = \rho_3; \quad \lambda_3 = 4\rho_1, \ \lambda_4 = 3\rho_3, \ \lambda_5 = 8\rho_3.$$

Отсюда

$$\bar{\rho}^4 = \begin{pmatrix} 4/49 \\ 3/49 \\ 3/49 \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}^4 = \begin{pmatrix} 16/49 \\ 9/49 \\ 24/49 \end{pmatrix}.$$

Для функций $z_{sj}(\lambda)$ имеем

$$z_{13}(\lambda) = (\lambda, \theta^1), \ z_{43}(\lambda) = \lambda_4, \ z_{53}(\lambda) = z_{13} - z_{43} = (\lambda, \theta^1) - \lambda_4 =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{2}{3}\lambda_4 + \frac{3}{4}\lambda_5; \quad z_{31}(\lambda) = \lambda_3, \ z_{21}(\lambda) = z_{31}(\lambda) = \lambda_3,$$

$$z_{22}(\lambda) = (\lambda, \theta^2) - z_{21} = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{2}{3}\lambda_4 + \frac{1}{4}\lambda_5, \ z_{52}(\lambda) \equiv z_{22}(\lambda).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что все эти функции при $\lambda = \bar{\lambda}^4$ имеют положительные значения, т.е. $\bar{\lambda}^4 \in \Omega(\mathcal{B}_4)$. Выполненным оказывается и условие $\bar{\rho}^4 \in \Xi(\mathcal{B}_4)$, т.е. $\rho = \rho^4$ удовлетворяет системе неравенств (25)-(26), порождаемой $\mathcal{B}_{\varkappa} = \mathcal{B}_4$.

Таким образом, $\tilde{\rho} = \rho^4$ - вектор равновесных цен исходной модели. По формулам $\tilde{x}_j^s = z_{sj}(\bar{\lambda}^4)/\bar{\rho}_j^4$ получаем планы участников, отвечающие состоянию равновесия:

$$\tilde{x}^1 = (0, 0, 29/3),$$

$$\tilde{x}^2 = (4, 4/3, 0),$$

$$\tilde{x}^3 = (4, 0, 0),$$

$$\tilde{x}^4 = (0, 0, 3),$$

$$\tilde{x}^5 = (0, 4/3, 20/3).$$

Убедимся, что это действительно равновесное состояние. Имеем $(c^3, \tilde{x}^3) = 4$, $(c^4, \tilde{x}^4) = 6$, $(c^5, \tilde{x}^5) = 8$, т.е. производители при указанных планах расходуют свои ресурсы в заданных количествах. При этом по ценам $p_j = \tilde{p}_j$ получают максимальный доход

$$(\tilde{p}, \tilde{x}^3) = 16/49 (= \bar{\lambda}_3^4),$$

$$(\tilde{p}, \tilde{x}^4) = 9/49 (= \bar{\lambda}_4^4),$$

$$(\tilde{p}, \tilde{x}^5) = 24/49 (= \bar{\lambda}_5^4).$$

Суммарный доход равен I. Он перераспределяется между первым и вторым потребителем в количествах $(\bar{\lambda}^4, \theta^1)$ и $(\bar{\lambda}^4, \theta^2)$, что составляет $^{29}/_{49}$ и $^{20}/_{49}$. Это действительно позволяет потребителям реализовать указанные планы закупок $\tilde{x}^1$ и $\tilde{x}^2$, дающие значения соответствующих функций полезности

$$(c^1, \tilde{x}^1) = \frac{4 \cdot 29}{3} = \frac{116}{3}, \qquad (c^2, \tilde{x}^2) = 16 + 4 = 20.$$

Баланс товаров очевидным образом выполнен. Тем самым нами действительно получено равновесное состояние рассматриваемой модели.

Литература

I. Шмырев В.И. Задача полиэдральной комплементарности// Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61). - С.82-95.
2. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена// ДАН СССР. - 1983. - Т.268, №5. - С.1062-1066.
3. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели

обмена // Сиб. мат. журн. - 1985. - Т.26, №2. - С.162-175.
4. Lemke C.E. Bimatrix equalibrium points and mathematical programming// Manag. Sci.- 1965.- V.II.- P.681-689.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.10.1989 г.