Выпуск 47(64) ОПТИМИЗАЦИЯ 1990 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.987.5

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ЭРГОДИЧЕСКИМИ АВТОМОРФИЗМАМИ

А.Г.Качуровский

В предлагаемой заметке доказывается эквивалентность метрического изоморфизма эргодических автоморфизмов пространства Лебега и сопряженности порождаемых этими автоморфизмами изометрических операторов, действующих в пространстве суммируемых функций.

Автоморфизмы T_1 и T_2 пространства с мерой M называют метрически изоморфными, если существует такой автоморфизм φ этого пространства, что $T_2(x) = \varphi T_1 \varphi^{-1}(x)$ для п.в. $x \in M$.

То, что рассматриваемые автоморфизмы действуют на одном и том же пространстве с мерой, для проблемы метрического изоморфизма [1] несущественно. Как легко заметить, автоморфизмы не изоморфных друг другу пространств с мерой не могут быть метрически изоморфны; с другой стороны, можно считать, что автоморфизмы изоморфных пространств действуют на одном и том же пространстве.

Всюду далее пространство с мерой предполагается пространством Лебега [2,1]. Изометрическим оператором в $L^1(M)$ будем называть изометрический (линейный, обратимый) оператор, отображающий $L^1(M)$ на себя. Такие операторы образуют группу; обозначим ее $\mathcal{L}$.

Всякий автоморфизм T пространства с мерой M порождает оператор P_T, действующий в пространстве измеримых функций по формуле $P_T h(x) = h(T(x))$. Как нетрудно видеть, пространство $L^1(M)$ инвариантно относительно P_T, и оператор P_T является изометрическим. Обратный оператор задается формулой $P_T^{-1} = P_{T^{-1}}$.

В эргодической теории обычно рассматривается действие порожденного оператора P_T (унитарного) в комплексном гильбертовом пространстве $L^2(M)$. Хорошо известно, что если два автоморфизма метрически изоморфны, то порожденные ими в $L^2(M)$ операторы унитарно эквивалентны (т.е. сопряжены в группе унитарных операторов); обратное утверждение неверно.

Докажем, что в случае эргодических автоморфизмов пространства Лебега для порождаемых ими в $L^1(M)$ операторов верно и обратное, т.е. метрический изоморфизм таких автоморфизмов эквивалентен сопряженности соответствующих операторов в группе $\mathcal{L}$.

Лемма. *Пусть M – пространство Лебега. Всякий изометрический оператор V в $L^1(M)$, сохраняющий единицу (т.е. тождественно равную единице функцию), порождается некоторым автоморфизмом T пространства M, т.е. $Vh(x) = h(T(x))$ для п.в. $x \in M$; $h \in L^1(M)$.*

Доказательство ведется по той же схеме, что и в [3]. Как легко проверить, V переводит характеристические функции дизъюнктных измеримых множеств в дизъюнктные функции. Действительно, из равенства

$$\|\chi_A + \chi_B\|_{L^1} + \|\chi_A - \chi_B\|_{L^1} = 2(\|\chi_A\|_{L^1} + \|\chi_B\|_{L^1})$$

по изометричности и линейности V следует равенство

$$\|V\chi_A + V\chi_B\|_{L^1} + \|V\chi_A - V\chi_B\|_{L^1} = 2(\|V\chi_A\|_{L^1} + \|V\chi_B\|_{L^1}),$$

что равносильно дизъюнктности функций $V\chi_A$ и $V\chi_B$.

Далее, по линейности V имеем: $1 = V1 = V\chi_A + V\chi_{CA}$ для любого измеримого $A \subseteq M$. По дизъюнктности $V\chi_A$ и $V\chi_{CA}$ отсюда следует, что $V\chi_A$ и $V\chi_{CA}$ являются характеристическими функциями, причем характеристическими функциями множеств той же меры, что A и CA соответственно, так как V – изометрия. Этими же свойствами обладает и оператор V^{-1}, поэтому действие V на характеристических функциях задает изоморфизм алгебры измеримых множеств на себя. Всякий такой изоморфизм для пространства Лебега порождается некоторым точечным изоморфизмом T [2], который и является требуемым. Лемма доказана.

Теорема. *Эргодические автоморфизмы T_1 и T_2 пространства Лебега (M,μ) метрически изоморфны тогда и только тогда, когда порожденные ими в $L_1(M)$ операторы P_{T_1} и P_{T_2} сопряжены в группе $\mathcal{L}$, т.е. $P_{T_2}= VP_{T_1}V^{-1}$ для некоторого оператора $V \in \mathcal{L}$.*

Доказательство. Если T_1 и T_2 метрически изоморфны, т.е. $T_2\varphi(x) = \varphi T_1(x)$ для п.в. $x \in M$, то требуемый оператор можно определить формулой $Vh(x) = h(\varphi(x))$, $h \in L_1(V)$. Действительно,

$$VP_{T_1}h(x) = Vh(T_1(x)) = h(\varphi T_1(x));$$

$$P_{T_2}Vh(x) = P_{T_2}(h(\varphi(x))) = h(T_2\varphi(x)),$$

т.е. требуемое равенство $P_{T_2}Vh(x) = VP_{T_1}h(x)$ эквивалентно очевидному равенству $h(T_2\varphi(x)) = h(\varphi T_1(x))$.

Пусть теперь операторы P_{T_1} и P_{T_2} сопряжены в группе $\mathcal{L}$ и V – сопрягающий оператор; докажем метрический изоморфизм T_1 и T_2.

Так как оператор P_{T_1} сохраняет единицу, то из равенства $P_{T_2}V = VP_{T_1}$ следует, что $P_{T_2}V1(x) = V1(x) = V1(x)$, т.е. $V1$ – неподвижная точка оператора P_{T_2}. Как легко проверить, всякая такая точка является плотностью инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Это следует из того, например, что P_{T_2} совпадает с так называемым оператором Перрона – Фробениуса PF_{T_2}, действие которого в $L^1(M)$ определяется формулой

$$\int\limits_A PF_{T_2}h d\mu = \int\limits_{T_2^{-1}(A)} h d\mu$$

для любого измеримого $A \subseteq M$. Подстановка P_{T_2} вместо PF_{T_2} в указанную формулу равенства не нарушает; с другой стороны, эта формула определяет оператор однозначно, т.е. $P_{T_2} = PF_{T_2}$.

Как известно [1, с.27], из эргодичности меры μ следует равенство константе плотности любой абсолютно непрерывной относительно нее меры, т.е. в нашем случае получаем равенство $V1 = 1$.

По лемме найдется такой автоморфизм φ пространства M, что $Vh(x) = h(\varphi(x))$ для п.в. $x \in M$. Из уже отмечавшейся эквивалентности равенств $P_{T_2}Vh(x) = VP_{T_1}h(x)$ и $h(T_2\varphi(x)) = h(\varphi T_1(x))$ получаем справедливость равенства $\chi_A(T_2\varphi(x)) = \chi_A(\varphi T_1(x))$ для любого измеримого множества $A \subseteq M$. Отсюда из тождеств

$$\chi_A(T_2\varphi(x)) = \chi_{(T_2\varphi)^{-1}(A)}(x) \quad \text{и} \quad \chi_A(\varphi T_1(x)) = \chi_{(\varphi T_1)^{-1}(A)}(x)$$

получаем совпадение почти всюду множеств $(T_2\varphi)^{-1}(A)$ и $(\varphi T_1)^{-1}(A)$, т.е. автоморфизмы $T_2\varphi$ и φT_1 задают один и тот же автоморфизм алгебры измеримых множеств на себя. Так как M – пространство Лебега, то отсюда следует [2, с.124] совпадение почти всюду автоморфизмов $T_2\varphi$ и φT_1. Теорема доказана.

Как следует из леммы, оператор $V \in \mathcal{L}$ может быть порожден автоморфизмом пространства M тогда и только тогда, когда он сохраняет единицу. Такие операторы образуют подгруппу $\mathcal{L}_a$ в группе $\mathcal{L}$. Как нетрудно видеть, оператор из $\mathcal{L}_a$ порождается эргодическим автоморфизмом тогда и только тогда, когда у него нет отличных от констант неподвижных точек.

Литература

1. **Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.** Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

2. **Рохлин В.А.** Об основных понятиях теории меры // Мат.сб. – 1949. – Т.25, № 1. – С. 107–150.

3. **Lamperti J.** On the isometries of certain function-spaces // Pacif. J. Math. – 1958. – Vol.8, № 3. – P.459–466.

Поступила в ред.-изд. отдел
06.02.1990 г.