Выпуск 46(63) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Выпуклый анализ

УДК 517.514

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИПШИЦА

Ю.Н.Владимиров

В связи с исследованием задачи оптимального перемещения массы в метрическом пространстве (см. [1-5]) возникает необходимость в изучении различных классов функций Липшица. При этом важную роль играют частичные порядки, порождаемые этими функциями [6-11]. Особый интерес представляет вопрос восстановления функций Липшица по соответствующим частичным порядкам. Введенный ниже предпорядок на множестве функций Липшица тесно связан с данным вопросом. Этот предпорядок в определенном смысле мажорирует предпорядок, изученный в работе автора [10].

Пусть $(X, r)$ – метрическое пространство и $Lip_1(X,r)$ – класс функций $u: X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих при любых $x$ и $y$ из $X$ неравенству $u(y)-u(x) \le r(x,y)$. Каждая функция $u \in Lip_1(X,r)$ порождает на $X$ частичный порядок $\overset{u}{\le}$ :

$$x \overset{u}{\le} y \Longleftrightarrow u(y)-u(x)=r(x,y),\ x,y\in X.$$

Обозначим

$$[x,y]_u=\{z\in X \mid x\overset{u}{\le} z\overset{u}{\le} y\},\ E_u=\bigcup_{x<y}[x,y]_u,\ L_u=\bar{E}_u,$$

где $\bar{E}$ – замыкание множества $E$ в топологии, индуцированной метрикой $r$.

В [10] был введен предпорядок $\preccurlyeq_1$ :

$$u\preccurlyeq_1 v \Longleftrightarrow u(x)-v(x)=const,\ x\in E_u;\ u,v\in Lip_1(X,r).$$

Там же изучен вопрос о существовании максимальных (именуемых в дальнейшем 1-максимальных) функций Липшица и приведены признаки максимальности.

Введем теперь новый предпорядок $\preccurlyeq_2$ :

$$u \preccurlyeq_2 v \Longleftrightarrow (x \leq^u y \mapsto x \leq^v y), \ u, v \in Lip_1(X, r).$$

Сразу отметим, что справедлива импликация

$$u \preccurlyeq_1 v \Longrightarrow u \preccurlyeq_2 v. \qquad (I)$$

Обратная импликация, вообще говоря, неверна.

Рассмотрим вопрос существования 2-максимальных (т.е. максимальных в смысле предпорядка $\preccurlyeq_2$ ) функций Липшица. Так же, как и в случае предпорядка $\preccurlyeq_1$ , этот вопрос имеет положительное решение.

ТЕОРЕМА I. Любое линейно-предупорядоченное (отношением $\preccurlyeq_2$ ) множество $U \subset Lip_1(X, r)$ ограничено сверху некоторой функцией $u_0 \in L_1(X, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и рассмотрим множество $V_0 = \{u \in Lip_1(X, r) | u(x_0) = 0\}$ . Это множество, очевидно, замкнуто в $R^X$ в топологии поточечной сходимости. Кроме того, при каждом $y \in X$ множество $\{u(y) | u \in V_0\}$ ограничено в $R$ : $|u(y)| = |u(y) - u(x_0)| \leq r(x_0, y), u \in V_0$. Следовательно (см. [12]), $V_0$ компактно в топологии поточечной сходимости.

Рассмотрим множество $U_0 = \{v \in Lip_1(X, r) | v(x) = u(x) - u(x_0), x \in X, u \in U\}$. Это множество, очевидно, является линейно-предупорядоченным, причем $U_0 \subset V_0$ . Следовательно [12], в $U_0$ существует сходящаяся поднаправленность; ее предел обозначим через $u_0$ . При этом для всех $u \in U_0$ справедливо неравенство $u \preccurlyeq_2 u_0$. Значит, $u \preccurlyeq_2 u_0$ при всех $u \in U$ . Теорема I доказана.

Теорема I позволяет применить лемму Цорна к предупорядоченному множеству $Lip_1(X, r)$.

СЛЕДСТВИЕ. Для каждого линейно-предупорядоченного (отношением $\preccurlyeq_2$ ) множества $U \subset Lip_1(X, r)$ существует максимальный элемент множества $Lip_1(X, r)$, мажорирующий элементы $U$ .

На основании свойства (I) можно сделать заключение, что всякая 2-максимальная функция $u \in Lip_1(X, r)$ является также I-максимальной. Обратное утверждение неверно. В [10] приведен достаточный признак I-максимальности: $L_u = X$ . В случае компактных метрических пространств или конечномерных нормированных пространств этот признак является и необходимым.

В общем случае даже более сильное условие $E_u = X$ не является достаточным для 2-максимальности функции $u \in Lip_1(X, r)$.

Приведем признак 2-максимальности для функций Липшица одной вещественной переменной. Пусть $X = \mathbb{R}$, $r(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Напомним, что функция $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $Lip_1(\mathbb{R}, r)$ в том и только в том случае, когда $u$ абсолютно непрерывна на любом замкнутом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и ее производная удовлетворяет при почти всех $x \in \mathbb{R}$ (относительно соответствующей лебеговой меры $\mu$) неравенству $|u'(x)| \leq 1$. При этом для каждого $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Для функций $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ введем в рассмотрение множества

$$M_u^i = \{x \in \mathbb{R} \mid u'(x) = (-1)^i\}, \quad G_u^i = int\, M_u^i, \quad i = 1, 2,$$

где через $int\, M$ обозначена совокупность всех внутренних точек множества $M$. Сразу заметим, что справедлива импликация

$$u \preccurlyeq_2 v \Longleftrightarrow G_u^i \subseteq G_v^i, \ i = 1, 2. \qquad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ является 2-максимальной в том и только в том случае, когда любой открытый интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ либо целиком содержится в одном из множеств $G_u^i$, либо имеет непустое пересечение с каждым $G_u^i$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть функция $u \in Lip_1(\mathbb{R}, r)$ является 2-максимальной. Зафиксируем точки $a < b$ из $\mathbb{R}$. Предположим, что открытый интервал $(a, b)$ не пересекается с множеством $G_u^i$. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} (-1)^{i+1}, & x \in (a, b), \\ u'(x), & x \in \mathbb{R} \setminus (a, b); \end{cases}$$

$$v(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Функция $v$, очевидно, принадлежит классу $Lip_1(R, r)$. При этом $G^i_v = G^i_u$, $G^j_v \supseteq G^j_u$, $(a,b) \subseteq G^j_v$, $j \neq i$. На основании (2) отсюда вытекает, что $u \preccurlyeq_2 v$. Но функция $u$ является 2-максимальной, следовательно, $v \preccurlyeq_2 u$. Значит, $G^j_v \subseteq G^j_u$, т.е. $(a,b) \subseteq G^j_u$, $j \neq i$.

Достаточность. Предположим, что нашлась такая функция $v \in Lip_1(R, r)$, для которой $u \prec_2 v$. Это означает, что для некоторого $i$ существует интервал $(a,b)$, который содержится в $G^i_v$ и не содержится в $G^i_u$. При этом на основании (2) $G^i_u \subseteq G^i_v$, $G^j_u \subseteq G^j_v$ и, кроме того, $G^i_v \cap G^j_v = \emptyset$, $j \neq i$. Следовательно, $G^i_v \cap G^j_u = \emptyset$. Отсюда вытекает, что $(a,b) \cap G^j_u = \emptyset$. Это противоречит условию. Теорема 2 доказана.

В заключение рассмотрим один пример из [10]. Выберем в $R$ такое открытое множество $G$, что $\bar{G} = R$, $\mu(R \setminus G) > 0$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \in R \setminus G. \end{cases}$$

Зададим функцию $u$ равенством $u(x) = x$, $x \in R$, а функцию $v$ – равенством (3). Обе функции $u$ и $v$ принадлежат классу $Lip_1(R, r)$. Кроме того, $L_u = L_v = R$. Следовательно, эти функции являются 1-максимальными. По теореме 2 функция $u$ является 2-максимальной, а функция $v$ таковой не является. При этом $v \prec_2 u$. Заметим также, что $u$ и $v$ не сравнимы в смысле предпорядка $\preccurlyeq_1$.

Литература


1. Канторович Л.В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. – 1942. – Т.37, № 7–8. – С.227–229.
2. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах// Докл. АН СССР. – 1957. – Т.115, №6. – С.1058–1061.
3. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестник ЛГУ. – 1958. – №7. – С.52–59.
4. Рубинштейн Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа// Усп. мат.

наук. - 1970. - Т.25. - С.171-201.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М., Наука, 1977.
6. Владимиров Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве// Оптимизация. - 1980. - Вып. 24(41). - С.60-69.
7. Владимиров Ю.Н. Добавление к статье // Оптимизация. - 1981.- Вып.26(43). - С.141-142.
8. Владимиров Ю.Н. О наилучших приближениях нормального распределения в метрике Канторовича - Рубинштейна// Оптимизация. - 1984. - Вып. 34(51). - С.13-23.
9. Владимиров Ю.Н. К задаче перемещения лебеговой меры на евклидовой плоскости// Оптимизация. - 1985. - Вып.36(53). - С.17-30.
10. Владимиров Ю.Н. О максимальных функциях Липшица, связанных с задачей оптимального перемещения массы// Оптимизация. - 1988. - Вып. 44(61). - С.96-113.
11. Владимиров Ю.Н. Задачи оптимального перемещения массы на плоскости и связанные с ними функции Липшица// Оптимизация.- 1989. - Вып.45(62). - С.87-98.
12. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1981.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.09.1989 г.