Выпуск 47(64) *О П Т И М И З А Ц И Я* 1990 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЫНКИ, МЕХАНИЗМЫ ГРУППОВОГО ВЫБОРА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

(по итогам работы Четвертой Новосибирской школы по математической экономике)

В.А.Васильев, В.М.Маракулин

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В в е д е н и е

В основу предлагаемой работы положен обзор докладов и выступлений, сделанных участниками Четвертой Новосибирской школы по математической экономике, состоявшейся в Академгородке в начале сентября 1988 г. Как и в предыдущих обзорах, подробно освещаются только те сообщения, которые соответствуют принятой авторами логической схеме изложения. В обзоре представлено значительное число авторских результатов, имеющих прямое отношение к обсуждавшейся проблематике. Поэтому настоящую работу можно трактовать и как оригинальную научно-исследовательскую статью.

Наряду с сотрудниками Института математики СО АН СССР в работе Школы участвовали представители Центрального экономико-математического института АН СССР, Вычислительного центра АН СССР, Института социально-экономических проблем АН СССР, Института математики и кибернетики АН Литвы, Института экономики и организации промышленного производства СО АН СССР и ряда других научных организаций.

Лекции и доклады, прочитанные на IV Школе по математической экономике, концентрировались, главным образом, вокруг следующих направлений: экономическая динамика и равновесие в условиях НТП, моделирование смешанных экономических систем, механизмы стабильного группового выбора и модели стимулирования производственной деятельности. В дискуссиях, которыми сопровождались все выступления, нашли свое отражение важнейшие вопросы экономической жизни страны - проблемы кардинального реформирования плановой экономики и, в частности, задачи оптимального функционирования арендных, кооперативных и акционерных предприятий в условиях сосуществования государственных и рыночных механизмов регулирования.

Проблематика упомянутых дискуссий по неклассическим рынкам в значительной мере представлена в последующих главах. Здесь же мы ограничимся кратким изложением наиболее интересных докладов, не вошедших в основной текст обзора.

Начнем с выступления, тематика которого весьма актуальна для переживаемого нами переходного периода. "Построение индексов социально-экономического неравенства" - так назывался доклад

Б.А.Ефимова (Москва, ЦЭМИ АН СССР), вызвавший живой интерес участников своей новизной и глубиной изложения. В нем было представлено два важнейших направления теории индексов. Первое - взаимосвязь индексов социально-экономического неравенства и функций общественного благосостояния; второе - проблемы сравнительного анализа экономического неравенства в различных формациях. При этом анализировались такие понятия, как индексы Джини и Аткинсона, коэффициенты вариации Пирсона и кривая Лоренца. Докладчик отметил важную роль отношения мажоризации, на котором базируются все современные меры неравенства (идея мажоризации присутствует уже в определении кривой Лоренца, изображающей распределение доходов $x = (x_1,\ldots,x_n)$ в порядке их возрастания). Наряду с принципом сохранения мажоризации обсуждались и такие требования, предъявляемые к индексам, как анонимность, однородность и разложимость. Большое внимание уделено проблеме построения индексов неравенства в условиях взаимовлияния участников. В этой ситуации требуется пересмотр некоторых из упомянутых выше требований (например, анонимности) и учет дополнительных факторов типа коэффициентов взаимовлияния α. В терминах α определяются понятия α-мажоризации и α-передачи, обобщающие традиционные аналоги, и дается общее определение индекса $E_1(\alpha,x)$. В заключительной части доклада была приведена схема определения коэффициентов α, основанная на некоторой специальной модели взаимодействия участников и продемонстрированы примеры вычисления индексов согласованного экономического неравенства.

В докладе Г.Ю.Силкиной (Дзержинск, Политехнический институт) "Достижимость ядер в играх без побочных платежей" исследовались вопросы сходимости монотонных (в смысле доминирования) траекторий к ядрам выпуклых кооперативных игр. Как и для игр с побочными платежами, приемы построения аппроксимирующих траекторий основаны на учете надлежащим образом определенных эксцессов - аналогов величин $v(S)-\sum\limits_{S} x_i$. Предложенные процедуры последовательного улучшения позволяют доказать, что ядра некоторых игр без побочных платежей являются их предельными обобщенными *НМ*-решениями.

В докладе Меньшикова И.С. (Москва, ВЦ АН СССР) "Теоретико-игровые аспекты формализации процесса переговоров" был дан обзор проблем и результатов в области построения моделей, отвечающих процессу переговоров. Примером таких моделей может служить позиционная игра, узлам которой отвечают переговорные позиции, а ребра связывают данную позицию с теми, куда возможен переход за один такт. Предпочтения игроков (функции выигрыша) определены на узлах этого графа. Теперь, если последовательность ходов участников фиксирована, то определяется так называемое "сложное" или "софистическое" равновесие, когда игроки делают свой ход - выбор позиции - в соответствии с предпочтениями и порядком ходов (например, по очереди). Итогом этой формальной схемы переговоров и является реализация сложного равновесия. Данный подход можно обобщить, если, например, учитывать наличие угроз, связанных с разрывом переговоров и т.п. (подробности можно найти в [1]).

В докладе Грикениса А. (Вильнюс, Институт экономики АН Литвы) "Некоторые свойства процессов обмена, моделируемых β-траекториями" была предпринята попытка выделить траектории обмена, подчиняющиеся, помимо известных условий Смейла [2], ряду дополнительных требований. Эти требования состоят в допущении сравнимости полезностей и выполнении условия

$$p^i(x^i)\dot{x}^j = p^j(x^j)\cdot\dot{x}^i, \qquad i,j \in N,$$

вдоль траектории $x(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t))$. Здесь величину $p^i(x^i)\cdot\dot{x}^j$ можно трактовать как инфинитезимальный прирост полезности участника j с точки зрения участника i (измеренный в шкале индивидуальных цен $p^i(x^i)$). Основной результат состоит в установлении условий, обеспечивающих сходимость рассматриваемых траекторий к границе Парето.

Вопросам вложения конечных моделей обмена в неатомические был посвящен доклад Гусейнова Ф.В. (Бакинский госуниверситет) "Расширение конечных экономик и нечеткие коалиции в смысле Обэна". Основная идея конструкции состоит в замене нечеткого доминирования в экономике $\mathcal{E}$ с n участниками на стандартное блокирование в неатомической экономике $\tilde{\mathcal{E}}$ - некотором естественном континуальном "изображении" $\mathcal{E}$. Найдены достаточные условия совпадения нечетких ядер исходной экономики $\mathcal{E}$ и ядер $\tilde{C}(\mathcal{E})$, порожденных моделью $\tilde{\mathcal{E}}$. В докладе приводились также аналоги теоремы Обэна [3] в форме $\tilde{C}(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$ (в том числе и не требующие вогнутости функций полезности в конечной экономике $\mathcal{E}$).

Помимо дискуссий по прочитанным докладам, на Школе обсуждался ряд проблем, связанных с подготовкой специалистов по математической экономике. Большое внимание, в частности, привлекла тема учебной литературы. Участники констатировали необходимость расширения и модернизации тематики учебников, четкой дифференциации по интересам потенциальных читателей, отражения новейших достижений в наиболее актуальных направлениях. Чрезвычайно важным представляется освещение узловых вопросов современного переходного периода, касающихся эффективного функционирования смешанных (многоукладных) экономических систем, рационального сочетания централизованных и рыночных структур.

В рамках IV Школы-семинара была апробирована и такая форма работы, как обсуждение диссертаций по математической экономике. Участникам был предложен доклад В.А.Васильева (Новосибирск, ИМ СО АН СССР) об основных результатах его докторской диссертации "Кооперативные принципы оптимальности в математической экономике". Предметом исследования этой работы являются как традиционные, так и сравнительно новые теоретико-игровые концепции: ядро, равновесие, несимметричные распределения Шепли, обобщенные решения Неймана - Моргенштерна и устойчивые системы договоров. Используемые методы включают нелинейный анализ, теорию полуупорядоченных векторных пространств и элементы теории динамических систем.

Докладчик подчеркнул, что сравнительный анализ понятий оптимальности - одно из главных направлений математической экономики. К числу его наиболее важных задач относится проверка известной гипотезы Эджворта об асимптотической эквивалентности ядер и равновесий. Фундаментальные результаты Дебре - Скарфа, Р.Аумана, К.Винда, В.Гильденбранда и ряда других авторов подтвердили справедливость этой гипотезы для стандартных моделей с автономными предпочтениями. Что касается более общих и более реалистических моделей с внешними влияниями, то для решения возникающих здесь проблем вплоть до недавнего времени не было разработано ни общих подходов, ни эффективных технических средств.

Один из основных результатов работы - доказательство справедливости гипотезы Эджворта для моделей с неавтономными предпочтениями (в том числе и для моделей линдаловского типа). Использование полученных теорем эквивалентности и теории особенностей дифференцируемых отображений позволило установить типичное строение нечетких ядер гладких моделей обмена с внешними влияниями. Наряду с вопросами строения ядер (как в равновесной постановке, так и в терминах несимметричных аналогов вектора Шепли), значительное внимание уделено и динамическим аспектам кооперации. Развитые докладчиком методы регуляризации классических решений Неймана - Моргенштерна удалось использовать не только для классификации неразрешимых кооперативных игр, но и для доказательства достижимости ядер широкого спектра трансферабельных моделей обмена.

В целом полученные результаты свидетельствуют о наличии определенной двойственности между кооперативными и равновесными (нэшевскими) теоретико-игровыми концепциями оптимальности. Принципиальным моментом является тот факт, что отмеченная двойственность наиболее отчетливо проявляется именно в моделях математической экономики с их богатой структурой, допускающей использование самых разнообразных понятий решений и достаточно развитых средств их анализа.

Состоявшаяся дискуссия была конструктивной и плодотворной; она показала, что обсуждение крупных работ (диссертаций, монографий) было бы полезно и в дальнейшей деятельности Школы.

Перейдем, наконец, к сжатому описанию основного содержания работы. В первой главе анализируются вопросы существования и эффективности равновесных, согласованных и договорных состояний в неклассических рынках с рационированием, информационными продуктами и некоторыми другими нетрадиционными компонентами экономического моделирования. Первый параграф главы посвящен некоторым модификациям модели В.Л.Макарова, описывающей взаимодействие рыночных и директивных механизмов управления (В.А.Васильев). Во втором параграфе изучаются условия эффективности согласованных состояний в моделях рационирования в сфере потребления (В.Г.Горбунов). Содержание третьего параграфа составляет доклад А.Н.Козырева об одном способе моделирования рынка лицензий. В этой же главе излагаются результаты В.А.Васильева об условиях равновесности устойчивых систем договоров (§ 4).

Во второй главе приводится сообщение В.И.Данилова о состоятельных нэшевских механизмах (§ 1) и предложенная А.И.Сотсковым процедура построения неблокируемых альтернатив для дискретной модели группового выбора (§ 2). Здесь же излагаются гомотопический подход к изучению ядер кооперативных игр без побочных платежей, разработанный М.А.Б692аниным (§ 3), и общая схема конструирования бесконечномерных аналогов вектора Шепли, указанная в докладе Г.Н.Дюбина (§ 4).

Третья глава целиком посвящена моделям стимулирования производственной деятельности. В первом параграфе этой главы приводится обзор новых результатов в области так называемой "principal-agent problem" - проблемы руководителя и подчиненного (С.Г.Коковин и В.М.Маракулин). Во втором параграфе излагается сообщение В.М.Маракулина о типах оптимальных контрактов в многопродуктовой задаче руководителя и подчиненного.

В четвертой главе собраны доклады, в которых обсуждались различные аспекты экономической динамики. В первом параграфе излагаются магистральные теоремы для случая неаддитивной во времени функции полезности (Н.П.Дементьев), во втором - анализируются динамические модели экономики с дискретными новшествами (А.Я.Заславский). Третий, заключительный параграф главы содержит доклад П.И.Чугунова о некоторых типах парных обменов, сходящихся к оптимуму Парето.

Завершает работу пятая глава, представляющая изложение доклада В.И.Шмырева о некоторых процедурах симплексного типа для отыскания равновесий в линейных экономических моделях.

Авторы выражают искреннюю благодарность участникам Школы за предоставленные материалы и полезные обсуждения основных результатов предлагаемой работы.

ГЛАВА 1. РАЦИОНИРОВАНИЕ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЫНКИ

§ 1. О некоторых моделях взаимодействия экономических механизмов

В этом параграфе приводится изложение некоторых новых постановок и результатов, касающихся моделей взаимодействия рыночных механизмов и механизмов рационирования, введенных В.Л.Макаровым. Такие модели (называемые в дальнейшем для краткости смешанными экономиками) рассматривались и на предыдущих школах по математической экономике [4,5]. Отличительная черта предлагаемых ниже постановок - акцент на двух специальных типах смешанных экономик:

1) экономик, заданных в форме функций спроса,
2) моделей с неограниченной областью изменения.

Для экономик первого типа (с ограниченными гибкими ценами) указываются условия существования согласованных состояний, предполагающие выполнение лишь "качественного закона Вальраса" [6]. Для моделей второго типа (как в нормальной форме, так и в форме функций спроса) предлагается специальная "компактификация", позволяющая трактовать избыточный спрос смешанной экономики как однопараметрическую деформацию избыточного спроса в классической равновесной модели с ограниченной областью изменения гибких цен. Такое представление позволяет использовать гомотопические методы исследования вопросов существования и структуры согласованных цен, а в содержательном плане выявляет тесную взаимосвязь равновесных и согласованных состояний. В частности, важным фактором, определяющим возможность уравновешивания спроса и предложения в смешанной экономике с неограниченными гибкими ценами, является строгая положительность равновесных цен в "предельной" рыночной экономике (см. п.3 настоящей параграфа).

Помимо вопросов существования значительное внимание уделяется условиям, обеспечивающим эффективность согласованных состояний и выполнение классического закона Вальраса.

1. Следуя [4,5], под экономикой смешанного типа будем понимать приводимую ниже модель взаимодействия механизмов рационирования и рыночного регулирования:

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X'_i, X''_i, Y_i, Z_i, w^i, \beta_i, u_i, d_i\}_N, q, Q\rangle, \qquad (1.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^l_+$ – фиксированный вектор (стабильных) цен, $Q \subseteq \mathbb{R}^l_+$ – множество допустимых (гибких) цен, $X'_i \subseteq \mathbb{R}^l$ – совокупность потребительских наборов, доступных участнику $i \in N = \{1,\ldots,n\}$ по стабильным ценам q, $X''_i \subseteq \mathbb{R}^l$ – множество потребительских наборов, доступных для этого участника по гибким ценам из Q, $Y_i \subseteq \mathbb{R}^l$ – производственное множество участника $i \in N$, а $Z_i \subseteq X'_i \times X''_i \times Y_i$ – множество допустимых для него состояний. Далее, как обычно, через $u_i : Z_i \longrightarrow \mathbb{R}$ и $w^i \in \mathbb{R}^l$ обозначаются функции полезности и начальные запасы участника $i \in N$, а через $d_i : X'_i \times Y_i \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ – его функция (основного) дохода. Наконец, через $\beta_i : Y_i \times Q \longrightarrow X'_i$ обозначены функции рационирования участников $i \in N$, определяющие максимально возможные объемы потребления по стабильным ценам q.

Как видно из определения, модель (1.1) имеет несколько более общий вид по сравнению с [4]: а) допускается зависимость функций рационирования не только от уровня производственной активности, но и от гибких цен; б) функции основного дохода реагируют не только на гибкие цены и производственную активность, но и на изменения в объеме рационируемого потребления. Отметим сразу же, что основная часть сообщения была посвящена случаю $\beta_i = \beta_i(y^i)$, $d_i = d_i(y^i, p)$, который, очевидно, ближе к реальности. Однако необходимо подчеркнуть, что только в рамках большей гибкости функций β_i и d_i, представляемых моделью (1.1), возможно достаточно полное описание условий, гарантирующих эффективность согласованных состояний и выполнение классического закона Вальраса для экономик смешанного типа. Более точно, близкие к необходимым условия Парето-оптимальности требуют учета реального рационируемого потребления, а аналогичные предположения, обеспечивающие выполнение классического закона Вальраса, – учета соотношений между гибкими и стабильными ценами при определении верхней границы этого потребления.

Интересно, что в первом случае функции β_i могут и не зависеть от гибких цен, а во втором – функции d_i могут определяться лишь параметрами y^i и p.

Переходя к формализации необходимых понятий, подчеркнем, что в модели $\mathcal{E}$ предполагается наличие двух рынков продуктов. На одном из них действуют стабильные (жесткие) цены q и механизм рационирования, устанавливающий зависимость между уровнем производственной активности и максимальным объемом приобретаемых на этом рынке продуктов. На другом рынке цены устанавливаются с помощью механизма уравнивания спроса и предложения в рамках возможностей, предоставляемых множеством Q. Важной особенностью модели является то, что участникам разрешается продавать по гибким ценам излишки продуктов, приобретенных на первом рынке[1].

В соответствии с вышесказанным, бюджетные множества $B_i^q(p)$ участников $i \in N$ при ценах $p \in Q$ определяются следующим образом:

$$B_i^q(p) = \left\{z^i \in Z_i(\beta,p) \,|\, q\cdot x'^{\,i} + p\cdot x''^{\,i} \leqslant \bar{d}_i(x'^{\,i},y^i,p)\right\}, \qquad (1.2)$$

где

$$Z_i(\beta,p) = \left\{z^i = (x'^{\,i},x''^{\,i},y^i) \in Z_i \,|\, x'^{\,i} \leqslant \beta_i(y^i,p)\right\},$$

$$\bar{d}_i(x'^{\,i},y^i,p) = d_i(x'^{\,i},y^i,p) + (p-q)^+\cdot\left(\beta_i(y^i,p) - x'^{\,i}\right)^{2}.$$

Введем множества спроса и избыточного спроса:

$$D_i^q(p) = \left\{z^i \in B_i^q(p) \,|\, P_i(z^i) \cap B_i^q(p) = \varnothing\right\},$$

$$E_i^q(p) = \left\{x \in \mathbb{R}^l \,|\, \exists (x'^{\,i},x''^{\,i},y^i) \in D_i^q(p) \,|\, \left[x = x'^{\,i} + x''^{\,i} - y^{(i)}\right]\right\},$$

где

---

[1] Более подробная содержательная интерпретация модели имеется в [4–6].

[2] Здесь и далее $(p^+)_k = \max\{p_k,0\}$, $(p^-)_k = \max\{-p_k,0\}$, $(p \vee q)_k = \max\{p_k,q_k\}$ для любых векторов $p = (p_1,\dots,p_l)$, $q = (q_1,\dots,q_l) \in \mathbb{R}^l$.

$$y^{(i)} = y^i + w^i, \quad P_i(z^i) = \left\{\tilde{z}^i \in Z_i(\beta, p) \,|\, u_i(\tilde{z}^i) > u_i(z^i)\right\}.$$

Далее, для фиксированного $p \in Q$ обозначим через $Z(N,p)$ множество всех состояний $z = (x'^{i}, x''^{i}, y^i)_N \in \prod_N Z_i(\beta, p)$, удовлетворяющих условию материального баланса (при ценах $p \in Q$):

$$\sum_N (x'^{i} + x''^{i}) = \sum_N y^{(i)}.$$

Определение 1. Состояние $\bar{z} \in Z(N,\bar{p})$ называется согласованным распределением, если $\bar{z}^i \in D_i^q(\bar{p})$ для всех $i \in N$.

Вектор $\bar{p}$, фигурирующий в определении 1, будем называть согласованными ценами модели $\mathcal{E}$.

Сформулируем условие, обеспечивающее эффективность всех элементов множества $W^q(\mathcal{E})$ согласованных распределений модели $\mathcal{E}$.

Предположение 1. *Для всех* $p \in Q$, $x' \in \prod_N X'_i$ *и* $y \in \prod_N Y_i$ *таких, что* $(x'^{i}, y^i) \in \mathrm{Pr}_{X'_i \times Y_i} Z_i(\beta, p)$, *выполняется равенство*

$$\sum_N d_i(x'^{i}, y^i, p) = q \cdot \sum_N \beta_i(y^i, p) + p \cdot \left[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i, p))\right] -$$
$$- (q - p)^+ \cdot \left[\sum_N (\beta_i(y^i, p) - x'^{i})\right]. \qquad (1.3)$$

Согласно условию (1.3) при гибких ценах $p \in Q$, объемах рационируемого потребления $x' = (x'^{i})_N \in \prod_N X'_i$ и уровне производственной активности $y = (y^i)_N \in \prod_N Y_i$ экономические агенты располагают суммарным основным доходом, достаточным для приобретения максимально возможного суммарного объема рационируемых благ $\sum_N \beta_i(y^i, p)$ по стабильным ценам q и покупки оставшейся части произведенных продуктов $\sum_N y^{(i)} - \sum_N \beta_i(y^i, p)$ по гибким ценам p (при условии, что $x'^{i}_k = \beta_{ik}(y^i, p)$ для $q_k > p_k$). Величина

$(q-p)^+ \cdot \left[\sum\limits_N (\beta_i(y^i; p) - x'^i)\right]$ имеет смысл штрафа за неполное использование рационируемых продуктов.

Ввиду нетрадиционности рассматриваемой модели приведем формальное определение Парето-оптимального (эффективного) состояния $\mathcal{E}$.

Определение 2. Распределение $z \in Z(N,p)$ будем называть эффективным, если не существует другого распределения $\tilde{z} \in Z(N,p)$ такого, что $\tilde{z}^i \in P_i(z^i)$ для всех $i \in N$.

Предложение 1. *Пусть модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположению 1. Тогда любое распределение из $W^q(\mathcal{E})$ является эффективным.*

Замечание 1. Нетрудно видеть, что предположение 1 не требует никакой зависимости β_i от p. Поэтому предложение 1 справедливо и для случая

$$\beta_i = \beta_i(y^i), \quad i \in N, \tag{1.4}$$

при условии, что выполняется следующий аналог (1.3):

$$\sum_N d_i(x'^i, y^i, p) = q \cdot \sum_N \beta_i(y^i) + p \cdot \left[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i)\right] -$$

$$- (q-p)^+ \cdot \left[\sum_N (\beta_i(y^i) - x'^i)\right].$$

Важно подчеркнуть, что в ситуации (1.4) определение множества $Z(N) = Z(N,p)$ и само понятие эффективности становятся инвариантными относительно гибких цен. В частности, для широкого класса моделей, указанных в [6], понятие эффективности в условиях (1.4) совпадает с традиционным (см. [6], замечание 1).

В основе доказательства предложения 1 лежит тот факт, что в условиях предположения 1 в модели $\mathcal{E}$ выполняется классический закон Вальраса:

$$p \cdot z \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad p \in Q \quad \text{и} \quad z \in E^q(p), \tag{1.5}$$

где

$$E^q(p) = \sum_N E^q_i(p), \qquad p \in Q. \tag{1.6}$$

Учитывая важность условия (1.5) для разрешимости включения $0 \in E^q(p)$, укажем еще одну ситуацию, где выполняется классический закон Вальраса. При этом, в отличие от предыдущего случая, будем считать, что функции d_i зависят лишь от y^i и p:

$$d_i = d_i(y^i, p), \qquad i \in N. \tag{1.7}$$

Соотношения (1.7) требуют модификации предположения 1, учитывающей "ограниченную гибкость" функции d_i. Такой модификацией является следующее

Предположение 2. *Для всех $p \in Q$ и $y \in Y = \prod_N Y_i$ выполняются равенства*

$$\sum_N d_i(y^i,p) = q \cdot \sum_N \beta_i(y^i,p) + p \cdot \left[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i,p))\right]. \tag{1.8}$$

Нетрудно проверить, что предположение 2 обеспечивает эффективность согласованных распределений в ситуации $d_i = d_i(y^i,p)$. Достаточно воспользоваться той же аргументацией, что и в доказательстве предложения 1 из [6]. Что касается классического закона Вальраса (соотношения (1.5)), то здесь требуются дополнительные ограничения на поведение функций $\beta_i(y^i,p)$.

Предположение 3. *Для всех $i \in N$, $p \in Q$ и $y \in Y$ справедлива импликация*

$$p_k \leqslant q_k \implies \beta_i(y^i,p) \in \underline{\theta}_k(X'_i),$$

где $\underline{\theta}_k(X'_i)$ - нижняя k-граница Парето множества X'_i:

$$\underline{\theta}_k(X'_i) = \left\{x \in X'_i \mid \forall \tilde{x} \in X'_i \left[(\tilde{x}_k \leqslant x_k) \implies (\tilde{x}_k = x_k)\right]\right\}.$$

Предложение 2. *Пусть функции d_i зависят лишь от p и y^i. Тогда при выполнении предположений 2 и 3 все согласованные распределения модели $\mathcal{E}$ эффективны, а для отображения избыточного спроса E^q выполняется классический закон Вальраса.*

Таким образом, предположения 1 - 3, гарантируя эффективность состояний из $W^q(\mathcal{E})$, обеспечивают также одно из главных условий применимости стандартной леммы Гейла – Никайдо – Дебре для E^q: выполнение неравенств (1.5).

Помимо неравенств (1.5) или их аналогов, традиционные условия разрешимости включения $0 \in E^q(p)$ требуют предположений типа

$$Q = B_1 \cap \mathbb{R}^l_+, \qquad (1.9)$$

где B_1 – единичный шар в норме l_1. Наряду с (1.9) – требованием ограниченности гибких цен – всюду далее в этом пункте предполагается выполнение условий $d_t = d_t(y^t, p)$, $\beta_t = \beta_t(y^t)$, а также (для определенности) условия $q \in Q$.

Кроме того, будем считать, что справедлив следующий аналог предположения 2, обеспечивающий эффективность распределений из $W^q(\mathcal{E})$.

Предположение 2′. *Для всех $p \in Q$ и $y \in Y$ выполняется равенство*

$$\sum_N d_t(y^t, p) = q \cdot \sum_N \beta_t(y^t) + p \cdot \Big[\sum_N (y^{(t)} - \beta_t(y^t)) \Big]. \qquad (1.8')$$

Переходя к рассмотрению более жестких схем регулирования основных доходов и рационируемых благ, отметим два существенных обстоятельства.

Во-первых, как показывают результаты [6], для изучаемых в этом пункте моделей выполнение неравенств (1.5) гарантируется лишь в специальных случаях. В целом же прямое (без какой-либо адаптации) применение схемы Гейла для доказательства теорем существования согласованных состояний требует "директивных" предположений типа неравенств $\bar{p} \geq q$ для всех согласованных цен $\bar{p}$ или (как в самом незамысловатом варианте из [6]) некоторого эквивалента условия (1.5). Подтверждением сказанному является соотношение

$$p \cdot z = (p - q)^- \cdot \Big[\sum_N (\beta_t(y^t) - x'^t) \Big], \qquad (1.10)$$

где $z = \sum\limits_N (x'^t + x''^t - y^{(t)}) \in E^q(p)$, выполняющееся при всех $p \in Q$

в условиях предположения 2′ и ненасыщаемости предпочтений модели $\mathcal{E}$.

Во-вторых, замена предположения 2′ каким-либо иным правилом формирования основных доходов, ориентированным на автоматическое выполнение неравенств (1.5), представляется трудно совместимой с требованием эффективности *всех* распределений из $W^q(\mathcal{E})$. Действительно, анализ одного из правил такого типа

$$\sum_N d_i(y^i,p) = p \cdot \sum_N y^{(i)} - (p-q)^+ \cdot \sum_N \beta_i(y^i) \qquad (1.11)$$

показывает, что Парето-оптимальность согласованных состояний в предположении (1.11) обеспечивается (помимо специальных случаев) лишь за счет условия: $\bar{p} \geq q$ *для всех* согласованных цен $\bar{p}$ (см. [4,7]).

Противоречие между требованием эффективности и традиционными условиями существования (типа классического закона Вальраса) разрешается в общем случае снятием ограничений сверху на величину гибких цен (см. следующий пункт этого параграфа). Такое решение в значительной степени отражает саму специфику моделей смешанного типа - баланс спроса и предложения зачастую возможен только в результате роста всех рыночных цен.

Возвращаясь к случаю ограниченных гибких цен, приведем один вариант ослабления неравенств (1.5), формально не вступающий в противоречие с предположением 2′ и его следствием (1.10). Соответствующее условие именуется "качественным законом Вальраса" [8] и применительно к рассматриваемой ситуации имеет следующий вид.

Предположение 4. *Отображение избыточного спроса* $E^q : Q \longrightarrow \mathbb{R}^l$ *для всех* $p \in S$ [3] *удовлетворяет условиям*

$(*)\ \forall z \in E^q(p)\ \exists k[(p_k > 0)\ \&\ (z_k \leq 0)]$,

$(**)\ \exists z \in E^q(p)\ \forall k[(p_k = 0) \Rightarrow (z_k \geq 0)]$.

Сформулируем одну из самых простых теорем существования,

---

[3] Здесь и далее S - единичный симплекс в $\mathbb{R}^l$: $S = \partial B_1 \cap \mathbb{R}^l_+$.

опирающуюся на предположение 4.

Теорема 1. *Пусть отображение избыточного спроса модели $\mathcal{E}$ полунепрерывно сверху на Q, имеет непустые выпуклые и компактные значения и удовлетворяет предположению 4. Тогда в условиях предположения 2 существуют состояние $(\bar{x}'^{\,i}, \bar{x}''^{\,i}, \bar{y}^{i})_N$ и цены $\bar{p} \in Q$ такие, что*

$$1)\ \sum_N (\bar{x}'^{\,i} + \bar{x}''^{\,i}) \leqslant \sum_N \bar{y}^{(i)},$$

$$2)\ \bar{p} \cdot \sum_N (\bar{y}^{(i)} - \bar{x}'^{\,i} - \bar{x}''^{\,i}) = 0,$$

$$3)\ (\bar{x}'^{\,i}, \bar{x}''^{\,i}, \bar{y}^{i}) \in D^q_i(\bar{p}), \quad i \in N.$$

Если, кроме того, цены $\bar{p}$ строго положительны, то в соотношении 1) реализуется равенство.

Конечно, условия теоремы 1 могут быть существенно ослаблены (например, как и в [6], можно требовать полунепрерывности сверху не от E^q, а лишь от некоторой модификации этого отображения, что не накладывает никаких особых ограничений на модель $\mathcal{E}$). Однако адекватная "дезагрегация" предположения 4 в исходных терминах модели $\mathcal{E}$ представляется уже самостоятельной довольно трудной задачей.

С другой стороны, если реакции модели $\mathcal{E}$ на изменение цен $p \in Q$ заданы именно в терминах (агрегированного) отображения избыточного спроса, необходимость в упомянутой трансляции условий (*) и (**) становится неактуальной. Это тем более верно, когда отображение E^q однозначно и сама модель задана в форме функций спроса

$$\mathcal{E} = \langle N, (f^{\mathrm{I}}_i, f^{\mathrm{II}}_i, y^i, w^i, \beta_i, d_i)_N, q, S\rangle, \tag{1.12}$$

где N, w^i и $S = \partial B_1 \cap \mathbb{R}^l_+$ имеют тот же смысл, что и ранее, а значения функций $y^i : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $f^{\mathrm{I}}_i : S \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^l$ и $f^{\mathrm{II}}_i : S \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^l$ трактуются как уровни производства и спроса на соответствующих рынках при ценах p и уровнях (компенсированного) дохода ω. Их прообразами являются компоненты $\bar{y}^i, \bar{x}'^{\,i}, \bar{x}''^{\,i}$ решения экстремальной задачи

$$u_\iota(x'^{\iota},x''^{\iota},y^{\iota}) \longrightarrow \max,$$

$$q\cdot x'^{\iota}+ p\cdot x''^{\iota}\leqslant d_\iota(y^{\iota},p) + (p-q)^+(\beta_\iota(y^{\iota}) - x''^{\iota}), \qquad (1.13)$$

$$(x''^{\iota},x'^{\iota},y^{\iota}) \in Z_\iota(\beta)$$

(при надлежащих условиях, обеспечивающих существование и единственность такого решения).

Поскольку соотношения (1.13) могут быть переписаны в виде

$$p\vee q\cdot x'^{\iota}+ p\cdot x''^{\iota}\leqslant d_\iota(y^{\iota},p) + (p-q)^+\cdot\beta_\iota(y^{\iota}),$$

будем считать, что для функций f_ι^{I}, f_ι^{II} и y^ι выполняется

Предположение 5. *Для всех* $\iota\in N$, $p\in S$ *и* $\omega\in\mathbb{R}_+$ *справедливы равенства*

$$p\vee q\cdot f_\iota^{\mathrm{I}}(p,\omega) + p\cdot f_\iota^{\mathrm{II}}(p,\omega) = \omega. \qquad (1.14)$$

Определение 3. Цены $\bar{p}\in S$ называются согласованными, если

$$\sum_N\left[f_\iota^{\mathrm{I}}(\bar{p},\bar{\omega}_\iota) + f_\iota^{\mathrm{II}}(\bar{p},\bar{\omega}_\iota)\right] = \sum_N y^{(\iota)}(\bar{p}),$$

где

$$\bar{\omega}_\iota = \omega_\iota(\bar{p}) = d_\iota(\bar{p}) + (\bar{p}-q)^+\cdot\beta_\iota(\bar{p}), \qquad (1.15)$$

$$y^{(\iota)}(\bar{p}) = y^\iota(\bar{p}) + w^\iota\ {}^{4}.$$

Учитывая содержательную интерпретацию функции f_ι^{I}, в дальнейшем используем следующее

Предположение 6. *Для всех* $\iota\in N$ *и* $p\in S$ *выполняются неравенства*

$$f_\iota^{\mathrm{I}}(p,\omega_\iota)\leqslant\beta_\iota(p), \qquad (1.16)$$

где $\omega_\iota = \omega_\iota(p)$ *определяется по ценам* p *в соответствии с формулой (1.15).*

---

[4] Здесь $d_\iota(p) = d_\iota(y^\iota(p),p)$, $\beta_\iota(p) = \beta_\iota(y^\iota(p))$.

Аналог условия (*) предположения 4 для модели (1.12) приобретает вид:

Предположение 7. *Для всякого $p \in S$ существует $k = k(p)$ такое, что $p_k > 0$ и $E_k^q(p) \leqslant 0$, где*

$$E^q(p) = \sum_N \left[f_l^{\mathrm{I}}(p,\omega_l) + f_l^{\mathrm{II}}(p,\omega_l) - y^{(l)}(p)\right]. \qquad (1.17)$$

На основании леммы Кнастера – Куратовского – Мазуркевича [9] справедлива

Теорема 2. *Если функции f_l^{I}, f_l^{II} и y^l непрерывны и удовлетворяют предположению 7, то найдутся цены $\bar{p} \in S$ такие, что*

$$\sum_N \left[f_l^{\mathrm{I}}(\bar{p},\bar{\omega}_l) + f_l^{\mathrm{II}}(\bar{p},\bar{\omega}_l)\right] \leqslant \sum_N y^{(l)}(\bar{p}). \qquad (1.18)$$

В силу предположения 2′ для функций d_l справедливы соотношения:

$$\sum_N d_l(p) = q \cdot \sum_N \beta_l(p) + p \cdot (y^{(l)}(p) - \beta_l(p)), \quad p \in S.$$

Поэтому в условиях предположения 5 функция E^q, определенная в соответствии с формулой (1.17), удовлетворяет тождеству

$$p \cdot E^q(p) = (q - p)^+ \cdot \sum (\beta_l(p) - f_l^{\mathrm{I}}(p,\omega_l)), \quad p \in S. \qquad (1.19)$$

Отсюда, учитывая неравенство (1.18), получаем

Следствие 1. *Если для модели* (1.12) *выполняются предположения* 5,6, *то в условиях теоремы* 2 *существует вектор цен $\bar{p}$, удовлетворяющий соотношению* (1.18) *и равенству*

$$\bar{p} \cdot E^q(\bar{p}) = 0.$$

Ясно, что при строгой положительности вектора $\bar{p}$, фигурирующего в следствии 1, имеем $E^q(\bar{p}) = 0$. Таким образом, в этом случае цены $\bar{p}$ – согласованные.

В заключение этого пункта приведем вариант теоремы существования, допускающий отсутствие строго положительных согласованных цен и некоторое ослабление требования (*).

Теорема 3. *Если функции $f_l^{\mathrm{I}}, f_l^{\mathrm{II}}, y^l, d_l$ и β_l непрерывны,* *удовлетворяют условию отсутствия инфляции*

$$\forall\, p \in S\ \forall\lambda > 0\ [E^q(p) \neq \lambda p]$$

и граничному условию типа (**)

$$\forall p \in S\ \forall k\, [(p_k = 0) \Longrightarrow (E^q_k(p) \geqslant 0)],$$

то найдется вектор цен $p \in S$ *такой, что* $E^q(\bar{p}) = \mathbf{0}$.

3. Как видно из предыдущего, существование согласованных распределений в условиях априорной ограниченности гибких цен гарантируется лишь при выполнении довольно жестких требований относительно отображения E^q. Ниже рассматривается вариант

$$Q = \mathbb{R}^l_+,$$

позволяющий свести эти требования к более или менее стандартным (вполне аналогичным традиционным условиям существования в классических равновесных моделях). Как и в п.2, мы предполагаем, что $\beta_i = \beta_i(y^i)$, $d_i = d_i(y^i,p)$, причем для всех $y = (y^i)_N \in Y$ выполняется равенство (1.8′):

$$\sum_N d_i(y^i,p) = q \cdot \sum_N \beta_i(y^i) + \Big[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i))\Big],\ p \in \mathbb{R}^l_+.$$

Ясно, что выполнение этого равенства гарантирует эффективность согласованных состояний и в условиях неограниченности гибких цен. Что касается вопросов существования, то здесь требуются, на первый взгляд, весьма серьезные дополнительные предположения о поведении E^q, компенсирующие некомпактность области определения этого отображения (см., например, [9]).

Ниже предлагается один из вариантов преодоления отмеченной трудности. Он основан на так называемой "компактификации" модели $\mathcal{E}$ и приводит к рассмотрению новых экономик смешанного типа, представляющих и самостоятельный интерес. Суть излагаемого подхода заключается в рассмотрении наряду с исходным соответствием $E^q\colon \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$ его "изображения" $E^q(p,t)$, определенного на компакте $S \times [0,1]$ в соответствии с формулой

$$E^q(p,t) = \begin{cases} E^q({}^1/_t \cdot p), & t \in (0,1], \\ E_0(p) \quad , & t = 0, \end{cases}$$

где $E_0(p)$ - избыточный спрос в некоторой стандартной модели $\mathcal{E}$ [5]. Для корректного определения этой модели требуется следующее

Предположение 8. *Пределы*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d_l(y^l,\alpha p)}{\alpha} \triangleq d_l^0(y^l,p), \; l \in N, \tag{1.20}$$

существуют и конечны для всех $p \in S$ *и* $y = (y^l)_N \in Y$.

Отметим сразу же, что пределы (1.20) существуют, например, для всех функций $d_l^q(y,p) = d_l(y^l,p,q)$, положительно однородных первой степени по переменным p,q и непрерывных в нуле по q.

Модель $\mathcal{E}_0$, участвующая в определении $E_0(p)$, характеризуется следующими параметрами:

$$\mathcal{E}_0 = \langle N, \left\{X'_l, X''_l, Y_l, \quad Z_l, w^l, \beta_l, u_l, d_l^0\right\}_N, \; S\rangle,$$

где все компоненты (за исключением $Q = S$ и d_l^0, определяемых по формуле (1.20)) совпадают с соответствующими компонентами исходной модели $\mathcal{E}$. Предполагается, что в $\mathcal{E}_0$ гибкие цены действуют на обоих рынках и отображение (агрегированного) избыточного спроса $E_0(p)$ определяется традиционным образом на основе следующих бюджетных множеств;

$$B_l(p) = \Big\{(x'^l, x''^l, y^l) \in Z_l(\beta) \mid p\cdot(x'^l + x''^l) \leqslant$$

$$\leqslant d_l^0(y^l,p) + p \cdot \beta_l(y^l)\Big\}. \tag{1.21}$$

Отметим некоторые очевидные свойства функций d_l^0 и отображения $E^q(p,t)$.

Предложение 3. *В условиях предположений* 2′ *и* 8 *для всех* $p \in S$

---

[5] В дальнейшем для простоты предполагается, что включение $\mathbb{0} \in E^q(p)$ не имеет решений в $\mathbb{R}^l_+ \cap \mathrm{int} B_1$.

и $y \in Y$ справедливы равенства

$$\sum_N d_i^0(y^i,p) = p \cdot \left[\sum_N (y^{(i)} - \beta_i(y^i))\right].$$

Следствие 2. *В условиях предположений 2′ и 8 отображение $E_0 : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет классическому закону Вальраса*

$$p \cdot z \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad z \in E_0(p), \qquad p \in S.$$

Таким образом, модель $\mathcal{E}_0$, характеризующая некоторые предельные параметры модели $\mathcal{E}$, вполне аналогична стандартным моделям рыночного равновесия.

Введем в рассмотрение функции

$$d_i^0(y^i,p,t) = \begin{cases} td_i(y^i, {}^1/_t p), & t \in (0,1], \\ d_i^0(y^i,p), & t = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Полагая

$$d_i^0(y,\tilde{p}) = d_i^0(y,p,t), \qquad \tilde{p} = (p,t) \in S \times [0,1], \tag{1.23}$$

определим экономику $\tilde{\mathcal{E}}$, являющуюся "компактификацией" исходной модели $\mathcal{E}$:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \langle N, \left\{X'_i, X''_i, Y_i, Z_i, w^i, \beta_i, u_i, d_i^0\right\}_N, \tilde{Q}\rangle, \tag{1.24}$$

где $\tilde{Q} = S \times [0,1]$, а функции $d_i^0 : \tilde{Q} \times Y_i \longrightarrow \mathbb{R}$ заданы в соответствии с формулами (1.20), (1.22). В качестве бюджетных в экономике $\tilde{\mathcal{E}}$ используются следующие аналоги ограничений (1.13):

$$tq \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant d_i^0(y^i,p,t) + (p - tq)^+ \cdot (\beta_i(y^i) - x'^i),$$

$$(x'^i, x''^i, y^i) \in Z_i(\beta).$$

Ясно, что избыточный спрос экономики $\tilde{\mathcal{E}}$ совпадает с введенным ранее отображением $E^q(p,t)$. Далее, как вытекает из определения, ненулевые согласованные цены исходной модели $\mathcal{E}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с решениями включения

$$\mathbf{0} \in E^q(p,t), \qquad t \neq 0. \tag{1.25}$$

Допуская некоторую вольность речи, решения включения (1.25) можно трактовать как равновесные цены (p,tq) модели $\tilde{\mathcal{E}}$. Таким образом, отыскание согласованных цен в модели $\mathcal{E}$ редуцируется к поиску равновесных цен в модели $\tilde{\mathcal{E}}$, для которой выполняется традиционное предположение о компактности области определения отображения избыточного спроса.

Замечание 2. Можно абстрагироваться от происхождения $\tilde{\mathcal{E}}$ и заниматься исследованием этой модели как таковой. Подобное исследование представляет и самостоятельный интерес в условиях, когда нас интересуют не абсолютные, а лишь относительные значения жестких и гибких цен.

Важную роль в изучении модели $\tilde{\mathcal{E}}$ играет следующее предположение, выполняющееся, в частности, для всех однородных по p и q функций $d_i(y^i,p,q)$, непрерывных во всей области определения $Y_i \times \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^l_+$.

Предположение 9. *Функции d^0_i непрерывны по совокупности переменных.*

Как уже отмечалось, существование согласованных состояний в модели $\mathcal{E}$ обеспечивается (при надлежащих условиях) наличием строго положительных равновесных цен в "предельной" модели $\mathcal{E}_0$. Приведем один из самых простых результатов подобного типа.

Теорема 4. *Пусть параметры модели $\mathcal{E}$ таковы, что отображение $E^q(p,t)$ полунепрерывно сверху, а его образы непусты, выпуклы и компакты для всех $(p,t) \in \tilde{Q}$. Пусть, кроме того, выполняются предположения 2′,9 и существует участник $i_0 \in N$ со строго возрастающей функцией полезности u_{i_0} и достаточно большим потребительским множеством X_{i_0}[6]. Тогда существуют $\bar{t} \in (0,1]$ и векторы*

---

[6] Как и в [6], это означает, что $\tilde{X}_{i_0} = \mathrm{Pr}_{X_{i_0}} \tilde{Z}(N)$ содержится в X_{i_0} вместе с некоторой окрестностью из $\mathbb{R}^l_+$ (здесь $\tilde{Z}(N) =$

$p(t) \in S$ *такие, что для всех* $t \in [0,t]$ *выполняются включения*

$$\mathbf{0} \in E^q(p(t),t).$$

Следствие 3. *Если модель* $\mathcal{E}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *то* $W^q(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

Замечание 3. При $\|q\| = 1$ максимальное значение t^*, для которого разрешимо включение $\mathbf{0} \in E^q(p,t^*)$, определяет минимальный уровень инфляции $\alpha^* = {}^1/_{t^*}$ в экономике $\mathcal{E}$. Интересно отметить, что для случая однородных по p и q функций d_ι, удовлетворяющих условию $d_\iota(y^\iota,p,q) = d^\circ_\iota(y^\iota,p) + q \cdot \beta(p)$, имеет место простая оценка

$$\alpha^* \leqslant \max_{k=1,\dots,l} {}^{q_k}/{p^\circ_k},$$

где $p^\circ = (p^\circ_1,\dots,p^\circ_l) \in S$ – произвольный равновесный вектор цен в экономике $\mathcal{E}_0$ [7].

Переходя к постановке вопросов существования согласованных состояний для модели с неограниченными гибкими ценами, заданных в форме функций спроса, отметим, что здесь переход к "компактификации" $\mathcal{E}$ осуществляется заменой переменных (при $t \in (0,1]$):

$$f^{\mathrm{I}}_{\iota\circ}(p,\omega,t) = f^{\mathrm{I}}_\iota({}^1/_t\, p, {}^1/_t\, \omega), \qquad p \in \mathring{S},$$

$$f^{\mathrm{II}}_{\iota\circ}(p,\omega,t) = f^{\mathrm{II}}_\iota({}^1/_t\, p, {}^1/_t\, \omega), \qquad p \in \mathring{S},$$

$$y^\iota_\circ(p,t) = y^\iota({}^1/_t\, p), \qquad p \in \mathring{S},$$

$$d^\circ_\iota(p,t) = t\, d_\iota({}^1/_t\, p), \qquad p \in \mathring{S},$$

где $\mathring{S}$ - внутренность симплекса S, а отображения f^{I}_ι, f^{II}_ι, y^ι и d_ι имеют тот же смысл, что и в п.2 (за исключением того, что об-

---

$$= \Big\{z \in \prod_N Z_\iota\beta) \mid \sum_N (x'^{\,\iota} + x''^{\,\iota} - y^{(\iota)}) \leqslant \mathbf{0}\Big\}.$$

[7] В условиях теоремы 4 все решения включения $\mathbf{0} \in E^q(p,o)$ строго положительны.

ластью изменения аргумента p является $\mathring{\mathbb{R}}^l_+ = \operatorname{int} \mathbb{R}^l_+$).

В дальнейшем будем использовать следующее

Предположение 10. *Пределы*

$$\lim_{t \to 0} f^{\mathrm{I}}_{i\circ}(p,\omega,t) = f^{\mathrm{I}}_{i\circ}(p,\omega),$$

$$\lim_{t \to 0} f^{\mathrm{II}}_{i\circ}(p,\omega,t) = f^{\mathrm{II}}_{i\circ}(p,\omega),$$

$$\lim_{t \to 0} y^i_\circ(p,t) = y^i_\circ(p),$$

$$\lim_{t \to 0} d^\circ_i(p,t) = d^\circ_i(p),$$

существуют и конечны для всех $i \in N$, $(p,\omega) \in \mathring{S} \times \mathbb{R}_+$.

Отметим, что когда функции f^{I}_i, f^{II}_i и y^i однородны нулевой степени по (p,ω) и p , а функции $d_i(p) = d_i(p,q)$ однородны по (p,q) и непрерывны по q в нуле, предположение 10 заведомо выполняется.

Далее, будем считать, что функции f^{I}_i, f^{II}_i, y^i удовлетворяют соотношениям (1.14) и (1.16) для всех $p \in \mathbb{R}^l_+$.

Поэтому для модели

$$\tilde{\mathcal{E}} = \langle N,\ \{f^{\mathrm{I}}_{i\circ}, f^{\mathrm{II}}_{i\circ}, y^i_\circ, w^i, \beta^\circ_i, d^\circ_i\}_N, q, \mathring{S} \times [0,1]\rangle$$

при всех $t \in [0,1]$, $p \in \mathring{S}$ и $\omega \in \mathbb{R}_+$ выполняются условия:

$$tq \vee p \cdot f^{\mathrm{I}}_{i\circ}(p,\omega,t) + p \cdot f^{\mathrm{I}}_{i\circ}(p,\omega,t) = \omega, \quad i \in N, \tag{1.26}$$

$$f^{\mathrm{I}}_{i\circ}(p,\omega_i,t) \leq \beta^\circ_i(p,t), \qquad i \in N, \tag{1.27}$$

где

$$\omega_i = \omega_i(p,t) = d_i(p,t) + (p - tq)^+ \cdot \beta^\circ_i(p,t) \tag{1.28}$$

$$\beta^\circ_i(p,t) = \beta_i(y^\circ_i(p,t)). \tag{1.29}$$

Положим

$$E^q(p,t) = \sum \left[f^{I}_{t0}(p,\omega_t,t) + f^{II}_{t0}(p,\omega_t,t) \right] - \sum y_0^{(t)}(p,t), \quad p \in S,$$

где

$$y_0^{(t)}(p,t) = y_0^t(p,t) + \omega^t,$$

а ω_t определены в соответствии с формулой (1.28). Как и в общем случае, отыскание согласованных цен для модели, определяемой функциями f^{I}_t, f^{II}_t и y^t, редуцируется к определению нулей отображения $E^q(p,t)$ с ненулевыми значениями параметра t. Отметим, что в силу (1.26) функция $E^q: \mathring{S} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет тождеству

$$p \cdot E^q(p,t) = (p - tq)^{-} \cdot \left[\sum_N \beta_t (y_0^t(p,t)) - f^{I}_{t0}(p,\omega_t,t) \right].$$

В частности, при $t = 0$ имеем

$$p \cdot E^q(p,0) = 0.$$

Таким образом, "предельные" характеристики модели $\tilde{\mathcal{E}}$ определяют классическую функцию избыточного спроса $E^q_0(p) = E^q(p,0)$. Это позволяет в условиях гладкости f^{I}_{t0}, f^{II}_{t0} и y^t_0 воспользоваться гомотопическими методами анализа разрешимости уравнений $E^q_t(t) = E^q(p,t) = 0$ при некоторых $t > 0$. Один из возможных подходов базируется на сравнительно хорошо изученных свойствах индекса векторного поля E^q_0 (в условиях общего положения). За недостатком места необходимые подробности будут приведены в отдельной статье. Отметим лишь, что в рассматриваемой ситуации, как и для традиционных равновесных моделей, принципиальное значение имеют регулярность $\tilde{\mathcal{E}}$ и надлежащие граничные условия (поведение E^q при уменьшении гибких цен до нулевого уровня).

§2. Равновесие в моделях с рационированием

Предметом дальнейшего изучения являются экономические модели с рационированием, т.е. экономики вида

$$\mathcal{E} = \langle X_t, Y_t, u_t(x^t, y^t), \beta_t \ , \ t = 1,\ldots,n \rangle,$$

где X_t, Y_t – пространства векторов потребления и производства t-го участника, а функции $u_t : X_t \times Y_t \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta_t : Y = \Pi Y_t \longrightarrow X_t$ – функции предпочтения и рационирования t-го участника.

Далее нас будет интересовать взаимосвязь следующих понятий.

Определение 1. Состояние $(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{x} = (\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^1)$, $\bar{y} = (\bar{y}^1,\ldots,\bar{y}^n)$, называется β-согласованным, если:

1) $\sum \bar{x}^t = \sum \bar{y}^t$;

2) для всех t пара $(\bar{x}^t, \bar{y}^t)$ принадлежит множеству

$$B_t(\bar{y}) = \left\{(x^t, y^t) \in X_t \times Y_t \mid x^t \leqslant \beta_t(\bar{y} \mid y^t)\right\}.$$

Обозначим через $D_t(\bar{y})$ множество

$$\left\{(x^t, y^t) \in B_t(\bar{y}) \mid (x^t, y^t) \in \operatorname*{arg\,max}_{(x^t, y^t) \in B_t(\bar{y})} u_t(x^t, y^t)\right\}.$$

Определение 2. Состояние $(\bar{x},\bar{y})$ называется β-равновесным, если $(\bar{x},\bar{y})$ β-согласовано и пара $(\bar{x}^t, \bar{y}^t)$ принадлежит множеству $D_t(\bar{y})$ для всех t.

Определение 3. Состояние $(\bar{x},\bar{y})$ называется Парето-оптимальным, или $(\bar{x},\bar{y})$ принадлежит Парето-границе, если:

1) $\sum \bar{x}^t = \sum \bar{y}^t$;

2) не существует пары $(\tilde{x},\tilde{y})$ такой, что $\sum \tilde{x}^t = \sum \tilde{y}^t$ и $u_t(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) \geqslant u_t(\bar{x}^t, \bar{y}^t)$ для всех t, причем хотя бы для одного t неравенство строгое.

Множество Парето-оптимальных состояний мы будем обозначать через Θ, а множество β-равновесных состояний – через Θ_β. Изучим множества $\Theta \cap \Theta_\beta$.

Наша ближайшая цель – найти, при некоторых дополнительных условиях, необходимое условие непустоты множества $\theta \cap \theta_\beta$. Рассмотрим экономическую модель со следующими дополнительными предположениями (ниже D^l – единичный шар в $\mathbb{R}^l$):

1. Для всех $i = 1,\dots,n$ X_i – внутренность положительного ортанта R^l_+, Y_i – множество вида $(\mathring{R}^l_- \cap D^l) + a$, $a \in \mathring{R}^l_+$.

2. $u_j \in C^2(R^l \times R^l)$, $j = 1,\dots,n$.

3. $D^2u_i(x^i,y^i)$, как симметрическая билинейная форма, в ограничении на пространство $\mathrm{grad}^\perp\, u_i(x^i,y^i)$ отрицательно определена для всех i.

4. Для всех j и $c \in R$ $u_j^{-1}(c)$ – замкнутое в R^{2l} множество.

5. Вектор $\mathrm{grad}\, u_i(x^i,y^i)$ принадлежит $(\mathring{R}^l_+) \times (\mathring{R}^l_-)$ для всех i и всех точек $(x^i,y^i) \in R^l \times R^l$.

6. Для всех i функции β_i имеют вид:

$$\beta_i(y^1,\dots,y^n) = \beta_i^1(y^1,\dots,\hat{y}^i,\dots,y^n) + \beta_i^2(y^i),$$

где

$$\beta_i^1\colon Y^i = \prod_{i \neq j} Y_j \longrightarrow R^l_+$$

– непрерывное отображение, а $\beta_i^2\colon \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$ – линейное отображение, не равное тождественно 0.

7. Для всех $\bar{y} \in Y = \Pi Y_i$ имеет место равенство $\Sigma\beta_i(\bar{y}) = \Sigma\bar{y}^i$.

За исключением условия 6 все указанные предположения являются традиционными [5,10]. Вид условия 6 диктуется исключительно применяемой далее техникой.

В указанных предположениях верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если набор функций $u_i(x^i,y^i)$ удовлетворяет условиям 1-7 и, кроме того, для всех i*

$$\beta_i^2(R^l_+) \subset \mathring{R}^l_+, \quad \beta_i^1(Y) \subset K_i \subset \mathring{R}^l_+, \quad (\beta_i^2)^{-1}(-K_i) \subset Y_i,$$

где K_i – компакт в R^l, то β-равновесные состояния существуют.

Доказательство теоремы проводится обычным образом, сведением ее к теореме Шаудера для специальным образом построенного отображения. Поскольку, по существу, речь идет о нахождении экстремума некоторой функции, выбор условий 1–6 определяется желанием использовать дифференциальный признак экстремума.

Теорема 2. *Точка (x,y) есть локальный оптимум Парето тогда и только тогда, когда для всех i вектор* grad $u_i(\bar{x}^i,\bar{y}^i)$ *имеет вид* $(p, \; p)$, $p \in R^l$.

Таким образом, мы получили необходимый признак непустоты множества $\Theta \cap \Theta_\beta$: если точка $(\bar{x},\bar{y}) \in \Theta \cap \Theta_\beta$, то существует вектор $p \in R^l$ такой, что вектор $(p,-p)$ ортогонален графику отображения β_i для всех i. Полученный необходимый признак показывает, что в приведенных условиях 1–7 существование Парето-оптимальных β-равновесных состояний – явление редкое. Действительно, так как вектор $p \in \mathring{R}^l_+$, то из условия ортогональности вектора $(p,-p)$ графику отображения β_i следует, что для всех i число 1 является собственным числом линейного отображения β_i. Обозначим через $L(n)$ множество линейных отображений пространства R^n в себя с мерой, индуцированной мерой пространства R^{n^2}, и через $M(n)$ – подмножество в $L(n)$, состоящее из преобразований, имеющих собственное значение 1. Тогда теорема Фубини влечет, что мера $M(n)$ равна 0.

Ввиду условия 7

$$\sum \beta_i^2(y^i) = \sum y^i - \sum \beta_i^1(\bar{y}), \tag{1.31}$$

нетрудно получить, что задание отображений рационирования β_i эквивалентно выбору линейного отображения $L : R^{nl} \longrightarrow R^l$ и набора (β_i^1), $i = 1,\dots,n-1$. Действительно, в этом случае β_n^i восстанавливается из (1.31) однозначно. Таким образом, множество рассматриваемых нами экономик есть подмножество в $\mathrm{Lin}\,(R^{nl},R^l) \times \prod_{i=1}^{n-1} C(Y,X_i)$, а множество экономик, в которых могут существовать Парето-оптимальные, β-равновесные состояния, лежит в подмножестве $L_0 \times \prod_{i=1}^{n-1} C(Y,X_i)$, где $L_0 \subset \mathrm{Lin}(R^{ln},R^l)$ – такие линейные отображения, что определяемый ими набор

$(\beta_i^2)_{i=1,\dots,n}$ принадлежит $\prod_{i=1}^{n} M(n)$. Из приведенных выше замечаний моментально получается

Теорема 3. *Пусть* μ *– любая неатомическая мера на множестве* $V = \prod_{i=1}^{n-1} C(Y,X_i)$, $\mu(V) \neq 0$, *тогда мера множества параметров, обеспечивающих необходимое условие существования Парето-оптимальных,* β*-равновесных состояний, равна* 0 *в множестве* $\mathrm{Lin}(R^{ln} \times R^l) \times V$.

Замечание. Меру на множестве V можно задать, например, как в [11, п.2.2.6].

Топологическая характеризация множества $L_o \times V$ также очевидна.

Теорема 4. *Множество* $L_o \times V$ *является множеством первой категории в топологическом пространстве* $\mathrm{Lin}(R^{nl},R^l) \times V$, *где* V *рассматривается в любой топологии.*

Любопытно оценить, насколько наше необходимое условие непустоты множества $\Theta \cap \Theta_\beta$ чувствительно к изменению начальных предположений 1-7, или, точнее, до какой степени необходимый критерий теоремы 2 контролирует множество параметров нашей экономической модели, для которых множество $\Theta \cap \Theta_\beta$ не является пустым. Следующее наблюдение оказалось весьма неожиданным: заменим условие 6 на

6'. Для всех i функции $\beta_i : Y \longrightarrow X_i$ являются полилинейными отображениями.

Необходимое условие теоремы 2 данного параграфа в этом случае примет вид:

Существует вектор $\bar{y} \in Y$ *такой, что линейное отображение* $\beta_i(\bar{y}|y^i)$ *имеет собственное значение* 1, *соответствующее вектору* $\bar{y}^i$: *для всех* i

$$\beta_i(\bar{y}) = \bar{y}^i. \tag{2.32}$$

Преимущество такого изменения в условии состоит в том, что на множестве полилинейных отображений естественным образом определена мера.

Утверждение. *Для* $l=2$ *мера множества пар* $(\beta_1,\beta_2) \in P(R^{2l},R^l) \times P(R^{2l},R^l)$ *с условием* (2.32) *равна* 1, *где* $P(R^{2l},R^l)$ *– множество* *полилинейных отображений из* R^{2l} *в* R^{l}.

Таким образом, в отличие от ситуации теоремы 3 данного параграфа нашего необходимого условия в этом случае не хватает для доказательства малости множества параметров экономический модели, обеспечивающих непустоту множества $\Theta \cap \Theta_{\beta}$.

§ 3. Равновесие в экономике с рынками лицензий и продуктов

Стремительный рост рынка лицензий и постоянное увеличение его доли в общем объеме торговых сделок - объективная реальность всех экономически развитых стран. Ее уже не может игнорировать ни одна экономическая теория, претендующая на сколько-нибудь адекватное отражение действительности. В частности, это относится и к неоклассической теории и составляющей ее инструментальную базу математической экономике. Ниже приводится описание одного из возможных вариантов включения рынка лицензий в модель общего равновесия, полностью сохраняющего неоклассический дух.

1. Рассмотрим модель экономики с конечным числом экономических агентов n и двумя видами продуктов, т.е. будем различать воспроизводимые и невоспроизводимые продукты. Пусть m - число воспроизводимых, а l - число невоспроизводимых продуктов. Каждый экономический агент i потребляет продукты обоих видов. Текущее потребление невоспроизводимых продуктов агентом i обозначим через x_i, а через $x = (x,\ldots,x_n)$ - потребление во всей экономике. Соответственно потребление воспроизводимых продуктов обозначается через y_i и $y = (y,\ldots,y_n)$. Предпочтения агента i описываются с помощью функции полезности u_i, зависящей только от x_i и y_i. Относительно функции полезности u_i предполагается, что она определена для любых x_i и y_i, вогнута и монотонно возрастает как по x_i, так и по y_i, но при этом принимает конечные значения только при неотрицательных аргументах, в остальных случаях - минус бесконечность. Начальные запасы продуктов представлены только невоспроизводимыми продуктами, причем каждый агент i располагает строго положительным набором таких продуктов w_i.

Производство продуктов в рассматриваемой модели полностью децентрализовано, т.е. каждый экономический агент производит их для себя из невоспроизводимых продуктов с помощью заданного набора технологий. Но создание самих технологий полностью централизовано, причем каждый экономический агент покупает лицензии на их использование по индивидуальным ценам. Воспроизводимые и невоспроизводимые продукты согласно неоклассической схеме должны продаваться по единым для всех ценам. В данном случае предусматривается лишь рынок невоспроизводимых продуктов, воспроизводимые каждый производит только для себя. Но поскольку технологии производства едины для всех, это не имеет никакого значения, т.е. присоединение к модели рынка воспроизводимых продуктов излишне.

Формально технология производства каждого продукта описывается парой l-мерных векторов, первый из которых задает текущие, а второй – начальные затраты невоспроизводимых продуктов при использовании данной технологии. Множество возможных технологий производства произвольного продукта j для простоты будем считать параметризованным с помощью скалярного параметра λ_j, принимающего значения в некотором интервале $\Lambda_j = [\tilde{\lambda}_j, \tilde{\tilde{\lambda}}_j]$ и интерпретируемого как рейтинг технологии. Таким образом, технология производства продукта j – это пара $(a_j(\lambda_j), b_j(\lambda_j))$, где $a_j(\lambda_j)$ – вектор затрат невоспроизводимых продуктов на создание самой технологии, а $b_j(\lambda_j)$ – вектор текущих затрат невоспроизводимых продуктов на создание единицы воспроизводимого продукта j. Естественно предположить, что с ростом λ_j компоненты вектора $a_j(\lambda_j)$ монотонно возрастают, а компоненты вектора $b_j(\lambda_j)$ монотонно убывают. Кроме того, будем предполагать непрерывную дифференцируемость и выпуклость функций $a_j(\cdot)$ и $b_j(\cdot)$.

2. Чтобы определить состояние общего равновесия, введем еще несколько обозначений. Через λ обозначим набор рейтингов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, соответственно $\Lambda = \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m$. Обозначим через $B(\lambda)$ матрицу, состоящую из строк $b_j(\lambda_j)$, где $j = \overline{1,m}$. Индивидуальные цены технологий для агента i обозначим через q_i, а цены невоспроизводимых продуктов – через p. Здесь p – неотрицательный l-мерный вектор с суммой компонент, равной единице, а q_i – неотрицательный m-мерный вектор. Цена набора технологий, определяемого значениями рейтинга λ, равна для агента i скалярному произведению векторов λ и q_i, т.е. равна $q_i \cdot \lambda$. Цена набора продук-

тов, производимого агентом i для себя, равна величине $p \circ B(\lambda)y_i + q_i\lambda$, т.е. суммарной цене используемых для этой цели невоспроизводимых продуктов и технологий. Через π обозначим прибыль, получаемую от производства и продажи технологий, а через Q_i – долю агента i в этой прибыли. Разумеется, все Q_i неотрицательны, причем сумма их равна единице.

Состоянием общего равновесия называется пятерка $(\bar{p},\bar{q},\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$ такая, что $\bar{p},\bar{q} = (\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n)$ – цены невоспроизводимых продуктов и технологий соответственно, $\bar{\lambda}$ – рейтинг технологий, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – потребление продуктов и при этом выполняются условия:

a) для каждого $i = \overline{1,n}$ выполняется условие индивидуальной рациональности выбора x и y, т.е.

$$(\bar{x}_i,\bar{y}_i) = \arg\max u_i(x_i,y_i)$$

при условии

$$\bar{p} \cdot \bar{x}_i B(\bar{\lambda})\bar{y}_i + \bar{q}_i\bar{\lambda} \leqslant \bar{p}\bar{w}_i + Q_i\bar{\pi},$$

где

$$\bar{q}_i = \bar{p}D_\lambda B(\bar{\lambda})\bar{y}_i, \qquad i = \overline{1,n};$$

b) производство технологий обеспечивает максимальную прибыль, возможную при данных ценах , т.е.

$$\bar{\pi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i\bar{\lambda} - \bar{p}\sum_{j=1}^{m} a_j(\bar{\lambda}_j) = \max_{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i\lambda - \bar{p}\sum_{j=1}^{m} a_j(\lambda_j)\right];$$

c) по всей совокупности воспроизводимых и невоспроизводимых продуктов соблюдается материальный баланс, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i + \sum_{i=1}^{n} B(\bar{\lambda})\bar{y}_i + \sum_{j=1}^{m} a_j(\bar{\lambda}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} w_j.$$

Здесь существенно, что прибыль от производства и продажи лицензий может быть в принципе как положительной, так и отрицательной. Чтобы распределяемая между агентами прибыль была нулевой, как это имеет место в моделях типа Эрроу – Дебре, необходимо ввести дополнительные условия, например, положить $\lambda_j = 0$ для всех j и предположить, что функции $a_j(\cdot)$ линейны.

Следующее замечание касается цены технологии. Предполагается, что каждый экономический агент платит за выбранный им уровень технологии, т.е. за рейтинг. В состоянии равновесия все они выбирают именно тот уровень технологии, который наиболее выгоден производителю технологий. На практике цена лицензии определяется прежде всего объемом передаваемых прав. В модели это может быть только объем производства продукта по данной лицензии, т.е. соответствующая компонента вектора y_i. При выборе y_i агент i как бы не догадывается, что в результате возрастает цена лицензии, и ориентируется только на текущие затраты.

Справедлива следующая теорема существования общего равновесия.

Теорема 1. *Если выполняются сделанные выше предположения, а также условия*

а) $\sum_{j=1}^{m} a_j(\tilde{\lambda}_j) \leqslant w_i, \qquad i = \overline{1,n},$

б) $\sum_{j=1}^{m} a_j(\tilde{\tilde{\lambda}}_j) \leqslant \sum_{i=1}^{m} w_i,$

то равновесие существует.

Напомним, что $\tilde{\lambda}_j$ – левый, а $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$ – правый конец рейтингового интервала. Взаимосвязь технологии и рейтингового интервала, данная в предположениях а) и б), легко интерпретируется.

§ 4. О равновесности вполне договорных распределений

Ниже предлагается теоретико-игровой анализ вполне договорных распределений в моделях экономического обмена. Наряду с кооперативными, рассматриваются и равновесные аспекты характеризации договорных отношений. В частности, прояснение структуры договорного блокирования позволяет найти достаточно общие условия, при которых любое вполне договорное распределение оказывается вальрасовским. Изучаемая концепция договорных отношений идейно близка сформулированной в [12]. Как и в [12] (в отличие от [13]), главное внимание уделяется коалиционной устойчивости, инвариантной относительно конкретных способов задания договорных распределений. Основные модификации постановок из [12] состоят в некотором ограничении на структуру элементарных обменов и в расширении свободы блокирования допустимых систем договоров.

Центральный результат заключается в следующем: при надлежащих условиях регулярности договорные отношения устойчивы тогда и только тогда, когда они базируются на равновесных ценах. Вместе с тем в ряде случаев вполне договорные состояния отвечают более широкому понятию оптимальности, нежели равновесность. Например, такие состояния могут реализовываться и в ситуациях, где баланс спроса и предложения на основе рыночного механизма невозможен (один из примеров такого рода приводится в конце доклада).

В качестве базовой используется стандартная модель обмена

$$\mathcal{E} = \langle N, \left\{X_i, w^i, u_i\right\}_N, \sigma\rangle,$$

где, как обычно, $N = \{1,\ldots,n\}$ - множество участников, $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$, $w^i \in \mathbb{R}^l$, $u_i\colon X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ - их потребительские множества, начальные запасы и функции полезности соответственно. Семейство $\sigma \subseteq 2^N$ определяет совокупность допустимых коалиций $S \subseteq N$, которые могут объединять возможности своих участников с целью улучшения не устраивающих их распределений суммарного запаса $\sum\limits_N w^i$.

Зафиксируем некоторое собственное подпространство $M \subseteq \mathbb{R}^l$, обладающее тем свойством, что каждый его ненулевой элемент имеет компоненты разных знаков. M-договором коалиций $S \in \sigma$ будем называть совокупность векторов $\mathrm{v} = \left\{\mathrm{v}_{ij}\right\}_{i,j \in S} \subseteq M$, удовлетворяющих условию: $\mathrm{v}_{ij} = -\mathrm{v}_{ji}$ для всех $i,j \in S$. Коалицию S, в рамках которой заключается договор v, будем обозначать также через $S(\mathrm{v})$. Компоненты векторов v_{ij}, фигурирующих в определении договора v, указывают объемы обмена между участниками i,j. При этом положительные компоненты v_{ij} определяют количество продуктов, которые участник j должен передать участнику i, а абсолютные значения отрицательных - количество продуктов, которые i должен передать j.

Конечная система M-договоров $\mathcal{V} = \left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}}$ называется допустимой, если $x^i(\mathcal{V}) \in X_i$ для всех $i \in N$, где $x^i(\mathcal{V})$ - состояние, в которое переходит участник i после заключения системы договоров $\mathcal{V}$:

$$x^i(\mathcal{V}) = w^i + \sum_{r \mid i \in S(v^r)} \ \sum_{j \in S(v^r)} v^r_{ij}.$$

Для описания исследуемых форм разрыва допустимых систем договоров введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{V} = \left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}}$ - произвольное множество договоров, $\mathcal{R}'$ - некоторое подмножество $\mathcal{R}$. Обозначим через $A(\mathcal{V},\mathcal{R}',\mathcal{E})$ совокупность всех допустимых систем договоров $\tilde{\mathcal{V}} = \left\{\tilde{v}^r\right\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ модели $\mathcal{E}$, удовлетворяющих условиям:

(а) $\tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$, $\tilde{v}^r = v^r$ для всех $r \in \tilde{\mathcal{R}}$;

(б) $\tilde{\mathcal{V}}$ - максимальная по включению среди всех допустимых систем договоров, удовлетворяющих условию (а).

Множество $A(\mathcal{V},\mathcal{R}',\mathcal{E})$ характеризует результат процедуры разрыва договоров, состоящей из двух этапов. На первом аннулируются все договоры v^r, $r \in \mathcal{R}'$. Если система $\left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}'}$ допустима, то она и является единственным элементом $A(\mathcal{V},\mathcal{R}',\mathcal{E})$. Если же нет, то на втором этапе аннулируется некоторое подмножество договоров из $\left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}\setminus\mathcal{R}'}$ с тем, чтобы обеспечить допустимость оставшихся. Условие (б) требует, чтобы при этом разрывался лишь необходимый минимум договоров. Указанная процедура, вообще говоря, неоднозначна, и ее итогом может оказаться как пустое множество, так и целое семейство допустимых систем.

Охарактеризуем возможности коалиции $S \in \sigma$ по блокированию состояния $x(\mathcal{V}) = (x^i(\mathcal{V}))_N$, порождаемого допустимой системой договоров $\mathcal{V} = \left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}}$. Будем предполагать, что наряду с разрывом договоров, отвечающих некоторой части $\mathcal{R}'$ множества

$$\mathcal{R}^S = \left\{r \in \mathcal{R} | S(v^r) \cap S \neq \emptyset\right\},$$

коалиция S может заключить новый договор w. Обозначим через $\mathcal{E}_w$ вариацию модели $\mathcal{E}$, порожденную договором w:

$$\mathcal{E}_w = \langle N, \left\{X_i, w^i + \Delta^i(w), u_i\right\}_N, \sigma\rangle,$$

где

$$\Delta^i(w) = \sum_{j \in S(w)} w_{ij}.$$

Будем говорить, что коалиция $S \in \sigma$ блокирует систему договоров $\mathcal{V} = \left\{v^r\right\}_{\mathcal{R}}$, если найдутся $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}^S$, M-договор w и система $\mathcal{V}' \in A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E}_w)$ такие, что $S(w) = S$ и $u_i(x^i(\mathcal{V}' \cup \{w\})) \geqslant$ $\geqslant u_i(x^i(\mathcal{V}))$ для всех $i \in S$, причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Систему договоров $\mathcal{V}$ будем называть квазиустойчивой, если она не блокируется никакой коалицией $S \in \sigma$.

Выделим состояния $\mathcal{E}$, коллективная устойчивость которых не зависит от конкретного устройства порождающих их систем договоров. Пусть $x \in \prod_N X_i$ - произвольное состояние модели $\mathcal{E}$. Обозначим через $\mathcal{W}(x)$ множество всех допустимых систем договоров $\mathcal{V}$ таких, что $x = x(\mathcal{V})$.

Определение. Сбалансированное состояние [1] x назовем вполне договорным, если $\mathcal{W}(x) \neq \emptyset$ и все содержащиеся в $\mathcal{W}(x)$ системы договоров квазиустойчивы.

Множество вполне договорных состояний $\mathcal{E}$ обозначим через $D_o^M(\mathcal{E})$.

В дальнейшем предполагается, что коалиционная структура σ неразложима: для любого нетривиального разбиения $\left\{T, N\backslash T\right\}$ существует $S \in \sigma$ такая, что $S \cap T \neq \emptyset$, $S \cap N\backslash T \neq \emptyset$. В условиях неразложимости σ множество

---

[1] Т.е. удовлетворяющее условию $\sum_N x^i = \sum_N w^i$.

$$M_{\mathcal{E}}(N) = \left\{x \in \prod_N X_i \mid W(x) \neq \varnothing\right\}$$

всех сбалансированных состояний модели $\mathcal{E}$, достижимых посредством заключения некоторой системы M-договоров, имеет вид:

$$M_{\mathcal{E}}(N) = \left\{x \in X \mid \exists\ \Delta \in \Delta_M(N)[x = w + \Delta]\right\},$$

где

$$X = \prod X_i,$$

$$\Delta_M(N) = \left\{(\Delta^i)_N \in M^N \mid \sum_N \Delta^i = \mathbb{0}\right\},$$

$$w = (w^1, \ldots, w^n).$$

Важной характеристикой стратегических возможностей коалиций $S \in \sigma$ по блокированию распределений из $M_{\mathcal{E}}(N)$ является тот факт, что указанные возможности инвариантны как относительно текущего состояния $x \in M_{\mathcal{E}}(N)$, так и относительно конкретного выбора системы $\mathcal{V} \in W(x)$.

Будем говорить, что состояние $x \in M_{\mathcal{E}}(N)$ доминируется (M-блокируется) состоянием $y \in M_{\mathcal{E}}(N)$, если существует коалиция $S \in \sigma$ такая, что $u_i(y^i) \geqslant u_i(x^i)$ для всех $i \in S$, причем $u_j(y^j) > u_j(x^j)$ для некоторого $j \in S$.

Множество состояний $x \in M_{\mathcal{E}}(N)$, не доминируемых никаким $y \in M_{\mathcal{E}}(N)$, обозначим через $C_{\sigma}^{M}(\mathcal{E})$.

Теорема 1. $D_{\sigma}^{M}(\mathcal{E}) = C_{\sigma}^{M}(\mathcal{E})$.

Редукция, осуществляемая теоремой 1, позволяет в традиционных рамках теории кооперативных игр находить условия, обеспечивающие равновесную харктеризацию вполне договорных состояний для широкого класса моделей экономического обмена. Немаловажную роль здесь имеет и относительная простота M-блокирования.

Ограничимся характеризацией множеств $D_{\sigma}^{M}(\mathcal{E})$ для случая $\dim M = l - 1$. При этом будем предполагать, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующим стандартным требованиям.

Предположение. *Для всех $i \in N$ выполняются условия:*

(а) X_i *– выпуклые;*

(б) u_i *– строго квазивогнутые;*

(в) *для каждого* $x^i \in \tilde{X}_i = \mathrm{Pr}_{X_i} X(N)$ *существует* $u \in \mathrm{int}\ \mathbb{R}^l_+$ *такой, что* $u_i(x^i + u) > u_i(x^i)$ (*здесь* $X(N) = \left\{x \in X \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i\right\}$).

Будем говорить, что множество $T \subseteq N$ является σ-делимым, если для любого $i \in N$ существует коалиция $S \in \sigma$, содержащая i и не содержащая T. Далее, положим

$$S_{\mathcal{E}} = \left\{i \in N \mid \alpha_i(w^i) \cap \hat{X}_i \subseteq \mathrm{int}\ X_i\right\},$$

где

$$\alpha_i(w^i) = \left\{x^i \in X_i \mid u_i(x^i) \geqslant u_i(w^i)\right\},$$

$$\hat{X}_i = X_i \setminus \left\{w^i + \mathrm{int}\ \mathbb{R}^l_+\right\}.$$

Теорема 2. *Если множество* $S_{\mathcal{E}}$ *является* σ-*делимым и при этом* $\{i\} \in \sigma$ *для всех* $i \in S_{\mathcal{E}}$, *то каждое вполне договорное распределение модели* $\mathcal{E}$ *является равновесным.*

Обозначим через $W(\mathcal{E})$ множество всех равновесных (вальрасовских) распределений модели $\mathcal{E}$. Положим

$$D_c(\mathcal{E}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} D_c^M(\mathcal{E}),$$

где $\mathcal{M}$ - множество всех гиперподпространств $\mathbb{R}^l$, обладающих тем свойством, что их ненулевые элементы содержат компоненты различных знаков.

На основании теоремы 2 справедливо

Следствие. *Пусть модель* $\mathcal{E}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2. Если функция полезности кого-либо из участников является строго возрастающей, то* $D_c(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.

Автором рассматривались и некоторые другие условия, обеспечивающие равновесность вполне договорных распределений (см., например, [14]). Кроме того, значительное внимание было уделено достижимости множеств $D_c^M(\mathcal{E})$ и вопросам существования соответствующих обобщенных решений Неймана - Моргенштерна [5]. В качестве бинарного отношения рассматривалось доминирование α_M, порождаемое процедурой разрыва старых и заключения новых договоров: $x\alpha_M y$ имеет место тогда и только тогда, когда y является итогом блокирования некоторой системы договоров $\nu \in W(x)$. При достаточно слабых предположениях доказано, что для любого $x \notin D_o^M(\mathcal{E})$ существует процесс его последовательного улучшения (в смысле α_M), сходящийся к множеству вполне договорных распределений $\mathcal{E}$ (см. [14]).

В заключение приведем упоминавшийся пример модели обмена $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, u_i\}_N, \sigma\rangle$, в которой $W(\mathcal{E}) = \emptyset$, в то время как $D_o(\mathcal{E}) \neq \emptyset$. Ее параметры таковы

$$N = \{1,2,3\},\ \sigma = \{\{1,2\},\{2,3\}\},\quad X_i = \mathbb{R}^2_+ \quad (i \in N),$$

$$w^1 = (0,1),\quad w^2 = (6,1),\quad w^3 = (6,3),$$

$$u_i(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + 4x_2, & i = 1, \\ x_1, & i = 2,3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $W(\mathcal{E}) = \emptyset$. В то же время множество вполне договорных состояний $\mathcal{E}$ непусто. Действительно, положим $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + 3x_2 = 0\}$ и рассмотрим состояние $\bar{x} = (\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3.) \in M_{\mathcal{E}}(N)$, где $\bar{x}^1 = (0,1)$, $\bar{x}^1 = (9,0)$, $\bar{x}^2 = (3,4)$. Поскольку элементы $\bar{x}^1,\bar{x}^2$ доставляют максимум соответствующим функциям полезности на множествах $X_i^M = (\bar{x}^i + M) \cap \mathbb{R}^2_+$, состояние $\bar{x}$ может M-блокироваться лишь по коалиции $S = \{2,3\}$. Необходимым условием такого блокирования является наличие распределения $\tilde{x} = (\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3) \in M_{\mathcal{E}}(N)$, удовлетворяющего условиям $\tilde{x}_1^1 \geqslant 0$, $\tilde{x}_1^2 = 9$, $\tilde{x}_1^3 > 3$. Но эти условия очевидным образом противоречат требованию сбалансированности распределений из $M_{\mathcal{E}}(N)$:

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{x}^i = \sum_{i=1}^{3} w^i = (12,5).$$

Итак, $\bar{x} \in C_o^M(\mathcal{E})$, что в силу теоремы 1 и доказывает вполне договорность распределения x.

Несколько более сложный пример, когда $W(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, но при этом $D_o(\mathcal{E}) \setminus W(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, имеется в [14].

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ РЕШЕНИЯ И МЕХАНИЗМЫ ВЫБОРА

§ 1. Механизмы равновесия Нэша

Начнем с определения механизма группового выбора. Пусть $N = \{1,\dots,n\}$ – множество участников, A – множество альтернатив. *Механизмом группового выбора* называется набор множеств $S_1,\dots,S_n$ и отображение

$$\pi: S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow A.$$

Если к этому добавляется набор $R_N = (R_1,\dots,R_n)$ предпочтений участников на множестве A, то возникает игра $G(\pi,R_N)$. Под предпочтением понимается линейный порядок на множестве A; множество таких порядков обозначается через $L(A)$.

Равновесие по Нэшу в игре $G(\pi,R_N)$ понимается в обычном смысле. Это такой набор $s_N^* = (s_1^*,\dots,s_n^*)$ элементов $s_i^* \in S_i$, что для любого участника $i \in N$ и любой стратегии $s_i \in S_i$ выполняется условие

$$\pi(s_N^*) R_i \pi(s_i, s_{N-i}^*).$$

Множество всех равновесий Нэша в игре $G(\pi,R_N)$ обозначается через $NE(\pi,R_N)$. Механизм π называется *состоятельным*, если для любого профиля предпочтений $R_N \in L(A)^N$ множество $NE(\pi,R_N)$ непусто.

Существуют ли состоятельные механизмы? Ниже мы более подробно разберемся с этим вопросом, а пока приведем

Пример. Пусть даны три участника, $N = \{1,2,3\}$. Участники 2 и 3 называют по альтернативе, а участник 1 называет одного из них (короля). Исходом считается альтернатива, называемая королем. Более формально, $S_1 = \{2,3\}$, $S_2 = S_3 = A$, $\pi(i,x_2,x_3) = x_i$.

Такой механизм называется *кингмейкером*. Это – состоятельный механизм. В самом деле, участники 2 и 3 обладают доминантными стратегиями – называть свою наилучшую альтернативу $\max R_i$. В таком случае и первый участник может выбрать наилучшего короля. При данном поведении исходом (равновесным) является альтернатива $\max R_1/\{\max R_2, \max R_3\}$.

Перейдем к более обстоятельному изучению состоятельных механизмов. С любым механизмом (состоятельным или нет) можно связать *соответствие равновесных исходов* F_π: $L(A)^N \Longrightarrow A$ по формуле

$$F_\pi(R_N) = \left\{x \in A \mid \exists\, s_N^* \in NE(\pi,R_N),\ x = \pi(s_N^*)\right\}.$$

Для состоятельного механизма π соответствие F_π непустозначно, $F_\pi(R_N) \neq \emptyset$ для любого $R_N \in (A)^N$. Можно ли еще что-то сказать об F_π? Любое ли соответствие возможно получить при этом? Оказывается, нет. Как видно из дальнейшего, соответствия F_π обладают некоторыми специфическими чертами. А пока вернемся к примеру кингмейкера. При более тщательном анализе можно убедиться, что для него соответствие F_π задается формулой

$$F_\pi(R_1,R_2,R_3) = \left\{\max R_2,\ \max R_3\right\},$$

т.е. является объединением двух диктаторских функций для участников 2 и 3.

Первое важное свойство соответствия F_π было обнаружено Маскиным (см. [15]). Чтобы его сформулировать, введем следующие важные понятия. Для предпочтения $R \in L(A)$ и альтернативы $x \in A$ обозначим через $L(x,R)$ нижний контур

$$L(x,R) = \left\{a \in A \mid xRa\right\}.$$

Далее, пишем $R \succeq_x R'$, если $L(x,R) \supset L(L,R')$, и для профилей R_N,R_N^1 пишем $R_N \succeq_x R_N^1$, если $R_i \succeq_x R_i'$ для всех $i \in N$.

Определение 1. Соответствие группового выбора $F{:}L(A)^N \Longrightarrow A$ называется ***монотонным***, если из $a \in F(R_N)$ и $R_N\ {}_a\!\preceq R_N'$, следует, что $a \in F(R_N')$.

Теорема [см. 15]. *Соответствие F_π монотонно для любого механизма π.*

Однако это не единственное свойство F_π. Нам удалось обнаружить более тонкое свойство, которое мы назвали грубостью. Сначала приведем несколько предварительных понятий. Зафиксируем соответствие F и рассмотрим множество $X \subset A$ и участника $i \in N$. Альтернатива $x \in X$ называется *несущественной* для i, если $x \notin F(R_N)$ для любого профиля R_N, обладающего свойством $L(x,R_i) \subset X$. Остальные альтернативы в X считаются существенными и образуют множество $E_i(X)$.

Соответствие $F: L(A)^N \Longrightarrow A$ называется *грубым*, если выполняется следующее свойство. Пусть $a \in F(R_N)$ и пусть имеется другой профиль R'_N, обладающий свойством $L(a,R'_i) \supset E_i(L(a,R_i))$. Тогда $a \in F(R'_N)$.

Можно показать, что это свойство более сильное, чем монотонность. Впрочем, для нейтрального F монотонность и грубость эквивалентны.

Теорема 1. *Соответствие F_π всегда грубое.*

На самом деле грубость не только необходима, но и достаточна для реализуемости соответствия состоятельным механизмом. А именно, верна следующая

Теорема 2. *Пусть участников не меньше трех. Если соответствие F непустозначное и грубое, тогда существует состоятельный механизм π такой, что $F = F_\pi$.*

Этот результат дает некоторое представление о положении дел при трех и большем числе участников, хотя иллюзий строить не приходится. Дело в том, что мало известно как о конструкции состоятельных механизмов, так и о грубых (или даже монотонных) соответствиях.

Остается сказать про случай двух участников. Здесь уже главную роль играет форсирование Φ_π, связанное с механизмом π, т.е. способность игроков влиять на исходы. Следующая теорема, видимо, впервые установлена В.А.Гурвичем [1].

Теорема 3. *Механизм π с двумя участниками состоятелен тогда и только тогда, когда форсирование Φ_π максимально.*

§ 2. Построение устойчивых исходов в групповом выборе

Предположим, что группа участников N хочет выбрать одну альтернативу из множества A. Выбор затрудняется тем, что они поразному предпочитают альтернативы из A. Для простоты считаем N и A конечными и под предпочтениями на A понимаем линейные порядки. Исключив альтернативы, которые могут быть улучшены для всех, участники стоят перед выбором из паретовского множества, часто большого. Чтобы выбирать из него, нужны какие-то дополнительные основания. Будем предполагать полную свободу информационных сообщений между участниками, что приводит к возможности координации действий и образованию коалиций с целью улучшения конечного исхода. При этом возможности коалиций будем задавать с помощью отношения *блокирования* $B \subset 2^N \times 2^A$. Здесь $(K,X) \in B$ (или KBX) означает, что коалиция K блокирует множество X, т.е. способна "загнать" исход в его дополнение $\bar{X}$. Такое описание коалиционной силы стало распространенным после работы Мулена и Пелега [16].

Пусть теперь фиксированы предпочтения участников $R_N = (R_1,\ldots,R_n)$. Набор R_N называется *профилем* предпочтений. "Хороший" исход должен принадлежать *ядру*

$$C(B,R_n) = \left\{x \in A \mid \nexists\ K \subset N,\ KBL(x,R_K)\right\},$$

где $L(x,R_K) = \bigcup_{i \in K} L(x,R_i)$, а $L(x,R_i) = \left\{y \mid xR_iy\right\}$. Если $KBL(x,R_K)$, то, значит, коалиция K может загнать исход в множество $A \setminus L(x,R_K)$, которое лучше, чем x для всех членов K. Все такие точки тоже естественно исключить. Тогда останутся только точки ядра, которое уже значительно меньше паретовского. Как участники могли бы прийти к какому-нибудь элементу ядра, не занимаясь примитивным перебором? Опишем одну процедуру исключения "плохих" альтернатив, которая приводит к желаемому результату.

Пусть даны блокирование B, профиль R_N и участники N упорядочены, $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Сначала коротко поясним, в чем состоит процедура. Каждый участник в порядке очередности стремится исключить (заблокировать) как можно больше своих нижних альтернатив из числа оставшихся после исключения предыдущими агентами. При этом каждый участник i согласен помочь любому участнику $j > i$ блокировать его альтернативы, если тот, в свою очередь, поможет i исключить его (i) следующую по порядку R_i альтернативу $a(i)$.

Дадим более формальное описание процедуры. Каждый шаг процедуры i (отождествленный с участником i) завершается следующими данными: множеством $Z(i)$ альтернатив, исключенных участником i, множеством A_{i+1} альтернатив, которые остались неисключенными, и "намеченной к исключению" альтернативой $a(i)$ из A_{i+1} (если $A_{i+1} \neq \varnothing$). Начинается процедура с множества $A_1 = A^* = A \setminus Z(0)$, где $Z(0)$ - множество альтернатив, блокируемых пустой коалицией.

Покажем, что происходит на шаге i. К этому моменту уже имеются множества $A_i \subset A$, $Z(k)$ и "намеченные к исключению" альтернативы $a(k)$, $k < i$. Если $A_i = \varnothing$, процедура заканчивается. Если $A_i \neq \varnothing$, определим новое "блокирование" участника i на множестве A_i так: i "блокирует" множество $X \subset A_i$, если существует коалиция $S \subset \{1,\ldots,i-1\}$ такая, что

$$(\{i\} \cup S)\ B\ (X \cup Z^+(S)),$$

где $Z^+(S) = \bigcup\limits_{k\in S} Z^+(k)$, $Z^+(k) = Z(k) \cup \{a(k)\}$. Теперь $Z(i)$ – это максимальное нижнее множество в линейном порядке $R_i|A_i$, которое "блокирует" участник i, $A_{i+1} = A_i \setminus Z(i)$ и $a(i) = \min R_i|A_{i+1}$ (если $A_{i+1} \neq \varnothing$).

Исходом процедуры называется множество A_{n+1} (или пустое множество, если процедура заканчивается раньше).

Поясним сказанное на примере.

Пример. $N = \{1,2,3,4\}$, $A = \{x,y,z\}$. Блокирование B задается весами $\mu(i) = 2$, $\beta(x) = \beta(y) = \beta(z) = 3$. Полагается, что

$$KBX \Longleftrightarrow \mu(K) \geqslant \beta(X).$$

Пусть профиль R_N имеет вид

x	z	y	x
z	y	z	y
y	x	x	z
1	2	3	4

Шаг 1. Участник 1 ничего не блокирует, $Z(1) = \varnothing$, $a(1) = y$.

Шаг 2. Участник 2 тоже ничего не блокирует, $Z(2) = \varnothing$, $a(2) = x$.

Шаг 3. Участник 3 (с помощью участника 2) блокирует x. Поэтому $Z(3) = \{x\}$, $a(3) = z$.

Шаг 4. $A_4=\{y,z\}$. Участник 4 блокирует z (так как коалиция $\{2,3,4\}$ блокирует $\{z\} \cup \{x,z\} \cup \{x\} = \{x,z\}$, $Z(4) = \{z\}$. Исход состоит из одного элемента y. Заметим, что и ядро $C(B,R_N)$ содержит y. И это не случайно.

Теорема 1. *Любой исход процедуры принадлежит ядру.*

Доказательство. Пусть $a \in A_{n+1}$, и допустим, что некоторая коалиция K отвергает a, т.е. $KBL(a,R_K)$. Для любого участника i альтернатива a строго лучше $Z(i)$ по построению, так что $L(a,R_i) \supset Z^+(i)$. Но тогда K блокирует $Z^+(K)$, т.е. участник i_0 из K с наибольшим номером блокирует множество $Z^+(i_0)$. Противоречие, которое доказывает теорему.

Эта теорема показывает, что предложенная процедура является весьма эффективным средством построения точек из ядра (хотя не все они достижимы с помощью этой процедуры). Некоторое неудобство ее состоит в том, что на шаге i приходится перебирать все коалиции из подмножества $\{1,\dots,i\}$, чтобы найти "помощников". Однако оно легко устраняется при некоторых дополнительных требованиях к блокированию. Главная неприятность состоит в том, что процедура может иметь холостой ход, т.е. пустой исход, даже в тех случаях, когда ядро непусто. Чтобы исключить это, нужно, чтобы блокирование было как минимум стабильным, т.е. имело непустое ядро при любом профиле предпочтений. Такое условие стабильности (не слишком обременительное) предложил Пелег [17]. Оно называется *выпуклостью* блокирования и состоит в следующем требовании:

$$K_1BX_1,\ K_2BX_2 \Longrightarrow \begin{cases} \text{либо } K_1 \cup K_2 B X_1 \cup X_2, \\ \text{либо } K_1 \cap K_2 B X_1 \cap X_2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть блокирование B выпукло. Тогда для любого профиля R_N множество исходов A_{n+1} непусто.*

Доказательство. Сделав первый шаг, попадаем в новую ситуацию с множеством участников $N' = N \setminus \{1\}$, множеством альтернатив $A' = A_1 \setminus Z(1)$, профилем $R_{N'}|A'$ и новым блокированием $B' \subset 2^{N'} \times 2^{A}$, которое определим следующим образом:

$$KB'X \longleftarrow \begin{cases} \text{либо } KBX \setminus Z(1), \\ \text{либо } (K \cup \{1\})B(X \cup Z^+(1)). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что блокирование B' выпукло, если выпукло блокирование B. Дальнейшее движение для (B,R_N) совпадает с процедурой для B' и профиля R'_N, со сдвигом номеров на 1. Поэтому совпадают и их исходы, непустые по индуктивному предположению.

§ 3. Теорема Скарфа с гомотопической точки зрения

Существуют различные подходы к определению решения кооперативной игры. Один из вариантов – рассматривать в качестве оптимальных такие распределения, при которых ни одна коалиция не может своими силами улучшить положение ее участников. Множество таких распределений называется *ядром игры*. Первая задача состоит, конечно, в нахождении условий, при которых ядро игры не пусто. В этом направлении классической стала теорема Скарфа, утверждающая, что для так называемых сбалансированных игр ядро не пустое [18]. Различные обобщения теоремы Скарфа были доказаны в [18–21].

К сожалению, все эти теоремы не дают информации о структуре ядра. Попытаемся предложить некоторую технику, которая, как нам кажется, может быть полезной для изучения топологических свойств ядра. Используя эту технику, мы доказываем теоремы Скарфа, Биллера, а также устанавливаем некоторую двойственность между типом сбалансированности и компонентами связности ядра.

Мы не касаемся здесь экономической интерпретации понятий и полученных результатов. Обсуждение этих вопросов можно найти в упомянутых выше работах.

Перейдем к точным определениям. Пусть N – конечное множество, состоящее из n элементов. Его непустые подмножества $S \subset N$ называются коалициями участников.

Определение 1. Кооперативной игрой n участников будем называть отображение G, ставящее в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ подмножество $G(S)$ пространства $\mathbb{R}^S$. При этом будем требовать выполнения следующих условий:

1. $G(S)$ – непустые замкнутые множества.

2. $G(S) \supset G(S) - \mathbb{R}^S_+$, где $\mathbb{R}^S_+$ – неотрицательный ортант $\mathbb{R}^S$.

3. $\Phi \in \operatorname{int} G(S)$.

По поводу условия 3 известно, что оно не ограничивает общности [20].

Пусть для $x \in \mathbb{R}^S$ символ $x|_S$ означает проекцию x на подпространство $\mathbb{R}^S$.

Определение 2. Ядром игры G называется множество

$$C(G) = \{x \in G(N) \mid x_S \notin \operatorname{int} G(S) \ \forall \ S \subset N\}.$$

Введем также следующие обозначения:

$$G'(S) = \{x \in R^n \mid x_S \in G(S)\},$$

$$F(S) = \operatorname{int} G'(S) \setminus (\operatorname{int} G'(S) \cap G(N)),$$

$$P_0 = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n = 0\right\},$$

$$P_1 = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n = 1\right\},$$

$$P = \operatorname{int} \Delta(N) = P_1 \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+.$$

Пусть r – отображение из $\mathbb{R}^n \setminus P_0 \longrightarrow P_1$, заданное формулой

$$r(x_1,\dots,x_n) = \frac{(x_1,\dots,x_n)}{x_1+\dots+x_n}.$$

Наложим еще одно требование на игру G:

4. $G(N) \cap \mathbb{R}^N_+$ – непустое компактное множество.

Требование 4 является стандартным при доказательстве теоремы Скарфа.

Лемма 1. *Если для игры G выполнены условия 1–4, то:*

1) *$F(S)$ – непустые открытые множества для всех $S \subset N$;*

2) *$r(F(S))$ – непустые открытые подмножества гиперплоскости P_1;*

3) *отображение r, ограниченное на ядро игры G, задает гомеоморфизм*

$$r : C(G) \longrightarrow P \setminus ((\bigcup_{S \subset N} r(F(S))) \cap P).$$

Доказательство леммы элементарно.

Вышеизложенная конструкция использовалась в [20]. Наша лемма 1 обобщает лемму 3.1 из этой статьи. Пусть

$$\Delta(S) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+ | x_1+\ldots+x_n = 1,\ x_j = 0,\ j \in N \setminus S\right\}.$$

Положим $\Pi = \prod_{s \in N} \Delta(S)$. Проекцию элемента $\pi \in \Pi$ на множитель $\Delta(S)$ будем обозначать через $\pi(S)$ или π_s в зависимости от удобства.

Определение 3. Пусть $\pi \in \Pi$. Семейство коалиций $(S_1,\ldots,S_m)$ называется π-сбалансированным, если $\pi_N \in \mathrm{co}(\pi_{S_1},\ldots,\pi_{S_m})$, где co – операция взятия выпуклой оболочки.

Лемма 2. *Для $\pi \in \Pi$ определим покрытие $\left\{\pi^*_S\right\}_{S \subset N}$ пространства $P_o \setminus \{0\}$ следующим образом:*

$$\pi^*_s = \left\{x \in P_o | (x, \pi_s - \pi_N) < 0\right\}.$$

Тогда семейство коалиций $(S_1,\ldots,S_m)$ будет π-сбалансировано тогда и только тогда, когда

$$\pi^*(\sigma) = \bigcap_{i=1}^{m} \pi^*_{S_i} = \emptyset.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы двойственности для замкнутых конусов.

Определение 4. Пусть $\pi \in \Pi$. Игра G называется π-сбалансированной, если для любого π-сбалансированного семейства коалиций $(S_1,\ldots,S_m)$

$$\bigcap_{i=1}^{m} G'(S_i) \subset G(N).$$

Напомним, что для системы множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ ее нервом называется симплициальное множество, m-симплексами которого являются подмножества $\{i_0,\ldots,i_m\} \subset I$ такие, что

$$\bigcap_{k=0}^{m} A_{i_k} \neq \emptyset.$$

Операторы грани и вырождения задаются пропуском и повторением соответствующего индекса. Если множество I конечно, то будем понимать под нервом системы $\{A_i\}_{i\in I}$ его геометрическую реализацию как подпространства пространства $\Delta(I)$ и обозначать через $N(\{A_i\}_{i\in I})$ [22].

Определение 5. Нервом игры G назовем пространство

$$N(G) = N\Big(\{r(F(S)) \cap P\}_{S\subset N}\Big).$$

Свяжем теперь свойство игры быть π-сбалансированной с некоторыми свойствами его нерва. Пусть $\pi \in \Pi$, рассмотрим отображение $\rho_\pi\colon N(G) \longrightarrow \Delta(N)$, заданное следующим образом: ρ_π на вершине $S \in N$ принимает значение π_S, а на симплексы большей размерности ρ_π распространяется по линейности.

Предложение 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) игра G π-сбалансирована;

2) для любого π-сбалансированного семейства $(S_1,\dots,S_m)$

$$P \cap \Big[\bigcap_{i=1}^{m} r(F(S_i))\Big] = \varnothing;$$

3) $N(G) \subset N(\pi^*)$;

4) $\pi_N \notin \operatorname{Im} \rho_{\pi_N}$.

Доказательство свойства 3 опирается на лемму 2, остальные свойства легко следуют из определений. Приведем только схему доказательства: $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 2$.

Теорема 1 [19-21]. *Если игра G π-сбалансирована, то $C(G) \neq \varnothing$.*

Ограничимся наброском доказательства, опуская технические подробности. Для открытого покрытия $r(F(S)) \cap P$ множества $P\setminus r(C(G))$ рассмотрим подчиненное ему разбиение единицы. Оно порождает отображение $P\setminus r(C(G)) \longrightarrow N(G)$. Заключая $r(C(G))$ в шар B достаточного большого диаметра, имеем композицию

$$\alpha : \partial B \subset P\setminus r(C(G)) \longrightarrow N(G) \xrightarrow{\rho_\pi} \Delta(N).$$

Из π-сбалансированности G следует, что $\pi_N \in \operatorname{int} \Delta(N)$, а ρ_π можно рассматривать как отображение в $\Delta(N)\setminus\{\pi_N\}$. Легко показывается, что α индуцирует изоморфизм в когомологиях. С другой стороны, α

пропускается через $P \setminus r(C(G))$ и, следовательно, $P \setminus r(C(G))$ должно иметь нетривиальные когомологии в размерности $n-2$. Таким образом, $C(G) \neq \emptyset$.

Следующая теорема частично обращает теорему Скарфа.

Теорема 2. *Пусть G такова, что $F(S)$ – выпуклые множества. Тогда если $C(G) \neq \emptyset$, то для любого $\pi_N \in P$ существует $\pi \in \Pi$ такой, что $\pi(N) = \pi_N$, и игра G π-сбалансирована.*

Докажем теорему для $\pi_N = \delta_N$, где $\delta_N = ({}^1/n, \ldots, {}^1/n)$. Из выпуклости $F(S)$ следует выпуклость $r(F(S)) \cap P$. Если $x \in r(C(G))$, то для $S \subset N$ можно подобрать $\pi_S(x) \in \Delta(S)$ такой, что для всех $y \in r(F(S)) \cap P$ имеем $(y-x, \pi_S(x)-\delta_N) < 0$. Тогда легко видеть, что $N(G) = N(\{r(F(S)) \cap P-x\}) \subseteq N(\pi^*)$, что и требовалось. Если $0 < \pi_N \neq \delta_N$, то новые π_S' легко получить из построенных π_S по формуле

$$\pi_S' = \frac{D(\pi_N)\cdot\pi_S}{(\pi_N, \pi_S)},$$

где $D(\pi_N)$ – диагональная матрица с лентами π_N^i по диагонали.

Следствие [19]. *Если $G(N)$ имеет вид*

$$G(N) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (x, \pi_N) \leqslant c\},$$

где $\pi_N > 0$, $c > 0$, а $G(S)$ выпуклые, то $C(G) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\pi \in \Pi$ игра G π-сбалансирована и при этом $\pi(N)_- = \pi_N$.

Пример игры с выпуклыми $G(S)$, $S \subseteq N$, непустым ядром, но не π-сбалансированной для любого $\pi \in \Pi$ приведен в [19]. Таким образом, ядра игр с выпуклыми $F(S)$ с гомотопической точки зрения устроены наиболее просто, что лишний раз подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если $F(S)$ выпуклы, то имеет место формула*

$$H_i(C(G)) \simeq H^{n-2-i}(N(G)).$$

Доказательство. На самом деле имеет место еще более сильный факт: пространства $N(G)$ и $C(G)$ двойственны друг другу в смысле Спеньера – Уайтхеда [23]. Это следует из того, что $P \setminus r(C(G))$ покрыто стягиваемыми множествами, любые пересечения которых стягиваемы и, таким образом, имеется гомотопическая эквивалентность

$$P \setminus r(C(G)) \sim N(G).$$

Следствие. *$H_0(C(G)) \simeq H^{n-2}(N(G))$. Таким образом, количество компонент связности ядра игры равно рангу группы $H^{n-2}(N(G))$.*

Этот последний изоморфизм допускает следующее описание. В доказательстве теоремы построено многозначное отображение $\lambda : C(G) \longrightarrow \Pi$, $\lambda(x)_S = \pi_S(x)$, $\lambda(x)_N = \theta_N$. Сопоставляя $\pi \in \Pi$ отображение ρ_π, в композиции имеем многозначное отображение из $C(G)$ во множество отображений из $N(G)$ в $\Delta(T)\setminus\theta_N$.

Теорема 4. *Гомотопический класс $\rho_{\lambda(x)} \in [N(G), \Delta(N)\setminus\theta_N]$ зависит только от компоненты связности $C(G)$, которой принадлежит x. В частности, если G π-сбалансирована, то существует точка $x \in C(G)$ такая, что $\rho_{\lambda(x)}$ и ρ_π гомотопны, и все такие точки образуют компоненту связности $C(G)$.*

Для игр, в которых $F(S)$ не выпуклы, теоремы 3,4 могут не выполняться, но в этом случае удается построить аналог вышеизложенной теории. Ограниченный объем статьи не позволяет нам, однако, сделать это здесь. Укажем только, что вместо теоремы 3, например, можно утверждать существование спектральной последовательности

$$H^p(N(G), H^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(F \setminus r(C(G))) \simeq H_{n-2-p-q}(C(G)),$$

где $H^q(F)$ - система коэффициентов на $N(G)$, сопоставляющая симплексу $(S_1,\dots,S_m)$ из $N(G)$ группу $H^q\left(\bigcap_{i=1}^{m} r(F(S_i))\cap P\right)$. В частности, в вышеупомянутом примере Биллера непустота ядра обеспечивается нетривиальностью группы $H^1(N(G), H^0(F))$.

§ 4. Об одной общей схеме построения вектора Шепли

Изложим достаточно общую схему построения вектора Шепли, основанную на подходящем представлении кооперативных игр в виде интегралов так называемых простейших функций. Возможности такой схемы для конечных игр были продемонстрированы, по существу, еще в первоначальной работе Л.Шепли [24] в 1953 году. Однако впоследствии наибольшее распространение получили другие подходы, в том числе вероятностные и асимптотические (см., например, фундаментальную монографию Р.Аумана и Л.Шепли [25]). Исключение составляют сравнительно небольшое число работ (в том числе [26-29]), демонстрирующих перспективность использования упоминавшегося интегрального представления как в проблематике самого вектора Шепли, так и для описания внутреннего строения ядер кооперативных игр в терминах аналогов этого вектора. В частности, для случая, когда все игроки одинаково значимы и составляют счетное множество, вопросы существования и единственности вектора Шепли с достаточной полнотой были исследованы в работе [29]. Ниже излагается попытка применения первоначальной схемы Шепли в более общей ситуации, включающей и континуальный случай. Отметим, что близкие в целом ряде отношений конструкции использовались ранее в работах В.А.Васильева [26,30], посвященных играм на метрических компактах.

1. Напомним, что вектор Шепли для конечных кооперативных игр представляет из себя некоторую меру Φv, которая ставится в соответствие функции $v:2^I \longrightarrow \mathbb{R}$, определенной на семействе всех подмножеств конечного множества I. В теории игр элементы множества I называются игроками, подмножества $s \subset I$ - коалициями игроков, а величина $v(s)$ трактуется как гарантированный выигрыш коалиции s. Мера Φv, сопоставляемая функции v, определяет справедливое распределение выигрышей между участниками самой большой коалиции I. Представление о справедливости формализуется в виде аксиом линейности, симметрии и эффективности, которым должно удовлетворять отображение $v \longrightarrow \Phi v$ (необходимые подробности см., например, в [25,31]).

Проиллюстрируем предлагаемую схему построения вектора Шепли на примере конечных игр.

Пусть $I = \{1,\dots,n\}$ – конечное множество игроков; v – функция, заданная на Ω – множестве всех подмножеств игроков ($v(\varnothing) = 0$). Пусть $s \in \Omega$ – некоторая коалиция. Через Ω_s будем обозначать множество всех подмножеств коалиции s. Определим на Ω меру $\nu=\nu_v$, полагая $\nu(\Omega_s) = v(s)$, а затем продолжая ее на все Ω. Легко видеть, что алгебра, порожденная множествами Ω_s, содержит все элементы Ω. Тогда, очевидно,

$$v(s) = \int_\Omega v_t(s)\nu(dt), \tag{2.1}$$

где

$$v_t(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \subseteq s, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Действительно, при фиксированном s функция v_t равна единице на всех подмножествах $t \subseteq s$ и нулю в противном случае, поэтому $\nu(\Omega_s) = v(s)$. Равенство (2.1) есть не что иное, как представление характеристической функции в виде линейной комбинации простейших характеристических функций, полученное Шепли [24]. Теперь, если сопоставим каждой простейшей функции v_t меру Φ_t на I, то, пользуясь аксиомой линейности, сможем сопоставить и любой характеристической функции v меру Φv на I, полагая

$$\Phi v(s) = \int_\Omega \Phi_t(s)\nu(dt). \tag{2.2}$$

Формула (2.2) представляет меру Φv в виде линейной комбинации мер Φ_t. Шепли считал, что все игроки равнозначны, и поэтому из аксиом симметрии и эффективности следовало, что функции v_t сопоставляется равномерно распределенная вероятностная мера на t. Если с самого начала на I задана некоторая вероятностная мера μ, то функции v_t естественно сопоставить относительную меру, определяемую равенством

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} \mu(s \cap t)/\mu(t), & \text{если } s \cap t \neq \varnothing,\ \mu(t) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

И в этом случае формула (2.2) определит некоторую меру Φ_v.

Изложенный метод построения меры Φ_v по существу не отличается от предложенного Шепли, однако акцент здесь перенесен на вопрос о продолжении меры ν с подмножества вида Ω_s на все подмножества множества Ω. Когда на Ω мера ν уже задана, формула (2.2) становится очевидной, в то время как Шепли дает явное представление, что требует некоторых комбинаторных подсчетов. Далее только что предложенная схема построения дележа Шепли будет распространяться на бесконечный случай.

2. Пусть X - носитель некоторой вероятностной меры μ, заданной на σ-алгебре борелевских множеств отрезка $[0,1]$. Обозначим через Ω топологическое пространство классов борелевских μ-эквивалентных подмножеств множества X. Топология на Ω определяется метрикой $\rho(s,t) = \mu(s\Delta t)$, где $s,t \in \Omega$, а $\mu(s\Delta t)$ - мера симметрической разности элементов s и t. (Более точно, $\mu(s\Delta t)$ полагается равной $\mu(\bar{s}\Delta\bar{t})$, где $\bar{s}$ и $\bar{t}$ - соответственно представители классов s и t. Очевидно, что величина $\mu(s\Delta t)$ определена, т.е. не зависит от множеств $\bar{s}$ и $\bar{t}$.) На множестве Ω можно задать частичный порядок следующим образом: $s \leqslant t$ тогда и только тогда, когда найдутся такие представители $\bar{s}$ и $\bar{t}$, что $\bar{s} \subseteq \bar{t}$. Через $s + t$ будем обозначать класс, представителем которого является множество $\bar{s} \cup \bar{t}$, а через $s \cdot t$ - класс, представителем которого является множество $\bar{s} \cap \bar{t}$.

Пусть v - вещественнозначная функция, заданная на Ω. Везде далее будем считать, что $v(\emptyset) = 0$, где $\emptyset$ - пустое множество. Кроме того, будем считать, что функция v непрерывна сверху относительно частичного порядка на Ω, т.е. если $s_n \longrightarrow s$, $s_{n+1} \leqslant s_n$, то $v(s_n) \longrightarrow v(s)$.

Определение 1. Пара (Ω,v) называется кооперативной игрой, а функция v - характеристической функцией этой игры.

Положим $\Omega_s = \{(t|t \leqslant s,\ t \in \Omega\}$, $s \in \Omega$. Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра, которая порождается всеми подмножествами пространства Ω вида Ω_s, $s \in \Omega$. Любой элемент $a \in \mathcal{A}$ определяет индикаторную функцию

$$\chi_a(s) = \begin{cases} 1, & s \in a, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 1. *Для любого элемента $a \in \mathcal{A}$, $a \neq \emptyset$, его индикаторная функция χ_a единственным образом представляется в виде*

$$\chi_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\Omega_{s_i}}, \quad s_i \neq \emptyset, \tag{2.3}$$

где n – натуральное число, зависящее от элемента $a \in \mathcal{A}$, $s_i \in \Omega$, s_i попарно различны, $\{\alpha_i\}_1^n$ – набор целых чисел, отличных от нуля.

В силу предложения 1 на алгебре $\mathcal{A}$ можно задать, вообще говоря, конечно-аддитивную меру $\nu = \nu_v$, полагая

$$\nu_v(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v(s_i), \tag{2.4}$$

где s_i – элементы правой части формулы (2.3).

Положим

$$\|v\| = \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu_v(a_i)|, \tag{2.5}$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам $\{a_i\}_1^n$ попарно-непересекающихся элементов алгебры $\mathcal{A}$, т.е. $\|v\|$ – полная вариация меры $\nu=\nu_v$. Обозначим через $\mathbf{M}$ множество функций v, для которых $\|v\| < \infty$.

Предложение 2. *Пространство $\mathbf{M}$ является полным нормированным пространством с нормой, определенной равенством* (2.5). *Оно изоморфно пространству $ba(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{R})$ ограниченных вещественнозначных конечно-аддитивных функций множества, заданных на $\mathcal{A}$.*

Обозначим через $\mathbf{M}_c$ множество всех характеристических функций v из $\mathbf{M}$, порождающих счетно-аддитивные меры $\nu=\nu_v$ на $\mathcal{A}$ (ν_v определяется в соответствии с формулой (2.4)). Всюду в дальнейшем рассматриваются лишь функции $v \in \mathbf{M}_c$.

Теорема 1. *Каждая характеристическая функция $v \in \mathbf{M}_c$ однозначно определяет некоторую счетно-аддитивную меру $\bar{\nu} = \bar{\nu}_v$ на σ-алгебре $\bar{\mathcal{A}}$, порожденной алгеброй $\mathcal{A}$. Эта мера является продолжением меры ν_v, определенной на $\mathcal{A}$ в соответствии с формулой* (2.4).

3. Перейдем к непосредственному построению вектора Шепли для характеристических функций $v \in \mathbf{M}_c$ при некоторых дополнительных предположениях измеримости. Эти предположения не являются необходимыми и нужны лишь для того, чтобы более выпукло обрисовать саму схему построения, не обременяя ее громоздкими конструкциями.

Пусть

$$v_t(s) = \begin{cases} 1, \text{ если } s \geqslant t, \quad s,t \in \Omega, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 2. Отображение Φ подмножества $M_0 \subseteq M$ на пространство счетно-аддитивных мер, заданных на σ-алгебре борелевских подмножеств X, называется отображением Шепли, если

1) $\Phi v(X) = v(X)$;

2) $\Phi v_t(s) = \mu(s \cdot t)/\mu(t)$;

3) $\Phi v = \Phi v_1 + \Phi v_2$ для всех $v = v_1 + v_2$, $v_1, v_2 \in M_0$;

4) если при каждом $s \in \Omega$ имеет место равенство

$$v(s) = \int_\Omega v_t(s)\bar{v}(dt),$$

где $\bar{v} = \bar{v}_0$ – мера, определяемая функцией v на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, то

$$\Phi_v = \int_\Omega \Phi v_t \bar{v}(dt). \qquad (2.6)$$

Вторая часть равенства (2.6), определяющего вектор Шепли игры $v \in M_0$, представляет собой интеграл в смысле Бохнера.

Обозначим через $ca(X,B,\mathbb{R})$ пространство вещественнозначных счетно-аддитивных мер на σ-алгебре B борелевских множеств пространства X, наделенное нормой полной вариации ($\|m\| = m^+(X) + m^-(X)$, $m \in ca(X,B,\mathbb{R})$).

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 2. *Если мера μ такова, что функция $\|\Phi v_t - \Phi v_{t_1}\|$ измерима по t при любом $t_1 \in \Omega$, то существует единственное отображение*

$$\Phi : M_0 \longrightarrow ca(X,B,\mathbb{R}),$$

удовлетворяющее условиям 1)–4) определения 2.

Доказательства приведенных результатов содержатся в [32].

ГЛАВА 3. МОДЕЛИ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Оптимальные контракты найма и аренды

В данном параграфе обсуждаются имеющиеся в литературе подходы к моделированию взаимодействия руководителя (он же собственник) и исполнителей работ (подчиненные). При этом основное внимание акцентируется на ситуациях, связанных с делегированием прав по принятию решений от руководителя к исполнителю. В экономической практике известно много форм подобных отношений. В одном только сельском хозяйстве существовали барщина, издольщина, оброк и т.д. В чем причина этого разнообразия форм и можно ли дать рациональное объяснение господству одной из них над другими, опираясь только на технологические и информационные особенности данной сферы человеческой деятельности,оставляя при этом в стороне идеологические и прочие побочные факторы (что, по-видимому, оправдано ввиду длительности исторических периодов такого господства). Значение этого теоретического вопроса для практики, и прежде всего для практики внутрифирменных отношений и для реформирования государственного сектора экономики, достаточно очевидно.

В нашей стране в рамках этой проблематики выполнено большое количество работ, посвященных "выбору наилучшего критерия стимулирования". К сожалению, лишь немногие из них изложены на строгом математическом языке, где содержательные выводы доказываются, а не обосновываются ссылками на сомнительные эмпирические данные. В зарубежной литературе соответствующий раздел экономической теории возник и стал развиваться с середины 70-х годов и получил название principal-agent problem (проблема руководителя и подчиненного).

1. В качестве базовой модели рассматривается игра двух лиц в

условиях неполной информации. Полезный результат деятельности фирмы (предприятия) связан с действиями работника $a \in A$ и случайным параметром t некоторой производственной функцией

$$q = q(a,t)$$

при известном (и зависящем от $a \in A$) $\mu_a(t)$ распределении случайной величины (на множестве $T \subset \mathbb{R}$). Проблема состоит в дележе "дохода" между участниками игры: "собственником" и "работником".

Контрактом $x(q)$ называется функция, связывающая оплату работника x с конечным результатом деятельности q.

Интересы работника определяются с помощью целевой функции $u(a,x)$, зависящей от его действий (усилий) и оплаты. При этом работник выбирает свои действия так, чтобы максимизировать среднее значение этой функции, т.е. решает задачу

$$V(a,x) \longrightarrow \max, \; a \in A, \tag{3.1}$$

$$V(a,x) = \int_T u(a,x(q(a,t))d\mu_a(t).$$

Предположение о свободе выбора вида деятельности (т.е. возможность перейти на другое место при неудовлетворительных условиях оплаты труда) выражается соотношением

$$V(a^*,x) \geqslant \bar{V}, \tag{3.2}$$

где a^* - решение задачи (3.1), а $\bar{V}$ - некоторый барьер (так называемая "резервная цена рабочей силы"). Величина $\bar{V}$ может иметь разные интерпретации (например, прожиточный или "равновесный" минимум). В рамках рассматриваемой модели она считается заданной априори.

Действия работника как таковые ($a \in A$) начальником не наблюдаемы, он способен контролировать только конечный результат - "доход" q. Именно поэтому "контракт" $x(.)$, заключаемый между работником и руководителем, зависит только от параметра q, но не от a. Цели руководителя состоят в максимизации ожидаемого дохода, т.е. разницы между общим доходом фирмы и оплатой труда работника - $x(q)$. При этом начальник выбирает наиболее выгодную для него форму оплаты труда - контракт $x(.)$ - из числа допустимых контрактов $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ - это, вообще говоря, подмножество пространства всех действительных одномерных функций, включающее в себя различные социальные ограничения на форму контрактов (здесь мы будем предполагать, что $\mathfrak{X}$ совпадает со всем пространством). Выбирая контракт, начальник ожидает от работника индивидуально-рационального поведения (при условии сохранения контракта), т.е. начальник решает следующую задачу максимизации:

$$\int_T q(a^*,t) - x(q(a^*,t)d\mu_{a^*} \longrightarrow \max, \; x \in \mathfrak{X}, \qquad (3.3)$$

при условии, что a^* есть решение задачи (3.3) и выполняется ограничение (3.2).

Оптимальные решения задачи (3.1) - (3.3) и будут решением игры, т.е. решение - это пара (x^*,a^*), удовлетворяющая (3.1) - (3.3).

Отметим, что изложенный здесь принцип решения несколько отличается по смыслу как от решений по Нэшу (равновесия), так и от принципа максимина. В самом деле, здесь первый участник действует по Нэшу, а второй - начальник - ориентируется не на текущее поведение партнера (как в решении Нэша) или наихудший вариант (как в максимине), а на детальное знание целей работника. Это предположение достаточно реалистично, если полагать, что "хозяин" выбирает типичный контракт для типичного работника. С такой трактовкой хорошо согласуется и статичность модели, и усреднение выигрыша. Специфика данной игры состоит в компромиссе между задачей стимулирования работника и задачей его страхования начальником. Начальник, со своей стороны, безразличен к риску, что отражает его возможности использования кредита или наличие у него многих подобных предприятий.

2. Приведем некоторые известные результаты. Как уже отмечалось выше, при исследовании моделей данного типа нас интересовали, прежде всего, условия оптимальности контрактов вида

$$x(q) = q - r, \quad q \in \mathbb{R},$$

где $r \in \mathbb{R}$ - некоторая константа (рента). Точнее, нас интересовали условия, при которых каждый оптимальный контракт можно представить в данном виде (хотя бы и локально). В дальнейшем контракты $x(.)$, имеющие такое представление, будем называть контрактами арендного типа. Принятое название мотивируется тем, что в таких контрактах полная ответственность за результаты труда (т.е. весь риск) ложится на работника. В этом смысле на противоположном полюсе возможностей находится контракт "твердой оплаты", где вся ответственность возлагается на начальника. Такие контракты имеют вид

$$x(q) = r, \ q \in \mathbb{R},$$

где $r \in \mathbb{R}$ – некоторая постоянная величина, означающая постоянную оплату. Между этими крайностями находятся контракты "с разделением ответственности".

К настоящему времени изложенный выше подход развит достаточно хорошо, но не полностью. Вопросы, связанные с существованием решения, здесь не главные, они имеют удовлетворительное решение в рамках традиционной математико-экономической техники. Более интересны исследования, выявляющие различные специфические характеристики оптимальных контрактов, которые реализуются при тех или иных условиях на модель и, значит, при различных обстоятельствах экономической практики. Такие характеристики интересны и сами по себе, и как возможность сузить класс допустимых контрактов без ущерба для их эффективности, что помогает при их практической реализации. (Пример из экономической практики США: между налоговым ведомством и одной из крупнейших телефонных компаний был заключен "оптимальный долгосрочный контракт" на 10 лет, который состоял в снижении тарифных ставок на телефонные разговоры на 3% в год.) В частности, исследовались такие свойства решений, как монотонность функции $x(.)$, минимальность или избыточность оплаты (т.е. когда имеет место $V(a^*,x^*) > V$), возникновение потерь для начальника в сравнении со случаем полной информации.

О случае полной информации нужно сказать подробнее. Задачу (3.1) – (3.3) можно переформулировать таким образом:

$$\int_T \Big[q(a^*,t) - x(q(a^*,t))\Big] d\mu_{a^*}(t) \longrightarrow \max, \ x \in \mathfrak{X}, \ a^* \in A, \qquad (3.4)$$

при условии (3.2) и

$$V(a^*,x) \geqslant V(a,x), \qquad a \in A. \qquad (3.5)$$

Теперь, если начальник детально "знает" производственную функцию $q(a,t)$ и может контролировать действия работника $a \in A$, то он может отбросить ограничение (3.5), заключая с работником контракт, непосредственно связывающий его действия (а не их результат – это главное) с оплатой $x(a)$. А именно, он непосредственно указывает "оптимальное" действие $\bar{a} \in A$, оплачивая его так, чтобы сохранялось условие (3.2), и сильно дестимулируя все другие действия (так, чтобы условие (3.2) было нарушено при $a \neq \bar{a}$). Решение указанного типа мы и называем решением при полной информации (в литературе first best solution, которое сравнивается с second best solution).

В работе Гроссмана и Харта [33], обобщающей определенный цикл исследований, рассматривался случай, когда множество возможных результатов деятельности конечно: $q_1,\dots,q_n$, а целевая функция работника представляется в виде

$$U(a,x) = G(a) + K(a) \cdot V(x), \quad a \in A, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $G(\cdot)$, $K(\cdot)$ – некоторые положительные функции, отражающие привлекательность вида деятельности для работника, а $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывная, строго возрастающая, вогнутая функция, которая определяет эффект денежного стимулирования. При некоторых дополнительных технических предположениях в работе Гроссмана и Харта были найдены условия отсутствия потерь для начальника (по сравнению со случаем полной информации). Потери отсутствуют, если выполнено одно из следующих предположений.

1) Функция $V(\cdot)$ линейна (что можно интерпретировать как безразличие работника к риску; это позволяет заключить арендный контракт).

2) Имеется такое действие $\bar{a} \in A$, что:

а) $\bar{a}$ максимизирует суммарный доход $q(a)$ на множестве A;

б) $\bar{a}$ максимизирует полезность $u(a,x)$ на A.

Другими словами, найдется наиболее выгодное действие $\bar{a}$, которое одновременно является и самым приятным для работника.

3) Вид производственной функции позволяет однозначно восстановить действие $a \in A$ по результату $q(a,t)$ (более строгую формулировку можно найти в [33]), что позволяет начальнику поступать аналогично случаю с полной информацией.

Гроссман и Харт показывают также, что условия 1) – 3) образуют, в некотором смысле, полный список возможных ситуаций отсутствия потерь для начальника. Во всех других случаях потери неизбежны. Скажем об этом подробнее. Пусть функция V строго вогнута (т.е. нарушено условие 1)) и предположения 2) – 3) также не выполняются. Тогда, если неопределенность сильно существенна (это означает, что при любом $a \in A$ вероятность каждого из исходов $q_1,\dots,q_n$ ненулевая), а также при некоторых дополнительных технических предположениях (не обременительных с содержательной точки зрения), потери для начальника неизбежны (подробнее см. [33]). Таким образом, потери от неполноты информации обязательно возникают, причем тем большие, чем выше неопределенность.

По-видимому, наличие потерь для руководителя влечет и неоптимальность арендных контрактов. Во всяком случае, так должно быть в ситуациях, когда в результате такой игры работник достигает минимума полезности $V(a^*,x^*) = \bar{V}$. Отметим также, что последнее можно гарантировать только при аддитивной или мультипликативной сепарабельности функции полезности работника (т.е. в случаях, когда $U(a,x) = G(a) + V(x)$ или $U(a,x) = K(a) \cdot V(x)$).

Неэффективность арендных контрактов при строгой вогнутости целевой функции работника по доходу (это означает неприятие им риска) легко интерпретируется. Действительно, это условие означает, что работник предпочитает быть гарантированным от "черных дней" даже ценой более низкой средней оплаты. Объективно возникающий при этом контракт с неполной ответственностью работника за результаты деятельности приводит к "недостимулированию" и потерям эффективности. Более того, оптимальный контракт может быть не только не арендного типа, но и не монотонным по доходу q. Другими словами, возможна ситуация, когда более высоким результатам труда может соответствовать меньшая оплата, т.е. существуют такие $q_1 < q_2$, что $x^*(q_1) > x^*(q_2)$. В [33] показывается, что эта неестественность исключается только при довольно жестких ограничениях на вид производственной функции $q(\cdot)$, имеющих смысл ее выпуклости и возрастания по $a \in A$ при переходе от одного действия к другому, более "тяжелому".

3. Приведем некоторые соображения, касающиеся арендных контрактов в более широкой ситуации, ибо исследованная Гроссманом и

Хартом и их предшественниками модель имеет довольно специальный вид. Нас будут интересовать прежде всего вопросы, связанные с оптимальностью арендных контрактов. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1. *Если случайные факторы не существенны (т.е. $q : A \longrightarrow \mathbb{R}$), то найдется такая рента $r \in \mathbb{R}$, что отвечающий ей арендный контракт $x(\cdot) = q(\cdot) - r$ оптимален (при этом возможны другие оптимальные контракты).*

Обратное утверждение менее тривиально и устанавливается только локально и при дополнительных технических предположениях. Смысл его в том, что любой оптимальный контракт совпадает с арендным (с точностью до величины высшего порядка малости) во всех точках, существенных для игры.

Утверждение 2. *Пусть функции $q(\cdot)$, $u(\cdot)$ вогнуты и дифференцируемы, а множество допустимых контрактов $\mathfrak{X}$ - совокупность всех вогнутых, дифференцируемых функций и случайные факторы не играют роли. Тогда любой оптимальный контракт $x(\cdot)$ локально совпадает с арендным с точностью до вторых производных, т.е. при некотором $r \in \mathbb{R}$*

$$x(q(a)) = q(a) - r + O(\|a - a^*\|^2), \quad a \in A.$$

Доказательство этого утверждения в более точной формулировке содержится в следующем параграфе (где, кроме того, исследуется многопродуктовая модель).

Утверждение 3. *Пусть случайные факторы не играют роли и (x^*, a^*) - некоторый оптимальный контракт. Тогда будет оптимален и любой другой допустимый контракт $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию*

$$x(q^*) - x^*(q^*), \quad x(q) \leq x^*(q), \quad q \in \mathbb{R}, \quad q^* = q(a^*).$$

Это утверждение почти очевидно и показывает, что в детерминированном случае, при отсутствии ограничений на $\mathfrak{X}$, среди оптимальных контрактов всегда имеется "точечный" контракт, т.е. контракт вида

$$\tilde{x}(q^*) = \text{const}, \quad \tilde{x}(q) = 0, \quad q \neq q^*.$$

Из содержательных соображений понятно, что ситуация, когда действия работника однозначно восстанавливаются по результату, близка к случаю отсутствия неопределенности. При наличии неопределености число (или доля) оптимальных контрактов, вообще говоря, уменьшается. Однако при безразличии работника к риску в их число входят арендные контракты.

Утверждение 4. *Если целевая функция $u(\cdot,\cdot)$ линейна по доходам (безразличие к риску), то существует оптимальный арендный контракт.*

Можно отметить, что условие линейности полезностей по доходам, означающее, что участников интересуют только средние величины, по своим проявлениям аналогично детерминированной ситуации. В частности, в обоих случаях мотивы страхования (работника) не играют существенной роли, а поэтому и существует оптимальный арендный контракт. Боле того, утверждение 2 будет также истинно, если фразу "случайные факторы не играют роли" заменить на "функция полезности линейна по доходам". Этот факт можно проследить в доказательствах следующего параграфа (нужно лишь знак интеграла внести в аргумент функции полезности).

Из изложенного выше видно, что вопрос об оптимальности арендных контрактов решается неоднозначно. Ответ еще более усложняется при переходе к более общим моделям, включающим новые факторы. Рассмотрим два таких фактора.

Во-первых, будем предполагать, что результат производственной деятельности зависит не только от действий работника $a_1 \in A_2$, но и от действий начальника $a_2 \in A_2$. Производственная функция при этом примет вид

$$q = q(a_1, a_2, t), \quad a_1 \in A_2,\ a_2 \in A_2.$$

Таким образом, возникает частичная симметрия позиций игроков, теперь контракт должен стимулировать обоих. Соответственно, в рассмотрение вводится и целевая функция начальника

$$v = v(a_2, z), \quad a_2 \in A_2, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z + x = q\ ,$$

Другой новый фактор, на этот раз уменьшающий симметрию, - это различие в уровне информированности агентов. Вводить этот фактор в модель можно разными способами. Например, можно предполагать наличие еще одного неопределенного параметра $s \in S$, распределение которого известно только одному из агентов – работнику:

$$u = u(a_1, x, s).$$

Ожидаемые результаты в рамках общей модели формулируются ниже как гипотетические. (Возможно, что формулировки требуют уточнения и коррекции; здесь мы задавались целью указать только на принципиальные положения.)

Утверждение 5. *Пусть фактор неопределенности $t \in T$ сильно существен, а также существенно влияние действий обоих игроков: производственная функция дифференцируема и при этом*

$$\frac{dq(a_1, a_2, t)}{da_1} \neq 0, \qquad \frac{dq(a_1, a_2, t)}{da_2} \neq 0.$$

Тогда среди оптимальных контрактов нет контрактов с полной ответственностью.

Из этого факта следует, что при вогнутости и гладкости всех фигурирующих в задаче функций потери начальника неизбежны.

Нам представляется также справедливым утверждение о влиянии несимметрии относительно фактора неопределенности: игрок, обладающий большей информацией, должен нести долю ответственности за результаты.

Утверждение 6. *Пусть производственная функция и функция полезности работника независимы от действий начальника, а фактор неопределенности известен только работнику. Тогда существует оптимальный арендный контракт (даже при нелинейности по доходам работника), и при этом любой оптимальный контракт совпадает с арендным локально.*

Поясним некоторое недоразумение, возникшее при обсуждении этих вопросов на Школе. Выводы об оптимальности арендных контрактов пытались интерпретировать как эффективность того, что называется арендой в хозяйственной практике, в том числе как эффективность по сравнению с полной собственностью работника на все предприятие. Это вызвало естественное недоумение. На самом деле "арендный контракт" нужно интерпретировать как контракт с полной ответственностью. Если же по социально-политическим или иным причинам передача собственности работнику невозможна и в число возможных действий работника не входят операции с капиталом (продажа собственности, ее наращивание и т.д.), то тогда, действительно, обсуждаемые результаты можно трактовать как оптимальность аренды среди дозволенных решений. В том же случае, когда в множество допустимых действий работника входят операции с капиталом, модельную аренду следует интерпретировать как покупку работником предприятия.

Вопрос о том, при каких условиях следует принять всю ответственность за результаты производства одной из сторон, а при каких - разделить ответственность (и в какой форме), далек от полного разрешения.

§ 2. О форме оптимальных контрактов в многопродуктовой задаче руководителя и подчиненного

В данном параграфе формулируется простейшая (и в то же время вполне оригинальная и достаточно общая) многопродуктовая модель взаимодействия начальника и работников. Ниже будет показано, что в выпуклой постановке и при безразличии работника к риску любое оптимальное для начальника решение второго ранга (second best solution) есть контракт с полной ответственностью работника, т.е. контракт арендного типа (локально).

В дальнейшем предполагается, что экономическим агентом может быть лицо, являющееся как производителем благ, так и их потребителем (условно называемое производителем или работником), либо это участник особого рода - "руководитель", он же собственник всех материальных ресурсов. Помимо обычных видов продуктов существует особый "продукт" с номером 0, условно называемый "усердие" (или "добросовестность", "талантливость", "предприимчивость" и т.д.). За агентом-производителем руководитель закрепляет производственное множество (рабочее место)

$$Y_i \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}, \quad i \in N,$$

где l - число материальных продуктов, а последняя координата соответствует "усердию" i-го агента, $N = \{1,\dots n\}$ - номера производителей. Каждый производитель является одновременно и потребителем, а поэтому характеризуется собственным потребительским множеством

$$X_i \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}, \qquad i \in N,$$

и определенной на его окрестности функцией полезности

$$u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad i \in N.$$

Агент-руководитель также является потребителем, но в отличие от производителя может потреблять только материальные блага (а не "усердие" производителя), что отражено в области определения его характеристики. Потребительское множество руководителя представляет собой неотрицательный ортант $X_o = \mathbb{R}^l_+$ в пространстве $\mathbb{R}^l$, на котором определена его функция полезности $u_o : X_o \longrightarrow R$.

Руководитель строит свои взаимоотношения с агентами-производителями с помощью "налогов", т.е. отчислений в его пользу части произведенных благ, которые могут быть выражены как в денежной,так и в натуральной форме, а также и в "промежуточных видах". Слово "налоги" здесь берется в кавычки, ибо это могут быть и не налоги в обычном смысле слова, в частности,допустим и административно-командный вариант жесткого регулирования деятельности. В экономике имеется $k + n$, $1 \leqslant k \leqslant l$, изолированных рынков, или групп соизмеримых продуктов (благ или разновидностей "труда"), которые могут обмениваться внутри каждой из групп, но не между ними. При этом как бы возникают k типов валют (условно), имеющих хождение на этих рынках. На содержательном уровне предположим, что "усердие" отдельного производителя не может быть объектом непосредственного обмена (и оценки), т.е. в данной терминологии является изолированным рынком (таким образом, имеется всего k-материальных и n-рынков "усердия"). Производители определяют размеры своего "усердия" непосредственно, в соответствии с вознаграждением и собственными предпочтениями. На уровне руководителя может быть и меньшее число рынков, однако при этом всегда боле широкий "рынок" начальника полностью объемлет некоторые рынки подчиненного (т.е. "рынки" агента-производителя - это более мелкое дробление на группы благ "рынков" начальника). Возможно, слово "рынок" не совсем удачное и вместо него следовало бы использовать термины типа "группа близких видов продукции, формирующих показатель экономической деятельности" и ему подобные (например, валовой показатель производства зерновых культур в сельском хозяйстве). Для нас здесь важен только тот факт, что для производителя продукты, входящие в одну группу, могут обмениваться между собой (в соответствующих пропорциях). В этом смысле слово "рынок" объемлет все многообразие возможных вариантов (в том числе и натуральное налогообложение - "оброк"). В дальнейшем для простоты будем считать, что рынки начальника и подчиненных совпадают.

Итак, для каждого материального рынка $M \subset L$ есть своя фиксированная внутренняя цена, которая полагается нормированной, т.е.

$$\sum_{j \in M} p_j^m = 1, \quad p_j^m \geqslant 0, \quad j \in M, \qquad 1 \leqslant m \leqslant k.$$

Будем считать, что продукты упорядочены таким образом, что

$$M^1 = \{1,\dots,m\}, \quad M^2=\{m_1+1,\dots,m_2\},\dots, \quad M^k=\{m_{k-1}+1,\dots,m_k\}$$

и этому разбиению отвечает вектор "цен" p, составленный из "внутренних рыночных" цен p^m:

$$p = (p^{m_1},\dots,p^{m_k},1),$$

где последняя компонента отвечает "изолированному рынку - усердию" агентов-производителей. Цена p определяет линейный оператор, заданный матрицей вида

$$L^p = \begin{bmatrix} \boxed{p^{m_1}} & & & 0 & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{p^{m_k}} & & \\ & 0 & & \boxed{1} & \end{bmatrix}$$

который, действуя на результат производственной деятельности $y_t \in Y_t$, дает совокупность стоимостных оценок

$$L^p y_t = \left(\langle p^{m_1}, y_t^{m_1}\rangle,\dots,\langle p^{m_k}, y_t^{m_k}\rangle,\ y_t^{(l+1)}\right)$$

данного производственного плана.

"Доходы" производителя на каждом из материальных рынков облагаются начальником "налогом". (Напомним, что это может быть и натуральное налогообложение в случае рынка, состоящего только из одного продукта.) Однако "усердие", как это ясно из содержательных соображений, налогом не облагается. Формально это означает, что задан оператор

$$F_i = (f_1, \dots, f_k, 1) : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

(где f_t, $t = \overline{1,k}$, – одномерные функции), который сопоставляет стоимостным оценкам $\mathbb{L}^P y_i$ плана y_i то, что остается у производителя после взимания налога, т.е.

$$F\mathbb{L}^P y_i = \left[f_1(\langle p^{m_1}, y_i^{m_1}\rangle), \dots, f_k(\langle p^{m_k}, y_i^{m_k}\rangle, \; y_i^{(l+1)}\right].$$

При этом взимаемый в пользу руководителя налог составит величину

$$\mathbb{L}^P y_i - F\mathbb{L}^P y_i.$$

Функции f_t, $t = \overline{1,k}$, выбираются из класса всех вогнутых, неубывающих одномерных функций $\mathcal{F}$. Таким образом, $(\mathcal{F})^k$ – множество всех допустимых стратегий руководителя (при контактах с одним производителем). Если взаимоотношения начальник – работник определены и фиксированы, то при планах работников y_i, $i \in N$, руководитель получит доход в стоимостных оценках

$$Dy = \sum_N (\mathbb{L}^P y_i - F_i \mathbb{L}^P y_i), \quad y = (y_1, \dots, y_n). \tag{3.6}$$

Цели руководителя состоят в том, чтобы получить максимум собственной полезности путем манипуляции налогами, но так, чтобы подчиненный мог существовать, т.е. не разрывал контракт и не уходил на другое место работы. Формально условие сохранения контракта агентом-производителем будет следующим: существует $x_i \in X_i$ такой, что

$$\mathbb{L}^P x_i \leqslant F\mathbb{L}^P y_i, \quad i \in N. \tag{3.7}$$

При этом производитель максимизирует собственную полезность на всех доступных для него наборах потребления, определяемых соотношением (3.7), т.е. решая экстремальную задачу, достигает полезности

$$u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in B_i} u_i(x_i), \tag{3.8}$$

$$B_i = \left\{x_i \in X_i \mid \exists\, y_i : IPx_i \leqslant FIPy_i\right\}.$$

В свою очередь, начальник при фиксированном налогообложении получит

$$u_o(\bar{x}_o) = \max_{x \in B_o} u_o(x),$$

$$B_o = \left\{x \in \mathbb{R}^l_+ \mid IP(x,0) \leqslant D\bar{y}\right\}, \quad \bar{y} = (\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n). \tag{3.9}$$

Здесь вектор $(x,0)$ – это формальное вложение элемента l-мерного пространства x в $l+1$-мерное путем добавления нуля по последней координате (отвечающей "усердию" агентов).

Определение 1. Состояние экономики $(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n,\bar{x}_o,F_1,\ldots,F_n)$, где $\bar{z}_i = (\bar{x}_i,\bar{y}_i)$, $F_i = (f^i_1,\ldots,f^i_n)$ удовлетворяют соотношениям (3.8)-(3.9), называется F-равновесием.

Нужно подчеркнуть один принципиальный момент. Производственные планы $\bar{y}_i$ определяются агентами-производителями (при фиксированных налогах F), а затем уже "руководитель" определяет объем собственного потребления. Смысл F-равновесий в том, что только такие состояния экономики и могут быть реализованы в действительности. Конечно, руководителя будут интересовать те F-равновесия, которые дают ему наибольшую полезность.

Определение 2. F-равновесие $(\bar{z},\bar{x}_o,\bar{F})$ называется оптимальным, если

$$u_0(\bar{x}_0) \geqslant U_0(x'_0)$$

для всех прочих F-равновесий (z',x'_0,F').

Основной интерес в данной проблематике представляет структура оптимальных F-равновесий, а точнее, функций налогообложения, при которых они реализуются.

В дальнейшем будем предполагать, что:

А1. Для всех произвсдителей $i \in N$

а) $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ – выпуклые замкнутые множества и при этом

$$X_i + \mathbb{R}_+^{l+1} \subset X_i, \quad Y_i + \mathbb{R}_-^{l+1} \subset Y_i;$$

б) функции полезности $u_i \colon X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ квазивогнуты, строго монотонно возрастают по конусу $\mathbb{R}_+^{l+1}$, и, кроме того, удовлетворяют условию "постоянства на границе"

$$u_i(x') = u_i(x''), \quad x', x'' \in \operatorname{gr} X_i.$$

А2. Функция полезности руководителя $u_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ квазивогнута и строго монотонно возрастает по конусу $\mathbb{R}_+^l$.

А3. Класс $\mathcal{F}$-допустимых "остатков от налога" – совокупность всех вогнутых, монотонно неубывающих одномерных функций.

Можно заметить, что последнее предположение соответствует принятому в экономической практике принципу прогрессивного налогообложения (при этом "остаток от налога" должен быть вогнутой функцией).

Для анализа свойств F-равновесий совершенно не важно число производителей. Поэтому далее всегда будем считать, без ограничения общности, что имеется только один агент-производитель.

Утверждение 1. *Состояние $(\bar{z}, \bar{x}_0, F)$ будет F-равновесием тогда и только тогда, когда найдется набор положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ такой, что вектор*

$$p_\lambda = (\lambda_1 \cdot p^{m_1}, \dots, \lambda_k p^{m_k}, \lambda_{k+1})$$

опорен к множеству

$$V_1(\bar{x}_1) = \left\{ x \in X_1 \,|\, u_1(x) \geqslant u_1(\bar{x}_1) \right\}, \quad \bar{z} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

в точке $\bar{x}_1$, а вектор $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$ опорен в точке $FLP\bar{y}_1 = LP\bar{x}_1 = \bar{a}$ к множеству

$$FLPY_1 = \left\{ c \in \mathbb{R}^{k+1} \,|\, c = FLPy, \ y \in Y_1 \right\}.$$

Другими словами, должно быть

$$\langle p_\lambda, V_1(\bar{x}_1)\rangle \geqslant \langle p_\lambda, \bar{x}_1\rangle,$$

$$\langle \Lambda, FL^PY_1\rangle \leqslant \Lambda, FL^P\bar{y}_1\rangle.$$

Утверждение 2. *Если $(\bar{z}, x_0, F)$ - оптимальное F-равновесие, где $\bar{z} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, то точка $\bar{x}_1$ принадлежит границе потребительского множества X_1.*

Ниже формулируется результат, характеризующий класс оптимальных налогов.

Теорема. *Пусть $(\bar{z}, \bar{x}_0, F)$ - оптимальное F-равновесие и $a = FL^P\bar{y}_1 = L^P\bar{x}_1$, где $\bar{z} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, а $D(\bar{y}_1) = L_1^P\bar{y} - \bar{a}$ - соответствующий этому равновесию доход руководителя. Тогда, если функция полезности производителя u_1 дифференцируема в точке $\bar{x}_1$, найдется такой вектор*

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 1) \gg 0,$$

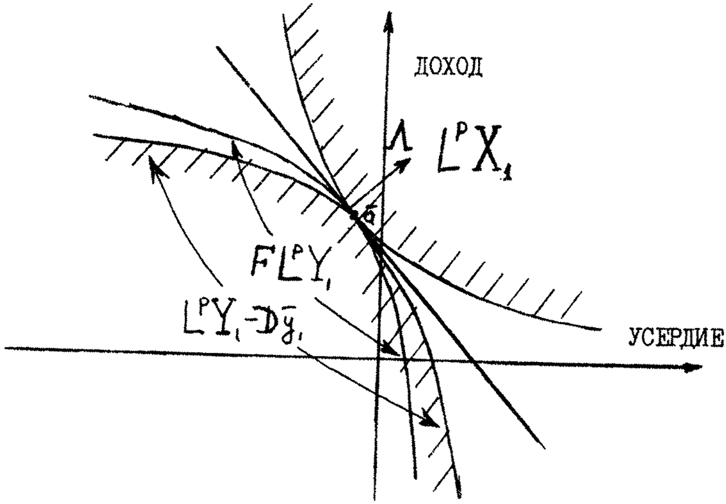
что

$$\langle \Lambda, FL^PY_1\rangle \leqslant \langle \Lambda, \bar{a}\rangle,$$

$$\langle \Lambda, L^PX_1\rangle \geqslant \langle \Lambda, \bar{a}\rangle,$$

$$\langle \Lambda, L^PY_1 - D(\bar{y}_1)\rangle \leqslant \langle \Lambda, \bar{a}\rangle.$$

С математической точки зрения результат этой теоремы показывает, что множество допустимых результатов деятельности производителя FL^PY_1, определенное в пространстве стоимостных оценок с помощью "остатков от налогов" $F = (f_1, \ldots, f_k)$, и множество $L^PY_1 - D(\bar{y}_1)$, полученное в результате сдвига - фиксированного налогооблажения $D(\bar{y}_1)$ - находятся в одном полупространстве. Это полупространство определяется гиперплоскостью, опорной к "потребительскому" множеству L^PX_1 в точке $a = L^P\bar{x}_1$. При этом эта точка соответствует стоимостным оценкам оптимального производственного плана $\bar{y}$ и реализуема при фиксированных налогах. Геометрически имеет место ситуация:



Интерпретировать результат этой теоремы можно следующим образом. При условии гладкости границы множества Y_1 и функций остатка от налогов F дифференциал "оптимальных налогов" должен обратиться в ноль. Другими словами, локально, с точностью до величины малости более высокого порядка, оптимальная система налогообложения должна совпадать с фиксированными налогами. Последнее же можно понимать как контракты с полной ответственностью работника за результат, т.е. контракты типа аренды. Кроме того, ясно, что в негладкой постановке любое отклонение от постоянного налогообложения разве лишь уменьшает доход начальника, так как свобода выбора ограничивается требованием достижимости контракта, т.е. условием сохранения работника.

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ДОСТИЖИМЫЕ СОСТОЯНИЯ

§ 1. Магистральные теоремы: случай неаддитивной во времени функции полезности

Магистральные теоремы, учитывающие потребление в явном виде, доказываются в предположении аддитивности во времени функции полезности. Последнее означает, что функция полезности имеет вид

$$u(c_0,c_1,\ldots,c_T) = \sum_{t=0}^{T} U_t(c_t),$$

где t - индекс года, T - длина планового периода, U_t - функция полезности в году t, c_t - вектор потребления в году t.

В литературе известно не много попыток ослабить предположение об аддитивности. Л.Мак-Кензи в своем обзоре [34] в этой связи указывает лишь работы П.Самуэльсона [35] и К.Иваи [36], опубликованные в начале 70-х годов. Так, К.Иваи изучал асимптотику оптимальных траекторий в неоклассической однопродуктовой модели на бесконечном временном интервале с функцией полезности, допускающей представление

$$u(c_0,c_1,c_2,\ldots) = v(c_0,u(c_1,c_2,\ldots)) = \\ = v(c_0,v(c_1,u(c_2,\ldots))) = \ldots$$

для некоторой функции $v : R^2 \longrightarrow R$.

Ниже мы докажем магистральные теоремы в слабой и сильной форме для многопродуктовых моделей с неаддитивными во времени функциями полезности. Если теорема в слабой форме справедлива при произвольных вогнутых функциях полезности, то для доказательства теоремы в сильной форме от функции $u(c_0,c_1,\ldots,c_T)$ требуется следующее: степень зависимости предельных полезностей продуктов в году t от наборов продуктов в другом году τ падает с экспоненциальной скоростью с возрастанием $|t - \tau|$.

Примем следующие обозначения. Пусть $x \in R^n$. Через $\|x\|$ будем обозначать евклидову норму этого вектора.

Пусть P - матрица размерности $n \times n$. Через $\|P\|$ будем обозначать $\max\{\|Px\| \mid \|x\| = 1\}$.

Пусть $F : R^n \to R$ - дважды дифференцируемая функция. Через $\partial F/\partial x(x)$ будем обозначать вектор $(\partial F/\partial x_1(x),\ldots,\partial F/\partial x_n(x))$, а через $\partial^2 F/\partial x^2(x)$ - матрицу размерности $n \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца находится число $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j(x)$.

Пусть $H : R^{2n} \to R$ - дифференцируемая функция. Через $\partial H/\partial x(z)$, $\partial H/\partial y(z)$ будем обозначать соответственно векторы $(\partial H/\partial x_1(z),\ldots,\partial H/\partial x_n(z))$, $(\partial H/\partial y_1(z),\ldots,\partial H/\partial y_n(z))$, где $x,y \in R^n$, $z = (x,y)$.

1. Магистральные теоремы в сильной форме утверждают, что оптимальные траектории могут существенно отличаться друг от друга лишь в точках, близких к одному из концов планового периода. Теоремы же в слабой форме не дают информации о распределении точек, в которых две оптимальные траектории существенно отличаются друг от друга. Утверждается только, что число таких точек конечно и не зависит от длины планового периода. В этом пункте сформулируем теорему в слабой форме, согласно которой сходимость оптимальных траекторий имеет место при произвольных вогнутых функциях полезности, неаддитивных во времени. Для простоты изложения результата будем явно предполагать существование допустимых траекторий, осуществляющих переход с одной оптимальной траектории на другую.

Рассматриваемая модель задается:

1) последовательностью $(\Omega_t)_{t=1}^{T}$, где $\Omega_t \subseteq R_+^{2n}$ - технологическое множество в году t, n - число продуктов в модели, а T - длина планового периода;

2) функцией полезности $u(c)$, $c \in R^{(T+1)n}$.

Последовательность $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^{T}$ называется допустимой, если она удовлетворяет следующим ограничениям:

$$(x_t, y_t) \in \Omega_t, \quad t = 1,2,\ldots,T, \tag{4.1}$$

$$y_t \geqslant x_{t+1} + c_t, \quad t = 0,1,\ldots,T, \tag{4.2}$$

$$c_t \geqslant 0, \quad t = 0,1,\ldots,T.$$

Допустимая траектория $(y_t^*, x_{t+1}^*, c_t^*)_{t=0}^T$ называется оптимальной, если $u(c^*) \geqslant u(c)$ для всех допустимых траекторий $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^T$ таких, что $y_0 = y_0^*$.

Пусть модель удовлетворяет свойствам:

a) Ω_t – выпуклый компакт, $t = 1, \ldots, T$;

b) существует функция $\sigma : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ такая, что имеют место следующие два свойства:

b1) из того, что $(x,y), (x', y') \in \Omega_t$, $\|y-y'\| \geqslant \varepsilon$, следует, что $(2^{-1}(x+x') - \omega,\ 2^{-1}(y+y')) \in \Omega_t$ для всякого вектора $\omega \geqslant 0$, $\|\omega\| \leqslant \sigma(\varepsilon)$;

b2) из того, что $(x,y) \in \Omega_t$, $(x', y') \in \Omega_t$, $\|x-x'\| \geqslant \varepsilon$, следует, что $(2^{-1}(x+x'),\ 2^{-1}(y+y') + \omega) \in \Omega_t$ для всякого вектора $\omega \geqslant 0$, $\|\omega\| \leqslant \sigma(\varepsilon)$;

c) $u(c)$ – вогнутая дифференцируемая функция на $R_+^{(T+1)n}$, причем $\partial u/\partial c(c) \geqslant 0$ для всех c;

d) существуют $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такие, что $\delta_1 \leqslant \|\partial u/\partial c_t(c)\| \leqslant \delta_2$ для всех $c \in R_+^{(t+1)n}$, $t = 0, 1, \ldots, T$.

Положим $Y = \max\limits_t \max\limits_{y \in \mathrm{Pr}_2 \Omega_t} \|y\|$.

Теорема 1. *Пусть* $(y'_t, x'_{t+1}, c'_t)_{t=0}^T$, $(y''_t, x''_{t+1}, c''_t)_{t=0}^T$ *– две оптимальные траектории,* $\|y'_0\|, \|y''_0\| \leqslant Y$. *Пусть* $(\hat{y}_t, \hat{x}_{t+1}, \hat{c}_t)_{t=0}^T$, $(\check{y}_t, \check{x}_{t+1}, \check{c}_t)_{t=0}^T$ *– две допустимые траектории такие, что* $\hat{y}_0 = y'_0$, $\hat{y}_t - \hat{x}_{t+1} - \hat{c}_t > 0$ *для всех* $t = 0, 1, \ldots, T$, $\check{y}_0 = y''_0$, $(\check{y}_t, \check{x}_{t+1}, \check{c}_t) = (y'_t, x'_{t+1}, c'_t)$ *для* $t \in \{t_0, t_0+1, \ldots, T\}$, *где* $t_0 \in \{0, 1, \ldots, T\}$ *– некоторое число. Тогда число точек, в которых* $\|(y''_t - y'_t, x''_t - x'_t)\| \geqslant \varepsilon$, *не превосходит числа* $\sqrt{2}\,(nt_0 Y\delta_2 - p'_0(y'_0 - y''_0))(\delta_1 \sigma(\varepsilon))^{-1}$, *где* p'_0 *– множитель Лагранжа, соответствующий траектории* $(y'_t, x'_{t+1}, c'_t)_{t=0}^T$ *и относящийся к ограничению* (4.2) *при* $t = 0$.

2. Исследуемая здесь модель и по записи, и отчасти по предположениям заметно отличается от модели, рассмотренной в предыду-

щем пункте. Поэтому изложение в предыдущем и настоящем пунктах независимы.

Ограничения модели имеют вид:

$$F_t(x_t, y_t) \leqslant 0, \quad t = 1,2,\dots,T; \tag{4.3}$$

$$y_t \geqslant x_{t+1} + c_t, \quad t = 0,2,\dots,T; \tag{4.4}$$

$$y_t, x_t, c_t \geqslant 0.$$

"Полезность" допустимой траектории $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^T$ измеряется с помощью функции $u(c)=u(c_0, c_1, \dots, c_T)$.

Траектория $(y_t^*, x_{t+1}^*, c_t^*)_{t=1}^T$ называется оптимальной, если $u(c^*) \geqslant u(c)$ для всех допустимых траекторий $(y_t, x_{t+1}, c_t)_{t=0}^T$ таких, что $y_0 \leqslant y_0^*$, $x_T \geqslant x_T^*$. Здесь $c = (c_0, c_1, \dots, c_T)$.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$$z_t = (x_t, y_t), \quad z(t_1, t_2) = (z_{t_1}, z_{t_1+1}, \dots, z_{t_2}).$$

Предположение 1. *Существуют выпуклый компакт* $A \subseteq R_+^n$ *и числа* $\mathcal{E}_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ *такие, что*

1a) *функции* $F_t(x,y)$ *дифференцируемы на* $A \times A$;

1b) *функции* $F_t(x,y)$ *равномерно выпуклы на* $A \times A$ *в том смысле, что*

$$F_t(2^{-1}(z' + z'')) \leqslant 2^{-1}F_t(z') + 2^{-1}F_t(z'') - \varepsilon_1 \|z' - z''\|^2$$

для всех $z', z'' \in A \times A$;

1c) $\partial F_t/\partial y(z) \geqslant 0$, $\|\partial F_t/\partial y(z)\| \leqslant \delta_1$ *для всех* $z \in A \times A$.

Предположение 2. *Существуют выпуклый компакт* $B \subseteq R_+^n$ *и числа* $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, $q \in [0,1]$ *такие, что*

2a) *функция* $u(c)$ *дважды непрерывно дифференцируема и вогнута на* $B^{T+1} = B \times B \times \dots \times B$;

2b) $\|\partial^2 u/\partial c_t \partial c_\tau(c)\| \leqslant \delta_2 q^{|t-\tau|}$, $c \in B^{T+1}$, $t, \tau = 0,1,\dots,T$;

2c) $\partial u/\partial c_t(c) \geqslant 0$, $\|\partial u/\partial c_t(c)\| \geqslant \varepsilon_2$, $c \in B^{T+1}$,

$t = 0,1,\ldots,T$ [1].

Теорема 2. *Пусть* $(y'_t, x'_{t+1}, c')_{t=0}^T$, $(y''_t, x''_{t+1}, c''_t)_{t=0}^T$ *– две оптимальные траектории, лежащие в* $A\times A\times B$, *причем* $c'_t > 0$, $c''_t > 0$ *для всех* $t = 0,1,\ldots,T$. *Обозначим*

$$(\bar{y}_t, \bar{x}_{t+1}, \bar{c}_t)_{t=0}^T = (y'_t - y''_t,\ x'_{t+1} - x''_{t+1},\ c'_t - c''_t)_{t=0}^T,$$

$$\bar{z}_t = z'_t - z''_t,\quad \bar{z}(t_1,t_2) = z'(t_1,t_2) - z''(t_1,t_2).$$

Тогда существует целое положительное число L, *зависящее лишь от* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2, q$ *и такое, что справедлива оценка*

$$\|\bar{z}(sL + 1,\ T-sL)\| \leqslant (\delta_1\delta_2(\varepsilon_1\varepsilon_2(1-q))^{-1} + 1) \times (\|\bar{y}_0\| + \|\bar{x}_{T+1}\|)$$

для всех $s = 0,1,2,\ldots$ *таких, что* $sL+1 < T - sL$.

Доказательство этой теоремы приведено в [37].

Согласно теореме 2 оптимальные траектории сходятся друг к другу внутри планового периода с экспоненциальной скоростью. Такого рода сходимость в динамических равновесных моделях с аддитивными во времени функциями полезности изучал Т.Бьюли [38].

§ 2. Динамические модели экономики с дискретными новшествами

В параграфе анализируется динамическая модель экономики с дискретными новшествами, предложенная В.Л.Макаровым в работе [39]. В этой работе применен новый подход в моделировании НТП, выражающийся в появлении и использовании новых производственных способов (новшеств). В модели новшество представляет собой пару, состоящую из технологии и связанного с ней вида фондов. У новшеств в динамических моделях экономики есть существенное свойство, которое состоит в дискретности и скачкообразности. Новшество либо есть, либо его нет, но для его появления необходимы перво-

---

[1] Здесь и ниже через $\partial^2 u/\partial c_\tau \partial c_t(c)$ обозначается матрица размерности $n\times n$, состоящая из элементов $\partial^2 u/\partial c_\tau^i \partial c_t^j(c)$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

начальные затраты дискретного характера.

1. Дадим более подробное описание изучаемой модели. Рассмотрим однопродуктовую экономику, имеющую дело с двумя производственными факторами: трудом L и фондами K. Время считается дискретным, а количество труда постоянным и равным единице.

Технологией называется пара (f,v), где f – производственная функция от двух переменных K,L, а число $v \in [0,1)$. Имея в момент времени t фонды K и трудовые ресурсы L, экономика, используя технологию (f,v), в течение единичного интервала времени создает продукт в количестве $f(K,L)$. При этом к моменту $t+1$ экономика будет иметь в своем распоряжении использовавшиеся ею старые фонды в количестве $v \cdot K$. Конечное потребление обозначается, как обычно, буквой C. Объектом изучения в подобного рода экономиках являются траектории их развития. Траектория развития есть последовательность (K_t, C_t), $t=0,1,\ldots$, где $K_t \geqslant 0$ – стоимость фондов, $C_t \geqslant 0$ – конечное потребление,

$$K_{t+1} \geqslant vK_t; \; K_{t+1} - vK_t + C_{t+1} \leqslant f(K_t, L_t);$$

$$L_t \in [0,1], \quad t = 0,1,\ldots$$

Здесь L_t – количество трудовых ресурсов, используемое в момент t.

Процесс внедрения новшества в жизнь представляет собой последовательность стадий. Например, это может быть НИР, опытный образец, эксперимент, промышленная серия или нечто в этом роде. На каждой стадии тратятся какие-то ресурсы и в конечном счете результатом является выпуск готовой продукции или применение новой технологии.

Рассмотрим, как задается новшество в однопродуктовой экономике, использующей технологию (f,v). Пусть в момент времени t экономика располагает фондами в количестве K_t и использует трудовые ресурсы в количестве L_t. Обозначим затраты на создание новшества через s. Будем считать, что они относятся к одному году. Пусть затраты s делаются в году t. Тогда к началу следующего года у нас появятся новая технология (g,u) и новые фонды в количестве K^g.

Следовательно, новшество задается информацией $(S, K^g, (g,u))$. Заметим, что необходимым условием для осуществления затрат s

является неравенство $f(K_t, L_t) \geqslant s$.

Начиная с момента $t+1$, у нас стало две технологии (f, v), (g, u) и появилась необходимость различать старые и новые фонды, вызванная тем, что в производственном процессе, основанном на новой прогрессивной технологии (g, u), нельзя использовать старый вид фондов, а в производственном процессе, основанном на технологии (f, v), невозможно использовать новый вид фондов, качественно отличающийся от старого.

Заметим, что внедряемое новшество состоит из технологии (g, u) и связанного с ней вида фондов.

Для момента времени $\tau \geqslant t+1$ через K^f_τ будем обозначать старые фонды, а через K^g_τ – новые. Труд и конечное потребление также приходится различать. Труд и потребление, связанные со старыми фондами, обозначаются через L^f_τ, C^f_τ, а с новыми – L^g_τ, C^g_τ. Так как для внедрения новшества к моменту $t+1$ потребовались затраты s, сделанные в году t, то состояние экономики в момент $t+1$ удовлетворяет соотношениям:

$$K^f_{t+1} \geqslant vK_t; \quad K^f_{t+1} - vK_t + C^f_{t+1} + s \leqslant f(K_t, L_t);$$

$$K^g_{t+1} = K^g_t \quad C^g_{t+1} = 0; \quad L^f_{t+1} + L^g_{t+1} \leqslant 1.$$

Состояние экономики в момент $\tau > t+1$ удовлетворяет соотношениям:

$$K^f_\tau \geqslant K^f_{\tau-1}; \quad K^g_\tau \geqslant uK^g_{\tau-1};$$

$$K^f_\tau - vK^f_{\tau-1} + C^f_\tau \leqslant f(K^f_{\tau-1}, L^f_{\tau-1});$$

$$K^g_\tau - uK^g_{\tau-1} + C^g_\tau \leqslant g(K^g_{\tau-1}, L^g_{\tau-1}); \quad L^f_\tau + L^g_\tau \leqslant 1.$$

Кроме того, все переменные неотрицательны по своему смыслу.

Теперь нетрудно представить себе общую ситуацию, когда имеется много новшеств. Пусть $I = \{0, 1, \dots \}$, $\{(f^t, v^t) \mid t \in I\}$ – множество всех технологий, которые могут быть использованы в производственном процессе. С каждой технологией связываются соответствующий ей вид фондов, труд и потребление, которые помечаются тем же номером, что и сама технология.

В момент времени $t \in I$ состояние экономики задается в следующем виде: $(I_c^t, I_H^t, (K_t^i, C_t^i)(i \in I_c^t))$, где I_c^t - конечное множество номеров технологий (новшеств), внедренных к моменту t, $K_t^i, C_t^i \geqslant 0$ - фонды и потребление вида i, имеющиеся в момент t, а I_H^t - множество номеров тех новшеств, которые в принципе имеются, но не внедрены (новшеств, которые существуют лишь в виде описания своего "идейного" содержания, некой программы внедрения в жизнь).

Для ввода в действие новшества необходимы первоначальные затраты тех видов фондов, которые соответствуют уже внедренным новшествам. Считаем, что в момент t нам известна следующая информация:

$$(K^i), \; (s^{ij}) \; (i \in I_H^t, \quad j \in I_H^t \cup I_c^t),$$

где $s^{ij} \geqslant 0$ - затраты фондов вида j, необходимые для ввода в действие новшества i, $K^i > 0$ - исходное количество фондов вида i, которое получается в начальный момент использования новшества i. В момент $t+1$ экономика может перейти в состояние

$$I_c^{t+1}; I_H^{t+1}; \; (K_{t+1}^i, C_{t+1}^i) \; (i \in I_c^{t+1}),$$

для которого $I_C^t \subset I_c^{t+1}$; множество $E_t = I_c^{t+1} \setminus I_c^t$ содержится в множестве, состоящем из всех $i \in I_H^t$ таких, что новшенство i можно внедрить, затратив лишь фонды с номерами из I_c^t; существует распределение трудовых ресурсов

$$L_t^i \geqslant 0 \quad , i \in I_c^t,$$

такое, что

$$\sum_{i \in I_c^t} L_t^i \leqslant 1; \quad K_{t+1}^i = K^i; \quad C_{t+1}^i = 0 \quad (i \in E_t); \; K_{t+1}^j \geqslant v^j K_t^j;$$

$$K_{t+1}^j - v^j K_t^j + C_{t+1}^j + \sum_{i \in E} s^{ij} \leqslant f^j(K_t^j, L_t^j) \qquad (j \in I_c^t).$$

Заметим, что в рассматриваемой модели на потребление и затраты для внедрения новшеств идет вновь произведенный продукт.

Известно, что при неизменной во времени технологии темп роста экономики в конечном счете сравнивается с темпом роста невоспроизводимых ресурсов. Остановим свое внимание на результатах, которые дают условия на бесконечное множество технологий модели, позволяющие строить траектории с неограниченно растущим потреблением, и условия на технологии модели, обеспечивающие существование траекторий, потребление на которых имеет темп роста, больший единицы, а также на теоремах, утверждающих, что для любой траектории модели либо найдется другая траектория, выходящая из того же начального состояния, которая будет существенно лучше ее, либо на данной траектории происходит перелив трудовых ресурсов из менее прогрессивных производств в более прогрессивные. Наряду с этим будет рассмотрена модификация динамической модели с дискретными новшествами, в которой каждое новшество можно внедрить несколькими способами за счет выбора различных вариантов затрачиваемых ресурсов. Здесь возникает задача выбора наиболее рационального варианта нововведений, сроков начала и способов их внедрения с точки зрения обеспечения максимально возможных темпов роста потребления.

2. Приведем некоторые предварительные сведения. Через R^l_+ обозначим конус элементов арифметического пространства R^l, имеющих неотрицательные координаты. В дальнейшем все рассматриваемые технологии (f,v) предполагаются такими, что $f:R^2_+ \longrightarrow R_+$ – непрерывная суперлинейная (супераддитивная, положительно однородная) функция, $f(0,1) = f(1,0) = 0$, $f(x,1) < f(\lambda x,1) < \lambda f(x,1)$ $(\lambda > 1,\ x > 0)$; существует $X \in R_+$, при котором $f(1,X) > 1-v$.

Пусть (f,v) – технология. Нетрудно видеть, что существует единственное число $x(f,v) > 0$ такое, что $f(x(f,v),1) = (1-v)x(f,v)$.

Для $x_0 > 0$ неравенство $f(x_0,1) > (1-v)x_0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_0 < x(f,v)$, последовательность $x_t = vx_{t-1} + f(x_{t-1},1)$, $t = 1,2,\ldots$, сходится к $x(f,v)$ при $t \longrightarrow \infty$. Понятно, что $x(f,v)$ – характеристика технологии, оценивающая ее производственные возможности.

Пусть $X = (K_t,C_t), t \in I$, – траектория модели. Положим

$$w(X) = \overline{\lim_{T\to\infty}}\ T^{-1} \sum_{t=0}^{T-1} C_t .$$

Положим, далее,

$$w(f,v) = \sup \{w(X) : X \text{ - траектория модели}\}.$$

Понятно, что $w(f,v)$ - характеристика технологии, оценивающая ее возможности относительно потребления.

3. Исследуем условия существования траекторий с потреблением, стремящимся к бесконечности. Рассмотрим динамическую модель экономики с дискретными новшествами такую, что при любом $p \in I\setminus\{0\}$ для внедрения новшества с номером p необходимы лишь затраты фондов, чьи номера меньше p. Математически это записывается в следующем виде:

$$s^{ij} = 0, \quad i,j \in I,\ j \geq i .$$

Считаем, что для каждой траектории модели в любой момент времени t выполняется $j{+}1 \in I_H^t$, где j - наибольший элемент I_c^t и имеет место неравенство

$$\sup_{p\in I} \left\{ \sum_{i\in I} \left[s^{pi} (x(f^i,v^i)(1-v^i))^{-1} \right] \right\} < 1 .$$

Это неравенство означает, что затраты фондов вида i, необходимые для внедрения новшества с номером $p > i$, должны быть невелики относительно характеристики $x(f^i,v^i)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{i\to\infty} w(f^i,v^i) = \infty$, $(I_c^0, I_H^0, (K_0^i, C_0^i),\ \ i \in I_c^0)$ *- начальное состояние экономики такое, что* $I_c^0 = \{0\}$, $K_0^0 > 0$. *Тогда существует траектория модели* $(I_c^t, I_H^t, (K_t^i, C_t^i),\ \ i \in I_c^t))$, $t \in I$, *для которой*

$$\sum_{i\in I_c^t} C_t^i \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty .$$

Отметим наличие результатов, показывающих, что в вопросе о существовании траекторий с потреблением, стремящимся к бесконечности, условие неограниченности множества $\{w(f^i,v^i) | i \in I\}$ в какой-то степени близко к необходимому.

4. Рассмотрим динамическую модель экономики с дискретными новшествами. Приведем условия на технологии модели, обеспечивающие существование траекторий с темпом роста, большим единицы, не зависящим от начального состояния экономики. Одно из этих условий требует, чтобы сами производственные функции имели темп роста, больший единицы, а другое – возможности внедрения известной, но еще не действующей технологии за время, зависящее от модели, но не от конкретной технологии.

Считаем, что $s^{ij} = 0 (i,j \in I,\ j \geqslant i)$, $K^i < x(f^i, v^i)$ $(i \in I)$; для каждой траектории модели в любой момент времени t выполняется $j + 1 \in I_H^t$, где j – наибольший элемент множества I_c^t. Считаем также, что $\inf\{K^i \mid i \in I\} > 0$.

Для $i \in I$ положим $\Gamma(i,0) = K^i$,

$$\Gamma(i,p+1) = v^i \Gamma(i,p) + f^i(\Gamma(i,p),1), \quad p \in I.$$

Будем говорить, что модель обладает свойством (А), если существуют числа $\alpha > 1$, $c > 0$, строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{i_p\}$, $p=1,2,\ldots$, такие, что

$$f^{i_p}(1,1) \geqslant c\alpha^{i_{p+1}}, \quad p = 1,2,\ldots$$

Свойство (А) дает нужную оценку скорости роста производственных функций.

Ограничимся рассмотрением частного случая модели, при котором для ввода в действие новшества с номером $i \geqslant 1$ достаточно затратить фонды с номером $i - 1$. Отметим, что результат, близкий к тому, который будет сейчас приведен, остается в силе и в общем случае.

Считаем, что модель обладает свойством (А) (с ней связываются числа $\alpha > 1$, $c > 0$, последовательность натуральных чисел $\{i_p\}$, о которых говорится в его формулировке) и следующим свойством:

(В) существуют натуральное число Q, число $l_0 > 0$ такие, что

$$\sup\left\{s^{(p+1)p}(f^p(\Gamma(p,Q-1),1))^{-1} \mid p \in I\right\} = l_0 < 1.$$

Свойство (В) означает, что если в данный момент времени у нас появилось новшество с номером p, то через Q единиц времени мы сможем внедрить новшество с номером $p+1$, причем для достижения этой цели во все промежуточные моменты времени фондам с номером p достаточно выделять трудовые ресурсы в количестве l_0. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $(I_c^0, I_H^0, (K_0^l, C_0^l), l \in I_c^0)$ *– начальное состояние экономики,* $K_0^l > 0$, $l \in I_c^0$. *Тогда существуют траектория модели*

$$(I_c^t, I_H^t, (K_t^l, C_t^l), l \in I_C^t) \quad (t \in I),$$

число $\lambda > 0$ *такие, что*

$$\sum_{l \in I_c^t} C_t^l \geqslant \lambda \alpha^{t/Q}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

5. Приводимый ниже результат естественно назвать теоремой о переливе трудовых ресурсов.

Рассмотрим модель экономической динамики с дискретными новшествами, технологии которой удовлетворяют следующим условиям:

$f^p(1,1) \xrightarrow[p\to\infty]{} \infty$; для любого $p \in I$ существует $l(p) > p+1$ такое, что при всех $l \in I$, $l \geqslant l(p)$ функция f^l мажорирует функцию f^p, $v^l \geqslant v^p$, $s^{lp} = 0$.

Существуют число $\Gamma > 0$, функция $\Phi : (1,\infty) \longrightarrow (1,\infty)$ такие, что

$$f^l(1, \lambda x) \geqslant \Phi(\lambda) f^l(1, x) (l \in I,\ 0 \leqslant x \leqslant \Gamma,\ \lambda > 1).$$

Второе условие означает, что если количество трудовых ресурсов мало по сравнению с фондами, то их увеличение дает существенный вклад в рост выпуска для любой технологии. Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $(I_c^t, I_H^t, (K_t^l, C_t^l), l \in I_c^t), t \in I$, *– траектория модели такая, что*

$$\sum_{l \in I_c^t} K_t^l \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty,$$

$((L_t^l), l \in I_c^t)$ $(t \in I)$ - связанная с этой траекторией последовательность распределений трудовых ресурсов. Тогда выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

(a) $\lim\limits_{T \to \infty} L_T^p = 0 (p \in I)$;

(b) *существует траектория модели*

$$(I_c^t, I_H^t, (\tilde{K}_t^l, \tilde{C}_t^l), l \in I_c^t) \ (t \in I)$$

такая, что $(\tilde{K}_o^l, \tilde{C}_o^l) = (K_o^l, C_o^l)(l \in I_c^o)$; *при* $t \in I$ *выполняются*

$$\sum_{l \in I_c^t} (\tilde{C}_t^l - C_t^l) \geqslant 0, \qquad \sum_{l \in I_c^t} (\tilde{K}_t^l - K_t^l) \geqslant 0,$$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \left[\inf \left\{ \sum_{l \in I_c^t} (\tilde{C}_t^l - C_t^l), \ \sum_{l \in I_c^t} (\tilde{K}_t^l - K_t^l) \right\}\right] = \infty.$$

6. В завершение этого параграфа коснемся вопроса оптимизации в динамических моделях экономики с дискретными новшествами. Отличие состоит в том, что каждое новшество можно внедрить несколькими способами, а для реализации какого-то из этих способов необходимо затратить в текущем году некоторое количество фондов одного вида. В результате этих затрат новшество будет введено в действие к началу следующего года.

Будем говорить, что внедрение новшества l возможно за счет фондов вида j $(l, j \in)I$, если для того, чтобы в момент $t+1$ новшество l было введено в действие, достаточно затратить s^{lj} единиц фондов вида j, произведенных посредством технологии с номером j, действующей в момент времени t.

Рассмотрим задачу наиболее рационального выбора последовательностей внедряемых новшеств, моментов ввода их в действие и способов их внедрения таких, что на получающихся траекториях развития потребление имеет наибольший темп роста.

Пусть $\mathfrak{A}$ - множество траекторий модели

$$(I_c^t, I_H^t, (K_t^l, C_t^l), l \in I_c^t) \ (t \in I)$$

таких, что $I_c^0 = \{0\}$, $K_0^0 = K^0$. При некоторых дополнительных предположениях относительно технологий модели доказывается существование строго возрастающей последовательности номеров новшеств $\{p_t\}$ $(t \in I)$ и строго возрастающей последовательности моментов времени $\{T_t\}$ $(t \in I)$, для которых выполняются следующие условия:

(1) $p_0 = 0$, $T_0 = 0$;

(2) для любой траектории $X \in \mathfrak{A}$ модели $(I_c^t, I_H^t, (K_t^t, C_t^t), t \in I_c^t)$ $(t \in I)$, любого $s \in \{1,2,\dots\}$ выполняется

$$\sup\{J \mid J \in I_c^{T_s}\} \leqslant p_s;$$

(3) множество $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$, состоящее лишь из тех траекторий развития, у которых новые технологии внедряются только в моменты времени T_t $(t \in I\setminus\{0\})$, причем в момент T_t внедряется лишь одно новшество с номером p_t за счет затрат фондов вида p_{t-1} $(t \in I\setminus\{0\})$, непусто;

(4) для любой траектории $X \in \mathfrak{A}$ найдется траектория $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{A}}$, потребление на которой мажорирует потребление на траектории X, умноженное на некоторую положительную константу, зависящую только лишь от модели, но не от рассматриваемых траекторий.

§ 3. Два типа парных обменов, сходящихся к оптимуму Парето

В жизни типична ситуация, когда участники экономики для улучшения своего состояния совершают обмены продуктами, не прибегая к оплате деньгами. Так бывает, когда существующая система ценообразования плохо отражает реальную ценность стандартных продуктов (металл, мясо) или принципиально не может оценить стоимость нестандартных продуктов, каковыми являются такие блага, как художественные коллекции, новые знания и технологии и т.д. Куплю-продажу товара по договорным ценам, значение которой сейчас повышается, тоже можно рассматривать как обмен денег на товар в пропорциях, зависящих от двух агентов, участвующих в этой сделке.

Каждый обмен-сделка совершается парой агентов. Мы считаем, что агенты предпочитают такие способы обмена, в которых достаточно просто и легко определяются пропорции обмена, выгодные для них обоих. Поэтому мы рассматриваем простейшие обмены, в которых участвуют два товара, а не больше. Если участников много, то они могут, поочередно встречаясь друг с другом, совершать в последовательные моменты времени $t = 1,2,\ldots$ взаимовыгодные парные сделки. Образуется монотонная, в смысле неубывания полезностей всех участников, последовательность результатов этих сделок. Спрашивается, будет ли она сходиться со временем (при $t \longrightarrow \infty$) к распределению продуктов между участниками, которое оптимально по Парето?

Рассмотрим этот вопрос для экономики чистого обмена

$$\mathcal{E} = \langle u_i(x_i), x_i^0,\ i \in N;\ L \rangle,$$

где $N = \{1,\ldots,n\}$ - множество агентов, $L = \{1,\ldots,l\}$ - множество товаров, n - число агентов, l - число товаров, участвующих в экономике; $u_i : \operatorname{int} R_+^l \longrightarrow R^1$ - функция полезности, $x_i^0 \in \operatorname{int} R_+^l$ - начальный запас продуктов агента $i \in N$, int означает внутренность множества.

Распределение продуктов $\bar{x}_i$, $i \in N$, называется допустимым, если $\bar{x}_i \in \operatorname{int} R_+^l$, $i \in N$, $\sum\limits_N \bar{x}_i = \sum\limits_N x_i^0$; и оптимальным по Парето, если нет другого допустимого распределения $\bar{\bar{x}}_i$, $i \in N$, которое для каждого агента i не хуже, чем $\bar{x}_i$, и хотя бы для одного участника строго лучше.

Мы рассматриваем два типа обменов. В первом предполагается, что для каждого момента времени $t = 1,2,\ldots$ переход от допустимого распределения x_i^{t-1}, $i \in N$, к допустимому распределению x_i^t, $i \in N$, происходит следующим образом. Некоторая пара i,j участников, обмениваясь парой продуктов k,h, совершает сдвиг из состояния x_i^{t-1}, x_j^{t-1} в плоскости продуктов k,h в направлении вектора $f \in \mathbb{R}^l$, $f = (f_1,\ldots,f_l)$, $f_r = 0$, $r \neq k,h$, который определяется из условия одинаково выгодного инфинитезимального прироста полезностей этих участников

$$du_i(f) = du_j(-f) > 0,$$

где дифференциалы

$$du_i(f) = \langle \Delta u_i(x_i^{t-1}), f\rangle, \quad du_j(-f) = \langle \Delta u_j(x_j^{t-1}), -f\rangle$$

есть главные линейные части приращений функций полезности

$$u_i(x_i^{t-1} + f) - u_i(x_i^{t-1}) = du_i(f) + O(f),$$

$$u_j(x_j^{t-1} - f) - u_j(x_j^{t-1}) = du_j(-f) + O(f).$$

Здесь $\langle a, c\rangle$ – скалярное произведение, $\Delta u_i(x_i) = (u'_{i1}(x_i), \ldots, u'_{il}(x_i))$, $u'_{ik}(x_i)$ – производная функции u_i по переменной x_{ik}, $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{il}) \in R^l$. При этом указанный выше сдвиг в направлении f совершается до тех пор, пока он выгоден обоим участникам. Максимально взаимовыгодный сдвиг в направлении f и принимается за итог обмена x_i^t, x_j^t между агентами i, j.

Второй тип парных сделок отличается от первого только способом взаимовыгодного обмена парой продуктов двумя агентами, участвующими в сделке. Здесь предполагается, что в каждый момент $t = 1, 2, \ldots$ агенты i, j, обмениваясь парой товаров k, h, считая при этом двухпродуктовое распределение $(x_{ik}^{t-1}, x_{ih}^{t-1})$, $(x_{jk}^{t-1}, x_{jh}^{t-1})$ начальным и фиксируя остальные товары в векторах x_i^{t-1}, x_j^{t-1}, выбирают двухпродуктовое распределение, соответствующее товарам k, h, оптимальным по Парето (относительно функций u_i, u_j) и таким, что $u_i(x_i^t) \geqslant u_i(x_i^{t-1})$, $u_j(x_j^t) \geqslant u_j(x_j^{t-1})$. В результате такого парного и взаимовыгодного обмена в момент t определяется распределение x_i^t, $i \in N$.

Предполагается, что по географическим или административным причинам свобода в обменах ограничена: не любые два агента могут совершать обмен и не любые два товара можно менять друг на друга. Это отражено в следующем условии и определении допустимого обмена.

1) Задана система σ подмножеств (мощности $\geqslant 2$) множества N такая, что

$$\bigcup_{S\in\sigma} S = N,$$

и для любых $S,\tilde{S} \in \sigma$ существует цепочка $S_1,\ldots,S_r \in \sigma$ со свойством

$$S \cap S_1 \neq \emptyset,\ S_q \cap S_{q+1} \neq \emptyset,\ q = \overline{1,r-1},\ S_r \cap \tilde{S} \neq \emptyset.$$

Кроме того, для любых $S \in \sigma$, $i,j \in S$, $i \neq j$, задана совокупность $\tau(S,i,j)$ подмножеств (мощности $\geqslant 2$) множества L такая, что

а) $\bigcup_{\tau\in\tau(S,i,j)} \tau = L;$

б) для любых $\tau,\tilde{\tau} \in \tau(s,i,j)$ найдется цепочка множеств $\tau_1,\ldots,\tau_p \in \tau(s,i,j)$ со свойством $\tau \cap \tau_1 \neq \emptyset$, $\tau_q \cap \tau_{q+1} \neq \emptyset$,

$q = \overline{1,p-1}$, $\tau_p \cap \tilde{\tau} \neq \emptyset$.

Каждому обмену агентов $i,j \in N$ товарами $k,h \in L$ удобно сопоставить мультииндекс $\binom{i}{j}(k,h)$. Такой мультииндекс (и обмен) назовем допустимым, если найдутся $S \in \sigma$ и $\tau \in \tau(s,i,j)$ такие, что $i,j \in S$, $k,h \in \tau$. Очевидно, $S \in \sigma$ и $\tau \in \tau(S,i,j)$ интерпретируются как списки, разрешающие агентам i,j, указанным в списке s, меняться товарами k,n, указанными в списке τ.

При заданном начальном распределении товаров $(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ процесс парных обменов генерирует две последовательности

$$\left\{(x_1^t,\ldots,x_n^t)\right\}_{t=1}^{\infty}, \quad \left\{\binom{i^t}{j^t}(k^t,h^t)\right\}_{t=1}^{\infty},$$

где для каждого $t=1,2,\ldots$ $(x_1^t,\ldots,x_n^t)$ – распределение, которое получено в результате обмена в момент t между агентами i^t,j^t товарами k^t,h^t из распределения $(x^{t-1},\ldots,x^{x-1})$, соответствующего состоянию всех агентов в момент $t-1$ (до указанного выше обмена в момент t).

Относительно очередности, в которой агенты вступают в сделку, предположим следующее:

для некоторого натурального числа T имеется подпоследовательность моментов времени

$$1 < t_2 < t_1 < \ldots < t_s < t_{s+1} < \ldots$$

такая, что в любом промежутке времени $(t_s, t_{s+1}]$, $s = 1,2,\ldots$, число моментов времени не больше $T: t_{s+1} - t_s \leqslant T$; и в конечной последовательности

$$\begin{bmatrix} i^t \\ j^t \end{bmatrix}(k^t, h^t),\ t = t_s+1,\ t_s+2, \ldots,\ t_{s+1},$$

встречаются все допустимые мультииндексы (возможно, с произвольными повторениями), т.е. всевозможные допустимые пары агентов совершают обмены всеми допустимыми для них парами товаров. Тем самым допускается определенная случайность во встречах между агентами и в выборе ими обмениваемых товаров. Установлена следующая

Теорема. *Пусть функции полезности всех участников строго квазивогнуты, дифференцируемы, $\nabla u_i \in \operatorname{int} R^l_+$ и множество*

$$\{x \in \operatorname{int} R^l_+ \mid u^i(x) \geqslant u_i(x_i^0)\} \text{ замкнуто в } R^l,\ i \in N.$$

Для обменов первого типа, кроме того, требуется непрерывность частных производных функций полезности.

Тогда для каждого типа обменов последовательность распределений $(x_1^t, \ldots, x_n^t)$, $t = 1,2,\ldots$, являющихся итогами взаимовыгодных парных сделок, сходится к распределению, оптимальному по Парето.

Замечание. Для обменов второго типа условие $\nabla u_i \in \operatorname{int} R^l_+$ в теореме можно заменить на более слабое: существует товар $\nu \in L$, для которого $u'_{i\nu}(x) > 0$ для всех $i \in N$, $x \in \operatorname{int} R^l_+$ (либо $u'_{i\nu}(x) < 0$ для всех $i \in N$, $x \in \operatorname{int} R^l_+$). Но при этом надо усилить условие 1, заменив в нем условие б) на условие: $\nu \in \tau$ для любого $\tau \in \tau(s,i,j)$.

ГЛАВА 5. ПРОЦЕДУРЫ СИМПЛЕКСНОГО ТИПА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Симплекс-метод для отыскания оптимального решения задачи линейного программирования, как известно, основан на рассмотрении особых допустимых решений ограничения задачи - так называемых базисных решений. Если система ограничений задачи приведена к каноническому виду - все переменные задачи неотрицательны и все прочие ограничения являются уравнениями - то такие базисные решения однозначно определяются указанием того, какие из переменных могут принимать отличные от нуля значения (базисные переменные). Иными словами, рассматриваемые решения определяются заданием структуры решения. Именно эта идея положена в основу подхода [40] к отысканию равновесных состояний в линейных экономических моделях обмена. На этом пути получаются эффективные конечные алгоритмы не только для классической модели обмена, но и для различных ее вариаций. Поскольку в этих алгоритмах осуществляется последовательный анализ различных предполагаемых структур равновесного решения, то в этом смысле мы говорим о процедурах симплексного типа для рассматриваемого класса задач. По существу же речь идет об алгоритмах на основе схемы полиэдральной комплементарности [41], которая обобщает известный алгоритм Лемке [42], опирающийся уже на симплексную процедуру линейного программирования.

Отметим, что идея использования линейной комплементарности применительно к задаче отыскания равновесия в линейной модели обмена была реализована Ивесом [43], получившим на этом пути конечный алгоритм. Предложенный нами подход [40] дает более экономную в вычислительном отношении процедуру и в то же время позволяет в значительной степени прояснить качественную сторону исследуемого вопроса. Для модели обмена это выражается в выявлении определенного свойства монотонности, которое можно сформулировать следующим образом: получающиеся задачи полиэдральной комплементарности большей частью локально устроены как задачи линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (P-класс [44]). Это свойство задач линейной комплементарности возникающего типа доказано в [45], хотя о нем можно заключить и непосредственно из монотонного характера течения процесса, о котором речь ниже. Слова "большей частью" следует понимать в том смысле, что если рассматриваемая модель не попадает в указанный класс, то этого можно добиться сколь угодно малой вариацией параметров модели.

Для модели обмена с фиксированными бюджетами упомянутое свойство монотонности проявляется более сильным образом [46]: порождаемое возникающей задачей полиэдральной комплементарности многозначное отображение F симплекса σ в его внутренность σ° является в определенном смысле потенциальным и удовлетворяет условию "логарифмической монотонности":

$$(p-q,\ \ln v - \ln w) \leqslant 0, \quad p,q \in \sigma, \quad v \in F(p), \quad w \in F(q). \qquad (5.0)$$

В этой связи следует отметить, что для модели обмена с фиксированными бюджетами задача отыскания равновесия сводится к задаче минимизации выпуклой функции при линейных ограничениях [45].

Приведем общую схему подхода применительно к модели обмена в следующей формулировке. Пусть в модели имеется n участников и l товаров. Обозначим $N = \{1,2,\ldots,n\}$, $L = \{1,\ldots,l\}$. Пусть $c^i, d^i \in R^l_+$ – фиксированные векторы, характеризующие участника $i \in N$: c^i задает его функцию предпочтения (c^i,x^i), а d^i указывает имеющиеся у участника запасы товаров. Для простоты считаем $c^i > 0$, $d^i > 0$ и

$$\sum_{i\in N} d^i_j = 1 \quad \forall\, j \in L. \qquad (5.1)$$

При заданном векторе цен $p \in R^l_+$ на товары участник $i \in N$ решает задачу:

$$(c^i,x^i) - \max! \qquad (5.2)$$

$$(p,x^i) = (p,d^i), \qquad (5.3)$$

$$x^i \geqslant 0. \qquad (5.4)$$

Требуется отыскать такой вектор цен $p = \tilde{p}$, чтобы среди оптимальных решений задач участников нашлись такие $\tilde{x}^{i}$, что при $x^{i} = \tilde{x}^{i}$ выполняется условие баланса

$$\sum_{i \in N} x^{i} = \sum_{i \in N} d^{i}. \tag{5.5}$$

Вектор $\tilde{p}$ и набор $\tilde{x}^{i}$ задают состояние равновесия модели.

Набору векторов x^{i} можно сопоставить множество $B \subset N \times L$, задающее структуру матрицы из компонент $\tilde{x}^{i}_{j}$:

$$B = \{(i,j) \in N \times L \mid \tilde{x}^{i}_{j} > 0\}.$$

Отыскание равновесия будет заключаться в направленном переборе таких гипотетических множеств B.

Ясно, что ввиду однородности условий (5.3) по p можно ограничиться рассмотрением p из симлекса $\sigma = \left\{p \in R^{l}_{+} \mid \sum\limits_{j} p_{j} = 1\right\}$.

Каждому $B \subset N \times L$ сопоставим два множества в симплексе σ: множества $\Omega(B)$ и $\Xi(B)$. Множество $\Xi(B)$ – это множество таких $p \in \sigma^{o}$, для которых при $(i,j) \in B$ товар j является предпочтительным для участника i, т.е.

$$\Xi(B) = \left\{p \in \sigma^{o} \mid \frac{c^{i}_{j}}{p_{j}} = \max_{k} \frac{c^{i}_{k}}{p_{k}},\ (i,j) \in B\right\}.$$

Для задания множества $\Omega(B)$ домножим условия (5.4)-(5.5) покомпонентно на $p_{j} \geqslant 0$ и введем новые переменные $z_{ij} = x^{i}_{j} p_{j}$. В результате из (5.3)-(5.5) с учетом (5.1) получаем условия классической транспортной задачи :

$$\sum_{j} z_{i,j} = (p, d^{i}), \quad i \in N, \tag{5.6}$$

$$\sum_{i} z_{ij} = p_{j}, \quad j \in L, \tag{5.7}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \ i \in N, \ \ j \in L. \tag{5.8}$$

Дополняя эти условия критерием

$$\sum_{i,j} z_{ij} \ln c_j^i \to \max! \tag{5.9}$$

получаем *транспортную задачу модели*.

Множество $\Omega(B)$ – это множество таких $p \in \sigma$, при которых совместна система (5.6)-(5.8) при дополнительном требовании

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin B. \tag{5.10}$$

Легко показать, что $\tilde{p}$ является равновесным вектором цен тогда и только тогда, когда при некотором $B \subset N \times L$ оказывается $\tilde{p} \in \Omega(B) \cap \Xi(B)$.

Будем считать выполненным условие двойственной невырожденности задачи (5.6)-(5.9). Тогда $\Xi(B) \neq \emptyset$ лишь для B, являющихся подмножествами двойственных допустимых базисных множеств задачи (5.6)-(5.9). Чтобы было $\Omega(B) \neq \emptyset$, необходимо потребовать выполнение условия

$$\Big\{ j \in L \,|\, (i,j) \in B \Big\} \neq \emptyset \quad \forall\, i \in N.$$

Совокупность всех двойственно допустимых базисных множеств транспортной задачи модели и всевозможность подмножеств, удовлетворяющих такому условию, обозначим через $\mathfrak{B}$.

Приведенные требования оказываются и достаточными для непустоты множеств $\Omega(B)$ и $\Xi(B)$. При этом совокупность множеств $\Omega(B)$, $B \in \mathfrak{B}$, образует разбиение симплекса σ, а совокупность множеств $\Xi(B)$, $B \in \mathfrak{B}$, – разбиение его внутренности σ°.

Важно, что множества $\Xi(B)$ и $\Omega(B)$ задаются системами линейных уравнений и неравенств, т.е. являются многогранными, и из $B_1 \subset B_2$ следует $\Omega(B_1) \subset \Omega(B_2)$, $\Xi(B_1) \supset \Xi(B_2)$. Кроме того, $\dim \Omega(B) + \dim \Xi(B) = l-1$ при любом $B \in \mathfrak{B}$.

Иными словами, многогранные множества $\Omega(B)$ и $\Xi(B)$ при $B \in \mathfrak{B}$ образуют два полиэдральных комплекса, двойственных друг другу, а отыскание равновесного вектора цен модели сводится к задаче полиэдральной комплементарности: найти $B \in \mathfrak{B}$, для которого $\Omega(B) \cap \Xi(B) \neq \emptyset$.

Одна итерация процесса отыскания такого множества B в данном случае состоит в следующем.

На k-м шаге процесса имеются некоторое $B_k \in \mathfrak{B}$ и точки

$p^k \in \Omega(B_k)$, $q^k \in \Xi(B_k)$. Обозначим через $L(B_k)$ и $M(B_k)$ аффинные носители множеств $\Omega(B_k)$ и $\Xi(B_k)$ соответственно. Аффинное многообразие $M(B_k)$ описывается условием $\sum\limits_j p_j = 1$ и системой уравнений

$$\frac{p_j}{c_j^i} = \frac{p_r}{c_r^i}, \qquad (i,j),(i,r) \in B_k.$$

Для описания $L(B_k)$ следует рассмотреть граф с вершинами $1,2,\ldots,l+n$ и дугами $(i,n+j)$ при $(i,j) \in B_k$. Пусть этот граф имеет τ компонент связности и V_ν – множество вершин ν-й компоненты связности. Положим $N_\nu = N \cap V_\nu$, $L_\nu = \{j \in L \mid (n+j) \in V_\nu\}$. Система линейных уравнений, описывающая $L(B)$, имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in L_\nu} p_j = \sum\limits_{i \in N_\nu} (p,d^i), \quad \nu = 1,\ldots,\tau, \\ \sum p_j = 1. \end{cases}$$

При сделанном предположении $d^i > 0$ аффинные многообразия $L(B_k)$ и $M(B_k)$ трансверсальны друг другу и однозначно порождают точку их пересечения $r^k \in \sigma$ как совместное решение двух приведенных систем линейных уравнений.

Если $r^k \in \Omega(B_k)$ и $r^k \in \Xi(B_k)$, то r^k – вектор равновесных цен модели. В противном случае ищется максимальное $t = t_{\max}$ (<1), при котором для точек

$$\begin{cases} p(t) = p^k + t(r^k - p^k), \\ q(t) = q^k + t(r^k - q^k) \end{cases} \tag{5.11}$$

еще выполняются включения

$$p(t) \in \Omega(B_k), \qquad q(t) \in \Xi(B_k). \tag{5.12}$$

Если сдерживающим для $t_{\max}$ оказалось условие $q(t) \in \Xi(B_k)$, то это означает, что дальнейшему увеличению t препятствует одно из неравенств, задающих множество $\Xi(B_k)$. Оно имеет вид:

$$\frac{c_j^i}{q_j(t)} \geqslant \frac{c_s^i}{q_s(t)}, \qquad (i,j) \in B_k, \qquad (i,s) \notin B_k. \tag{5.13}$$

В этом случае множество $B = B_k$ пополняется элементом (i,s): $B_{k+1} = B_k \cup \{(i,s)\}$.

Если же сдерживающим для t_{max} оказалось условие $p(t) \in \Omega(B_k)$, то это означает, что дальнейшему увеличению t препятствует условие вида:

$$z^{B_k}_{i_o j_o}(p(t)) \geqslant 0, \quad (i_o, j_o) \in B_k, \tag{5.14}$$

где $z^{B_k}_{ij}(p)$ - линейные функции, однозначно получаемые из линейной системы (5.6), (5.7), (5.10). В этом случае множество $B = B_k$ сужается: $B_{k+1} = B_k \setminus \{(i_o j_o)\}$.

В случае, когда сдерживающими для t_{max} оказались оба из условия (5.12), процесс можно продолжить, реализуя любую из указанных возможностей. Эта ситуация рассматривается как вырождение процесса (аналогично вырождению в симплекс-методе) и может быть исключена незначительной вариацией начальных точек p^o и q^o.

В любом варианте принимается $p^{k+1} = p(t_{max})$, $q^{k+1} = q(t_{max})$ и осуществляется переход к следующему шагу.

В предположении невырожденности описанная процедура дает состояние равновесия через конечное число шагов при любом стартовом множестве $B_o \in \mathfrak{B}$.

Упомянутое в начале этого параграфа свойство монотонности процесса проявляется в том, что на каждом шаге мы максимизируем значение параметра t при соблюдении условий (5.12). В общем же алгоритме полиэдральной комплементарности [41] возможны шаги, на которых значения параметра t, наоборот, минимизируются, т.е. ищется $t = t_{min}$. Именно такого рода более общий процесс получается для модели, отличающейся от описанной лишь изменением критерия в задачах участников: вместо максимизации формы (c^i, x^i) требуется ее минимизация (при сохранении предположения $c^i > 0$). Алгоритм для такой модели [47], названной условно моделью кооперации, строится по аналогичной схеме и характеризуется тем, что на каждом шаге направление изменения параметра t меняется на противоположное, т.е. максимизация и минимизация значения t чередуются. Как и в случае модели обмена, процесс заканчивается через конечное число шагов в состоянии равновесия, однако при этом требуется специальный выбор стартового множества $B = B_0 \in \mathfrak{B}$. В этом проявляется определенная аналогия с симплициальным алгоритмом переменной размерности Куна [48] для отыскания неподвижных точек отображений симплекса в себе.

В рамках расматриваемого подхода оказывается возможным учесть дополнительные ограничения сверху на переменные x_j^i, т.е. ограничения $x^i \leqslant b^i$. В [49] этот случай рассмотрен в предположении $d^i < b^i$. Отметим, что при этом уже нет качественного различия в том, требуется ли максимизировать целевые функции (c^i, x^i) в задачах участников или минимизировать (в предположении $c^i > 0$): одна постановка переходит в другую при замене переменных x^i на $\xi^i = b^i - x^i$, а вектор d^i на $\tilde{d}^i = b^i - d^i$. В этом смысле модель с ограничениями сверху и максимизацией функций (c^i, x^i) является объединяющей для указанных двух моделей без ограничений и содержит их в качестве предельных случаев: при $b_j^i \longrightarrow +\infty$ получаем модель обмена, а при $b_j^i \longrightarrow d_j^i$ - модель кооперации.

Остановимся кратко на моделях с фиксированными бюджетами, когда бюджетное ограничение (5.3) в задаче участника заменяется ограничением

$$(p, x^i) = \lambda_i, \tag{5.15}$$

$\lambda_i > 0$, $\sum\limits_i \lambda_i = 1$. Соответственно меняется ограничение (5.6) на

$$\sum_j z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in N. \tag{5.16}$$

Реализация описанного подхода для таких моделей (обмена, кооперации) рассмотрена в [46]. В этом случае характеристика возникающих задач полиэдральной компдементарности оказывается более сильной: если ввести многозначное отображение $f: \sigma \longrightarrow \sigma^0$ формулой

$$F(p) = \Xi(B), \ p \in \Omega^0(B)\ ^1,$$

то для модели обмена такое отображение удовлетворяет неравенству

---

[1] Здесь $\Omega^0(B)$ - относительная внутренность множества $\Omega(B)$.

(5.0), а для модели кооперации - аналогичному неравенству противоположного знака.

Отыскание равновесия эквивалентно отысканию неподвижных точек отображения F. Вследствие указанного свойства логарифмической монотонности этого отображения оказывается, что для модели кооперации равновесный вектор цен $\tilde{p}$ получается за конечное число шагов процедурой метода итераций $p^{k+1} \in F(p^k)$, а для модели обмена такой вектор можно получить минимизацией на σ^0 выпуклой функции $\varphi(\rho) = \sum_j \rho_j \ln\rho_j - f(\rho)$, где $f(\rho)$ - оптимальное значение целевой функции (5.9) транспортной задачи модели как функции вектора p. Обобщение получающихся конструкций на модель с дополнительными ограничениями сверху финансового типа $(p_j x_j^i \leqslant \beta_j^i)$ приводится в [50]. Отметим, что такая модель была рассмотрена ранее Э.И.Ненаховым и М.Е.Примаком в [51]. Конечные алгоритмы, приведенные в [50], представляются сравнительно более эффективными.

В [52] рассматриваемый подход распространен на следующий класс моделей обмена с производством типа Эрроу - Дебре. Пусть в модели имеются участники двух типов: потребители $i \in N$ и производители $k \in K$. Если зафиксирован вектор цен $p \in R_+^l$, то производитель $k \in K$ решает задачу

$$(p, x^k) - \max! \tag{5.17}$$

$$(c^k, x^k) \leqslant \zeta^k, \tag{5.18}$$

$$x^k \geqslant 0, \tag{5.19}$$

где $\zeta^k > 0$, $c^k \in \mathrm{Int}R_+^l$ фиксированы и характеризуют производителя. Содержательно это означает, что, реализуя свой план выпуска товаров $x^k \in R_+^l$, производитель $k \in K$ затрачивает некоторый ресурс (например, труд). Эти затраты описываются линейной функцией (c^k, x^k) и не должны превышать имеющегося в наличии количества ζ_k. Среди планов выбирается дающий максимальный доход $(p, x^k) = \lambda_k$. Этот доход распределяется между потребителями в соответствии с долевыми коэффициентами θ_k^i, $\sum_{i \in N} \theta_k^i = 1$. В результате формируется бюджет потребителя $i \in N$ в количестве

$\lambda_i = \sum_{k \in K} \lambda_k \theta_k^i$, и его задача имеет вид:

$$(c^i, x^i) - \max! \tag{5.20}$$

$$(p, x^i) = \sum_{k \in K} \theta_k^i \lambda_k, \tag{5.21}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{5.22}$$

Требуется отыскать такой вектор цен $p = \tilde{p}$, что среди оптимальных планов участников найдутся $x^i = \tilde{x}^i$ и $x^k = \tilde{x}^k$, удовлетворяющие условию баланса

$$\sum_{i \in N} x^i = \sum_{k \in K} x^k. \tag{5.23}$$

Для вложения такой модели в схему рассматриваемого подхода задаче (5.17)-(5.19) сопоставляется задача

$$(c^k, x^k) - \min!$$

$$(p, x^k) = \lambda_k,$$

$$x^k \geqslant 0,$$

после чего возникает параметрическая модель с параметрами λ_k, которая отличается от обычной модели обмена тем, что часть участников - потребители $i \in N$ - максимизируют свои целевые функции, а другая часть - производители $k \in K$ - минимизируют (у всех участников коэффициенты целевых функций положительные). При этом условие баланса товаров имеет вид (5.23). Задача сводится к определению таких значений параметров λ_k, чтобы оптимальные значения целевых функций (c^k, x^k), $k \in K$, в состоянии равновесия полученной параметрической модели совпадали с заданными значениями ζ_k.

При условии, что все $\theta_k^i > 0$, в [52] приводится алгоритм отыскания равновесия, для которого доказывается конечность в предположении невырожденности процесса и при определенном требовании к стартовому состоянию.

Литература

1. **Гурвич В.А., Меньшиков И.С.** Институты согласия. - М.: Знание. Математика, кибернетика. - 1989. - № 6.

2. **Smale S.** Global analysis and economies: Geometrical analysis of Pareto-optima and price equilibria under classical hypotheses // J. Math. Econ. - 1976. - V.3, № 1. - P.1-14.

3. **Aubin J.-P.** Mathematical methods of game and economic theory. - Amsterdam, 1979.

4. **Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. - 1982. - Вып.30(46). - С.5-87.

5. **Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М.** Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация. - 1986. - Вып.38(55). - С.5-120.

6. **Васильев В.А.** О согласованных распределениях в экономических моделях с двумя видами цен // Оптимизация. - 1988. - Вып.42(59). - С.23-41.

7. **Чугунов П.И.** Равновесие и полуравновесие в экономике с рационированием // Оптимизация. - 1988. - Вып.45(60). - С.120-160.

8. **Bidard C.** Equilibrium with a qualitative Walras law // J. Econ. Theory. - 1989 - V.47. - P.203-205.

9. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. - М.: Мир, 1988.

10. **Smale S.** Global analysis and economies: Handbook of Mathematical Economics. - 1986. - V.1. - P.331-373.

11. **Federer H.** Geometric measure theory. - Berlin - Heidelberg - New York, 1969.

12. **Макаров В.Л.** О понятии договора в абстрактной экономике // Оптимизация. - 1980. - Вып.24(41). - С.5-17.

13. **Козырев А.Н.** Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена // Оптимизация. - 1982. - Вып.29(46). - С.66-78.

14. **Васильев В.А.** Устойчивые системы договоров и экономическое равновесие // Оптимизация. - 1988. - Вып.42(59). - С.5-22.

15. Moulin H. The strategy of social choice. - Amsterdam - New York - London, 1983.

16. **Moulin H., Peleg B.** Cores of effectivety function and implementation theory // J. Math. Econ. - 1982 - V.5. - P.115-145.

17. **Peleg B.** Game theoretic analysis of voting in comittees. - Cambridge: Univ. Press, 1984.

18. **Scarf H.** The core of an n-person game // Econometrica. - 1967. - V.35. - P.50-69.

19. **Billera L.J.** Some theorems on the core of an n-person game without side payments // J. Appl. Math. - 1970. - V.18. - P.567-579.

20. **Keiding H., Thorlund-Peterson L.** The core of a cooperative gáme without side payments // J. Optim. Theory and Appl. - 1987. - V.54, № 2. - P.273-288.

21. **Shapley L.S.** On balanced games without side payments. - New York: Academic Press, 1973. - P.261-290.

22. **Дольд А.** Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир, 1976.

23. **Свитцер Р.М.** Алгебраическая топология - гомотопии и гомологии. - М.: Наука, 1975.

24. **Shapley L.S.** A value for n-person games // Ann. Math. Studies. - 1953. - № 28. - P.307-317.

25. **Ауман Р., Шепли Л.** Значения для неатомических игр. - М.: Мир, 1977.

26. **Васильев В.А.** Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация. - 1975. - Вып.17(34). - С.5-27.

27. **Васильев В.А.** Об одном классе дележей в кооперативных играх // Докл.АН СССР. - 1981. - Т.256, № 2. - С.265-268.

28. **Васильев В.А.** Характеризация ядер и обобщенных НМ-решений для некоторых классов кооперативных игр // Труды Ин-та математики / АН СССР. Сиб.отд-ние. - 1988. - Т.10: Модели и методы оптимизации. - С.63-89.

29. **Дюбин Г.Н.** О существовании дележа Шепли для игр со счетным числом игроков // Математические методы в социальных науках. - Вильнюс, 1980. - Вып.13. - С.9-19.

30. Васильев В.А. Об одном пространстве неаддитивных функций множества // Оптимизация. - 1975. - Вып.16(33). - С.99-120.

31. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. - М.: Мир, 1974.

32. Дюбин Г.Н. О существовании значения по Шепли // Оптимизация. - 1988. - Вып.43(60). - С.102-118.

33. Grossman S.J., Hart O.D. An analysis of the principal agent problem // Econometrica. - 1983. - V.51. - P.7-45.

34. McKenzie L. Optimal economic growth, turnpike theorems and comparative dynamics: Handbook of Mathematical Economics - 1986. - V.3. - P.1281-1355.

35. Samuelson P. Turnpike theorems even though tastes are intertemporally dependent // West.Econom. - 1974. - V.9. - P.21-26.

36. Iwai K. Optimal economic growth and stationary ordinal utility: A Fisherian approach // J. Econom. Theory. - 1972. - V.5. - P.121-151.

37. Dementiev N. Turnpike theorem: the case when utility is not additively separable with respect to time // J. Math. Econ. - 1989. - V.18, № 4. - P.355-397.

38. Bewley T. An integration of equilibrium theory and turnpike theory // J. Math. Econom. - 1982. - V.10, № 2/3. - P.233-269.

39. Макаров В.Л. О динамических моделях экономики и развитии идей Л.В.Канторовича // Экономика и математические методы. - 1987. - Т.23, № 1. - С.10-24.

40. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // ДАН СССР. - 1983. - Т.268, № 5. - С.1062-1067.

41. Шмырев В.И. Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61). - С.82-95.

42. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programing // Manag. Science. - 1965. - V.11, № 7. - P.681-689.

43. Eaves B.C. A finite algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econ. - 1976. - V.3, № 2. - P.197-204.

44. Lemke C.E. Complementary problems in nonlinear programming. - New York - London: Academic Press, 1970.

45. **Шмырёв В.И.** Об одном классе линейных однородных задач дополнительности в R_{+}^{n} // Оптимизация. - 1989. - Вып.45(62). - С.54-65.

46. **Шмырёв В.И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. - 1983. - Вып.31(48). - С.137-155.

47. **Шмырёв В.И.** Об отыскании равновесия в модели кооперации // Оптимизация. - 1987. - Вып.41(58). - С.60-75.

48. **Тодд М.Дж.** Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике.- М.: Наука, 1983.

49. **Шмырёв В.И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с ограничениями сверху на переменные // Оптимизация. - 1988. - Вып.42(59). - С.86-111.

50. **Шмырёв В.И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами и дополнительными ограничениями финансового типа // Оптимизация. - 1989. - Вып.45(62). - С.66-86.

51. **Ненахов Э.И., Примак М.Е.** Линейная модель обмена с дополнительными ограничениями. - Киев, 1987 (Препринт/Ин-т кибернетики АН УССР, № 87-45).

52. **Шмырёв В.И.** Об одной линейной экономической модели производства-обмена типа Эрроу - Дебре // Оптимизация. - 1989. - Вып.46(63). - С.68-95.