Выпуск 47(64) ОПТИМИЗАЦИЯ 1990 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ПРИМЕР СЕКВЕНЦИАЛЬНО r-НЕПРЕРЫВНОГО, НО НЕ МАЖОРИРУЕМОГО ОПЕРАТОРА, СОХРАНЯЮЩЕГО ДИЗЪЮНКТНОСТЬ

А.Е.Гутман

Основные сведения о решеточно нормированных пространствах и действующих в них операторах можно найти в [1]. Оператор T, действующий из решеточно нормированного пространства (X,p,E) в (Y,q,F), назовем r-полунепрерывным, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$ из $p(x_n) \xrightarrow{r} 0$ следует $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} q(Tx_n) = 0$. В [2] показано, что всякий действующий в векторных решетках r-полунепрерывный оператор, сохраняющий дизъюнктность, порядково ограничен (или мажорируем, что эквивалентно в данном случае). Представляет естественный интерес, выполняется ли аналогичное утверждение для операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах. В данной заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос. А именно, устанавливается следующий результат.

Теорема. *Существуют банахово пространство X, расширенное K-пространство F и линейный оператор $T:X \longrightarrow F$ (сохраняющий дизъюнктность в силу равенства $T(0) = 0$), не являющийся мажорируемым, но тем не менее удовлетворяющий условиям:*

(а) T секвенциально r-непрерывен (что сильнее r-полунепрерывности);

(б) имеется подмножество $X_0 \subset X$ такое, что замыкание линейной оболочки X_0 совпадает с X, и множество $\{|Tx| : x \in X_0\}$ ограничено в F.

Доказательство разобьем на три этапа.

1. **Предварительные построения.** Обозначим через A множество всех счетных ординалов (т.е. первый не счетный ординал) и положим $\Phi := A^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$. Снабдим множество Φ "лексикографическим" порядком, положив $\varphi_1 < \varphi_2$ в том и только в том случае, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения $\varphi_1(n) < \varphi_2(n)$ и $\varphi_1(m) = \varphi_2(m)$ для всех натуральных $m < n$. Введем в Φ порядковую топологию (база открытых множеств: $\{]\varphi_1, \varphi_1[: \varphi_1 < \varphi_2 \}$). Полную булеву алгебру регулярных открытых подмножеств Φ обозначим через B, а соответствующий ей стоуновский компакт – через Q. Пусть ι – булев изоморфизм B на булеву алгебру $\mathrm{Clop}(Q)$ открыто-замкнутых подмножеств Q.

Положим $\Omega := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$ и с каждым элементом $\omega \in \Omega$ свяжем его "размерность" $\dim \omega$, определяемую как такое (единственное) $n \in \mathbb{N}$, что $\omega \in A^n$. Для всякого $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ положим $\Omega{+}1 := (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n{+}1)$ и

$$\Phi(\omega) :=](a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots),\ (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n{+}1, 0, 0, \ldots)[\subset \Phi.$$

Очевидно, $\Phi(\omega) \in B$. Обозначим $\iota(\Phi(\omega))$ через $Q(\omega)$ и положим $f_\omega := \dim \omega \cdot 1_{Q(\omega)} \in C(Q)$, где символ $1_{Q(\omega)}$ обозначает характеристическую функцию подмножества $Q(\omega) \subset Q$.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ векторное пространство ограниченных функций $x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ со счетным носителем $x^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$. Снабдив $\mathfrak{X}$ равномерной нормой, получим банахово пространство. С другой стороны, будучи наделенным покоординатным порядком, $\mathfrak{X}$ превращается в K-пространство.

2. **Лемма.** *Для любой функции $x \in \mathfrak{X}^+$ существует*

$$o - \sum_{\omega \in \Omega} x(\omega) f_\omega \in C_\infty(Q),$$

где o-сумма семейства понимается как o-предел в $C_\infty(Q)$ сети сумм конечных подсемейств.

Зафиксируем произвольно $x \in \mathfrak{X}^+$ и обозначим носитель x через S. Определим функцию $f : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, положив для каждого $q \in Q$

$$f(q):=\sum_{\omega\in S} f_\omega(q).$$

Поскольку $\sum_{\omega\in\Omega} x(\omega)f_\omega(q) \leqslant \|x\| f(q)$ для всех $q\in Q$, то достаточно установить, что $f(q)<\infty$ для всех $q\in Q$ за исключением некоторого тощего подмножества Q. Так как $f^{-1}[n,\infty[\; = \bigcup\{Q(\omega):\omega\in S_n\}$, где $S_n=\{\omega\in S:\dim\omega\geqslant n\}$, то

$$f^{-1}[\mathbb{R}] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big[Q\setminus\bigcup_{\omega\in S_n} Q(\omega)\Big] \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}\bigcap_{\omega\in S_n}\Big[Q\setminus Q(\omega)\Big].$$

Достаточно показать, что последнее множество всюду плотно в Q, а поскольку

$$\operatorname{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\bigcup_{\omega\in S_n}(Q\setminus Q(\omega)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in S_n}(Q\setminus Q(\omega)),$$

где sup и inf берутся в булевой алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$, то, в свою очередь, достаточно показать равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in S_n}(\Phi\setminus\Phi(\omega)) = \Phi$$

уже в булевой алгебре B. Последнее соотношение эквивалентно равенству

$$\operatorname{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\Big[\Phi\setminus\bigcup_{\omega\in S_n}\Phi(\omega)\Big] = \Phi. \qquad (1)$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ через Φ_n обозначим множество $\varphi\in\Phi$, для которых $\varphi(n)$ – непредельный ненулевой ординал и $\varphi(m)=0$ для всех $m>n$. Положим $\Phi_{fin}:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n$. Очевидно, $\operatorname{cl}\Phi_{fin}=\Phi$, так как $\varphi=\sup\{\varphi'\in\Phi_{fin}:\varphi'\leqslant\varphi\}$ для каждого $\varphi\in\Phi$. Достаточно показать, что при $n\geqslant 2$

$$\Psi_n:=\operatorname{cl}\operatorname{int}\Big[\Phi\setminus\bigcup_{\omega\in S_n}\Phi(\omega)\Big]\supset\Phi_{n-1},$$

ведь тогда

$$\Phi=\operatorname{cl}\Phi_{fin}=\operatorname{cl}\bigcup_{n=2}^{\infty}\Phi_{n-1}\subset\operatorname{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}\Big[\Phi\setminus\bigcup_{\omega\in S_n}\Phi(\omega)\Big]$$

и равенство (1) выполнено. Зафиксируем произвольно $n \geqslant 2$. Для каждого $\omega = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m$, где $m \geqslant n$, введем обозначение $\omega|_n := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n$. Очевидно, $\Phi(\omega) \subset \Phi(\omega|_n)$. Следовательно,

$$\Phi_n \supset \mathrm{cl\ int}\Big[\Phi \setminus \bigcup_{\omega \in S_n} \Phi(\omega|_n)\Big].$$

Возьмем произвольный элемент $\varphi \in \Phi_{n-1}$. Мы покажем, что $\varphi \in \mathrm{cl\ int}\ \Big[\Phi \setminus \bigcup_{\omega \in S_n} \Phi(\omega|_n)\Big]$. Для этого достаточно установить неравенство

$$\sup \bigcup_{\omega \in S_n(\varphi)} \Phi(\omega|_n) < \varphi,$$

где $S_n(\varphi) = \{\omega \in S_n : \sup \Phi(\omega|_n) \leqslant \varphi\}$, ведь в этом случае множество $\Phi \setminus \bigcup_{\omega \in S_n} \Phi(\omega|_n)$ будет содержать отрезок $]\varphi', \varphi[$ для некоторого $\varphi' < \varphi$. Выберем произвольный элемент $\omega = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in S_n(\varphi)$. Тогда $\omega|_n + 1 = \sup \Phi(\omega|_n) \leqslant \varphi$. Поскольку $\alpha_n + 1 > 0 = \varphi(n)$, то имеется $m < n$ такое, что $\alpha_1 = \varphi(1), \ldots, \alpha_{m-1} = \varphi(m-1)$, $\alpha_m < \varphi(m)$. Поэтому

$$\omega|_n + 1 \leqslant \varphi[\omega] := (\varphi(1), \ldots, \varphi(n-2), \varphi(n-1)-1, \alpha_n+1, 0, 0, \ldots).$$

Следовательно,

$$\sup \bigcup_{\omega \in S_n(\varphi)} \Phi(\omega|_n) \leqslant \sup_{\omega \in S_n(\varphi)} \varphi[\omega] =$$
$$= (\varphi(1), \ldots, \varphi(n-2), \varphi(n-1)-1, \sup_{\omega \in S_n(\varphi)} (\alpha_n+1), 0 0, \ldots) < \varphi.$$

Осталось заметить, что $\sup_{\omega \in S_n(\varphi)} (\alpha_n+1) \in A$ как супремум счетного числа счетных ординалов.

3. Построение оператора T. Банахово пространство X определим как замыкание (по норме) в $\mathfrak{X}$ подпространства элементов $x \in \mathfrak{X}$ с конечными носителями, а в качестве K-пространства F возьмем $C_\infty(Q)$. В силу леммы 2 для каждого $x \in \mathfrak{X}^+$ существует сумма $o\text{-}\sum_{\omega \in \Omega} x(\omega) f_\omega \in F^+$, которую мы обозначим через $\bar{T}x$. Продолжив оператор $\bar{T}:x^+ \longrightarrow F^+$ по линейности на $\mathfrak{X}$, получим положительный линейный оператор $\bar{T}:\mathfrak{X} \longrightarrow F$. Мы полагаем $T:=\bar{T}|_X$.

Проверим выполнение условия (а). Предположим, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к нулю (по норме). Тогда из неравенства

$$|x_n| \leqslant \|x_n\| \cdot 1_{\cup\{x_n^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]:n\in\mathbb{N}\}}$$

следует, что $x_n \xrightarrow{r} 0$ в K-пространстве $\mathfrak{X}$. Из последнего в силу положительности оператора $\bar{T}$ вытекает, что $Tx_n=\bar{T}x_n \xrightarrow{r} 0$ в F.

Теперь докажем утверждение (б). Для этого положим

$$X_0:=\left\{\frac{1}{\dim\,\omega}\cdot 1_{\{\omega\}}:\omega \in \Omega\right\} \subset X.$$

Поскольку линейная оболочка X_0 представляет собой множество всех элементов $\mathfrak{X}$, имеющих конечный носитель, то ее замыкание совпадает с X. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$

$$\left|T\left(\frac{1}{\dim\,\omega}\cdot 1_{\{\omega\}}\right)\right| = \frac{1}{\dim\,\omega}\cdot f_\omega = 1_{Q(\omega)} \leqslant 1.$$

Наконец, для всех $a_1,\ldots,a_n \in A$

$$\sup_{a\in A} T\left(1_{\{(a_1,\ldots,a_n,a)\}}\right) = \sup_{a\in A} f_{(a_1,\ldots,a_n,a)} =$$

$$= \sup_{a\in A} (n+1)\cdot 1_{Q(a_1,\ldots,a_n,a)} = n+1,$$

так как $(Q(a_1,\ldots,a_n,a))_{a\in A}$ - разбиение единицы в $\mathrm{Clop}(Q)$. А поскольку $\|1_{\{(a_1,\ldots,a_n,a)\}}\| \leqslant 1$ для всех $a_1,\ldots,a_n \in A$, то множество $\{|Tx|:\|x\| \leqslant 1\}$ неограничено и, следовательно, оператор T не мажорируем. Теорема полностью доказана.

Таким образом, r-полунепрерывности (и даже секвенциальной r-непрерывности), вообще говоря, недостаточно, чтобы сохраняющий дизъюнктность линейный оператор $T:(X,p,E) \longrightarrow (Y,q,F)$ был мажорируемым. Заметим, что (в случае расширенного F) оператор T будет мажорируемым, если кроме его r-полунепрерывности потребовать, чтобы для каждой r-сходящейся к нулю сети $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X$ существовал индекс $\bar{\alpha} \in A$ такой, что множество $\{q(Tx_\alpha):\alpha \geqslant \bar{\alpha}\}$ ограничено в F. Кроме того, мажорируемым будет всякий нерасширяющий $(q(Tx) \in \{p(x)\}^{\perp\perp})$ r-полунепрерывный оператор. (Доказательство этих фактов выходит за рамки данной заметки.)

В заключение отметим, что построить пример сохраняющего дизъюнктность r-полунепрерывного, но не мажорируемого оператора $T:X \longrightarrow Y$ значительно проще, если не стремиться к тому, чтобы решеточно нормированное пространство Y было расширенным. Действительно, пусть s_0 обозначает векторное пространство последовательностей $x:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, сходящихся к нулю, а s – пространство всех последовательностей. Снабдив s_0 равномерной нормой, получим банахово пространство, которое обозначим через X. Наделив же s_0 и s покоординатным порядком, получим K-пространства, которые обозначим соответственно через F_0 и F (F_0 – фундамент F). Тогда тождественное отображение id_{s_0} будет мажорируемым как оператор из X в F (и тем более r-полунепрерывным), но не будет мажорируемым как оператор из X в F_0.

Литература

1. **Кусраев А.Г., Стрижевский В.З.** Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу. – Новосибирск: Наука, 1987. – С.132–158.

2. **McPolin P.T.N., Wickstead A.W.** The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1985. – V.97. – P.481–487.

Поступила в ред.-изд. отдел
22.05.1990 г.