Выпуск 47(64) *ОПТИМИЗАЦИЯ* 1990 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЕКТОРНЫМИ МЕРАМИ

К.Т.Тибилов

В заметке рассматриваются вопросы представления мажорируемых операторов посредством векторных мер в духе монографий [1] и [2].

1°. Начнем с нескольких полезных замечаний о векторных мерах ограниченной вариации. Введем необходимые определения.

Пространством со смешанной нормой будем называть пару (Y,F), удовлетворяющую условиям:

(а) F - нормированная решетка;

(б) Y - решеточно нормированное пространство (РНП) с разложимой F-значной нормой (см. [3], с.102).

Смешанная норма на пространстве Y определяется формулой $\| |y| \| := \| |y| \|$ $(y \in Y)$. Пусть $\mathcal{A}$ - произвольная булева алгебра. Аддитивное отображение $\mu:\mathcal{A} \longrightarrow Y$ будем называть мерой. Говорят, что мера $\mu:\mathcal{A} \longrightarrow Y$ имеет ограниченную векторную вариацию, или, точнее, F-вариацию (см. [2]), если существует положительная мера $\nu:\mathcal{A} \longrightarrow F$ такая, что $|\mu(a)| \leqslant \nu(a)$ $(a \in \mathcal{A})$. Мера ν, удовлетворяющая последнему неравенству, называется мажорантой меры μ.

Через F-$bva(\mathcal{A},Y)$ будем обозначать векторное пространство всех мер из $\mathcal{A}$ в Y ограниченной F-вариации. В случае $Y=F$ пространство F-$bva(\mathcal{A},Y)$ совпадает с пространством $ba(\mathcal{A},F)$ всех [illegible] мер из $\mathcal{A}$ в F.

Пусть F является K-пространством, в этом случае $ba(\mathcal{A},F)$ — тоже K-пространство. Если $\mu \in F - bva(\mathcal{A},Y)$, то среди всех мажорант μ в K-пространстве $ba(\mathcal{A},F)$ существует наименьшая. Она обозначается через $|\mu|$ и называется векторной вариацией или F-вариацией меры μ. Разбиением π элемента $a \in \mathcal{A}$ назовем произвольную конечную систему элементов $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$, удовлетворяющую условиям $a_i \wedge a_j = 0 (i \neq j)$, $a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$. Будем обозначать такое разбиение через $\pi(a) = \{a_1,\ldots,a_n\}$, а множество всех разбиений элемента $a \in \mathcal{A}$ через $\Pi(a)$. Векторную вариацию меры μ можно вычислять по следующей формуле (см.[2]):

$$|\mu|(a) = \sup_{\Pi(a)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(a_i)| \right\} \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Отображение $\mu \longrightarrow |\mu|$ $(\mu \in F - bva(\mathcal{A},Y))$ является векторной нормой, а РНП $(F - bva(\mathcal{A},Y), ba(\mathcal{A},F))$ O-полно. Оно будет пространством Банаха - Канторовича (ПБК), если Y - ПБК. Введем скалярную вариацию меры $\mu:\mathcal{A} \longrightarrow Y$. По определению, мера μ имеет ограниченную скалярную, или R-вариацию, если существует положительная мера $\lambda \in ba(\mathcal{A},R)$ такая, что $\|\mu(a)\| \leq \lambda(a)$ $(a \in \mathcal{A})$. Среди всех скалярных мажорант $\lambda \in ba(\mathcal{A},R)$ существует наименьшая. Она обозначается $v\mu$ и называется скалярной вариацией меры μ. Справедлива формула

$$v\mu(a) = \sup_{\Pi(a)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| |\mu(a_i)| \| \right\} \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Векторное пространство всех мер $\mu:\mathcal{A} \longrightarrow Y$ ограниченной скалярной вариации будем обозначать через $bva(\mathcal{A},Y)$. Отображение $\mu \longrightarrow v\mu$ $(\mu \in bva(a,Y)$ является нормой, а РНП $(bva(\mathcal{A},Y), ba(\mathcal{A},R)$ O-полно. Легко видеть, что $F - bva(\mathcal{A},Y) \subset bva(\mathcal{A},Y)$. Выясним условия, при которых справедливо обратное включение. Эти условия сформулируем в терминах свойств (B) и (C) нормы в F (см.[4]).

Теорема 1. *Если норма в F удовлетворяет условию* (B), *то справедливо равенство $F - bva(\mathcal{A},Y) = bva(\mathcal{A},Y)$. Если норма в F удовлетворяет условиям* (B) *и* (C), *то справедливо равенство $v|\mu|(a) = v\mu(a)$ $(a \in \mathcal{A})$.*

■ В множестве $\Pi(a)$ введем частичное упорядочение следующим образом: для разбиений $\pi_1(a) = \{a'_1,\dots,a'_n\}$ и $\pi_2(a) = \{a''_1,\dots,a''_m\}$ положим $\pi_1 \leqslant \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \subset \pi_2$. Для разбиения $\pi = \{a_1,\dots,a_n\} \in \Pi(a)$ обозначим

$$l'_\pi(a) := \sum_{i=1}^{n} |\mu(a)|, \qquad l^2_\pi(a) := \sum_{i=1}^{n} \|\mu(a)\|.$$

Тогда $(l^1_\pi)_{\pi\in\Pi(a)}$, $(l^2_\pi)_{\pi\in\Pi(a)}$ составляют направленные множества. Пусть $\mu \in bva(\mathcal{A},Y)$, т.е. существует $v\mu(a) = \sup\limits_{\Pi(a)} l^2_\pi(a)$ $(a \in \mathcal{A})$. Но $\|l^1_\pi\| \leqslant l^2_\pi < \infty$, поэтому по условию (B) существует элемент $l \in F$, для которого $l^1_\pi \nearrow l$, следовательно, существует $\sup\limits_{\Pi(a)} l^1_\pi(a)$, т.е. $\mu \in F - bva(\mathcal{A},Y)$, что и требовалось. Далее, из определения $v|\mu|$ и условий (B) и (C) следует

$$v|\mu|(a) := \sup_{\Pi(a)} \sum_{i=1}^{n} \||\mu|(a_i)\| = \sup_{\Pi(a)} \sum_{i=1}^{n} \Big\|\sup_{\Pi(a_i)} \sum_{j=1}^{m} |\mu(a_i^j)|\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\Pi(a)} \sup_{\Pi(a_i)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \||\mu(a_i^j)|\| = v\mu(a).$$

В другую сторону, с учетом $|\mu|(a_i) \geqslant |\mu(a_i)|$, получим

$$v|\mu|(a) := \sup_{\Pi(a)} \sum_{i=1}^{n} \||\mu|(a_i)\| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\Pi(a)} \sum_{i=1}^{n} \||\mu(a_i)|\| = v\mu(a). \quad ■$$

2°. Пусть $(A,\mathcal{A},m_1)$ – произвольное пространство с σ-конечной

мерой; $(B,\mathcal{B})$ - произвольное измеримое пространство (см.[6,5]); $S(m_1):=S(A,\mathcal{A},m_1)$ - пространство классов эквивалентности п.в. конечных измеримых функций на $(A,\mathcal{A},m_1)$; $E\subset S(m_1)$, E - фундамент; $L_1(m_1):=L_1(A,\mathcal{A},m_1)$ - пространство классов эквивалентности суммируемых функций на $(A,\mathcal{A},m_1)$; $E':=\{l'\in S(m_1):l'E\subset L_1(m_1)\}$; $ba(\mathcal{B},R)$ $(bca(\mathcal{B},R))$ - банахово пространство всех аддитивных (соответственно счётно-аддитивных) мер $\lambda:\mathcal{B}\longrightarrow R$, где норма $\|\lambda\|:=|\lambda|$ - полная вариация λ. Положим $Y:=ba(\mathcal{B},R)$; $Z:=bca(\mathcal{B},R)$; $\mathcal{L}_n(E,Y)$ - K-пространство всех регулярных 0-непрерывных операторов из E в Y (см.[3,4,7,8]); $\mathcal{L}(X_1,X_2)$ - пространство всех линейных ограниченных операторов из банахова пространство X_1 в банахово пространство X_2.

Теорема 2. *Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}_n(E,Y)\cong ba(\mathcal{B},E')$. Если при этом изоморфизме оператору T соответствует мера μ, то*

$$(Tx)(b)=\int x\mu(b)dm_1\qquad (x\in E,\ b\in\mathcal{B}).\tag{1}$$

■ Зафиксируем $b\in\mathcal{B}$ и рассмотрим $T\in\mathcal{L}_n(E,Y)$, $T\geqslant 0$. Пусть $x\in E$, тогда $(Tx)(b):E\longrightarrow R$ и из $x_n\downarrow 0$ следует $(Tx_n)(b)\downarrow 0$. Поэтому существует $y_b\in E'$ такой, что для любого $x\in E$ справедливо представление $(Tx)(b)=\int xy_b dm_1$. Обозначим $\mu(b):=y_b$, тогда $\mu\in ba(\mathcal{B},E')$, $\mu\geqslant 0$, и можно записать $(Tx)(b)=\int x\mu(b)dm_1$. Обратно, мере $\mu\in ba(\mathcal{B},E')$ сопоставим оператор T равенством $(Tx)(b)=\int x\mu(b)dm_1$, очевидно, $T\in\mathcal{L}_n(E,Y)$. Если $\mu\geqslant 0$, то $T\geqslant 0$.■

Следствие. *Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}(L_p,Y)\simeq ba(\mathcal{B},L_q)$, в частности, $\mathcal{L}(L_1,Y)\simeq ba(\mathcal{B},L_\infty)$. Изоморфизм определяется по формуле* (1).

■ Заметим, что в этом случае $\mathcal{L}_n(L_p,Y)\equiv\mathcal{L}(L_p,Y)$. ■

Теорема 3. *Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}_n(E,Z)\simeq bca(\mathcal{B},E')$. Если при этом оператору T соответствует мера μ, то*

$$(Tx)(b)=\int x\mu(b)dm_1\qquad (x\in E,\ b\in\mathcal{B}).\tag{2}$$

■ Пусть оператор $T\in\mathcal{L}_n(E,Y)$ и мера $\mu\in ba(\mathcal{B},E')$ соответствуют друг другу в силу теоремы 2. Если $\operatorname{im}T\subset bca(\mathcal{B},E')$ и последова-

тельность $(b_n) \subset B$, убывая, сходится к нулю, то $\lim\limits_{n \to \infty} (Tx)(bn) = 0$ при всех $x \in E$. Тогда по формуле (1)

$\lim\limits_{n \to \infty} \int x\mu(bn)dm_1 = 0$ $(x \in E)$. Отсюда видно, что $\mu(bn) \longrightarrow 0$

п.в., т.е. $\mu \in bca(B,E')$. Обратное следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.∎

Следствие. *Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}(L_p,Z) \simeq bca(B,L_q)$, в частности, $\mathcal{L}(L_1,Z) \simeq bca(B,L_\infty)$, устанавливаемый формулой (2).*

Назовем случайной мерой функцию от двух переменных $\bar\mu: A \times B \longrightarrow R$ такую, что $\bar\mu(t,\cdot) \in ba(B,R)(t \in A)$, и при любом $b \in B$ $\bar\mu(\cdot,b): A \longrightarrow R$ является измеримой функцией. Обозначим множество всех случайных мер через $sba(A \times B,R)$. Введем в $sba(A \times B,R)$ структуру векторного пространства. Под суммой двух случайных мер $\bar\mu_1,\bar\mu_2$ будем подразумевать случайную меру $\bar\mu$, для которой $\bar\mu(t,b) := \bar\mu_1(t,b) + \bar\mu_2(t,b)$, а под произведением случайной меры $\bar\mu$ на число $\alpha \in R$ – меру $(\alpha\bar\mu)(t,b) := \alpha\bar\mu(t,b)$. Случайная мера $\bar\mu$ положительна, если $\bar\mu(t,b) \geqslant 0$ для любых $t \in A$, $b \in B$. Таким образом, мы превратили $sba(A \times B,R)$ в упорядоченное векторное пространство. Проведем в $sba(A \times B,R)$ факторизацию. Положим, для $\bar\mu_1,\bar\mu_2 \in sba(A \times B,R)$, $\bar\mu_1(\cdot,\cdot) \sim \bar\mu_2(\cdot,\cdot)$, если для любого $b \in B$ $\bar\mu_1(t,b) = \bar\mu_2(t,b)$ для п.в. $t \in A$. В дальнейшем $sba(A \times B,R)$ – пространство классов эквивалентности всех случайных мер. Класс эквивалентности, содержащий случайную меру $\bar\mu(\cdot,\cdot)$, обозначим через $[\bar\mu(\cdot,\cdot)]$, а класс эквивалентности, содержащий измеримую функцию $\bar\mu(\cdot,b) \in S(m_1)$, – через $[\bar\mu(\cdot,b)]$. Часть $sba(A \times B,R)$ такую, что $[\bar\mu(\cdot,b)] \in E'$ при всех $b \in B$, обозначим через $sba_{E'}(A \times B,R)$. Случайной мере $\bar\mu \in sba(A \times B,R)$ можно сопоставить векторную меру $\mu \in ba(B,S(m_1))$ следующим образом: $\mu(b) := [\bar\mu(\cdot,b)]$ $(b \in B)$.

Теорема 4. *Оператор $T \in \mathcal{L}_n(E,Y)$ допускает представление*

$$(Tx)(b) = \int x(t)\bar\mu(t,b)dm_1(t) \quad (x \in E,\ t \in A), \tag{3}$$

где случайная мера $\bar\mu \in sba_{E'}(A \times B,R)$. Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}_n(E,Y) \simeq sba_{E'}(A \times B,R)$, при котором опера-

тору T соответствует класс эквивалентности, содержащий меру $\bar{\mu}$ из представления (3).

■ Так как оператор $T \in \mathcal{L}_n(E,Y)$ допускает представление $(Tx)(b) = \int x\mu(b)dm_1$ с мерой $\mu \in ba(B,E')$, то μ имеет ограниченную вариацию $|\mu|$ и для любого $b \in B$ верно неравенство $\mu(b) \leqslant |\mu|(1)$.

Обозначим $e:= |\mu|(1)$ и рассмотрим идеал $I(e):= \bigcup\limits_{n\in N}[-ne,ne]$. Тогда $\mu(B) \subset I(e)$, существуют изоморфизм $I(e) \simeq L_\infty$ и лифтинг $\rho: L_\infty \longrightarrow \mathcal{L}_\infty$ (см. [8 - 11]). Положим $\bar{\mu}(t,b):= \rho\circ\mu(b)(t)$, тогда $\bar{\mu}(t,b) \in sba_{E'}(A\times B,R)$ и оператор T допускает представление

$$(Tx)(b) = \int x(t)\bar{\mu}(t,b)dm_1(t),$$

что и требовалось.

Следствие. *Формула* (3) *устанавливает алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}(L_p,Y) \simeq sba_{L_q}(A\times B,R)$, в частности,*

$$\mathcal{L}(L_1,Y) \simeq sba_{L_\infty}(A\times B,R).$$

3^0. В дальнейшем нам понадобится следующая

Теорема 4′. *Если $(B,\mathcal{B})$ - стандартное борелевское измеримое пространство, то для любой векторной меры $\mu \in bca(B,E')$ существует случайная мера $\bar{\mu} \in sbca(A\times B,R)$ такая, что при любом фиксированном $b \in B$ класс эквивалентности, содержащий функцию $\bar{\mu}(\cdot,b) \in S(m_1)$, совпадает с элементом $\bar{\mu}(b) \in E'$.*

Этот факт, который сообщил автору С.А.Малюгин, не удалось обнаружить в литературе.

Теорема 5. *Если $(B,\mathcal{B})$ - стандартное борелевское измеримое пространство, то любой оператор $T \in \mathcal{L}_n(E,Z)$ допускает представление*

$$(Tx)(b) = \int x(t)\bar{\mu}(t,b)dm_1(t) \quad (x \in E,\ t \in A), \tag{4}$$

где случайная мера $\bar{\mu} \in sbca_{E'}(A\times B,R)$. Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}_n(T,Z) \simeq sbca_{E'}(A\times B,R)$, при котором оператору T соответствует класс эквивалентности, содержащий случай-

ную меру $\bar{\mu}$ *из представления* (4).

■ По теореме 3 существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}_n(E,Z) \simeq bca(B,E')$ и оператор T допускает представление

$$(Tx)(b) = \int x\mu(b)dm_1 \quad (x \in E,\ b \in B)$$

при некотором $\mu \in bca(B,E')$. По сформулированной выше теореме 4' меру μ можно заменить на случайную меру $\bar{\mu} \in sbca_{E'}(A\times B,R)$ и тогда оператор T допускает представление

$$(Tx)(b) = \int x(t)\bar{\mu}(t,b)dm_1(t).$$

Соответствие между оператором T и классом эквивалентности, содержащим случайную меру $\bar{\mu} \in sbca_{E'}(A\times B,R)$, очевидно, является алгебраическим и решеточным изоморфизмом.■

Следствие. *Формула* (4) *устанавливает алгебраический и решеточный изоморфизм* $\mathcal{L}(L_p,Z) \simeq sbca_{L_q}(A\times B,R)$, *в частности,* $\mathcal{L}(L_1,Z) \simeq sbca_{L_\infty}(A\times B,R)$.

Обозначим через $bca_{m_2}(B,E')$ часть $bca(B,E')$ такую, что $\mu \in bca_{m_1}(B,E')$ тогда и только тогда, когда из $m_2(b) = 0$ следует $\mu(b) = 0 \quad (b \in B)$.

Теорема 6. *Существует алгебраический и решеточный изоморфизм*

$$\mathcal{L}(L_1(A,\mathcal{A},m_1),L_1(B,\mathcal{B},m_2)) \simeq bca_{m_1}(B;L_\infty).$$

Если при этом изоморфизме оператору T *соответствует мера* μ, *то*

$$Tx = \frac{d}{dm_2}\cdot\int x\mu(\cdot)dm_1 \quad (x \in L_1(m_1)). \tag{5}$$

■ Положим $\tilde{Z} := \{m_2\}^{dd} \subset Z$ и рассмотрим операторы $T \in \mathcal{L}(L_1(m_1),L_1(m_2))$ и $\tilde{T} \in \mathcal{L}_n(L_1(m_1),\tilde{Z})$, связанные соотношением

$$\tilde{T} := \left(\frac{d}{dm_2}\right)^{-1}\circ T \quad \left(\text{или } T = \frac{d}{dm_2}\tilde{T}\right).$$

По следствию из теоремы 3 оператору $\tilde{T}$ можно сопоставить меру

$\mu \in bca_{m_2}(B,L_\infty)$ такую,что $\tilde{T}x = \int x\mu(\cdot)dm_1 \quad (x \in L_1(m_1))$. Соответствие $\tilde{T} \longleftrightarrow \mu$ является алгебраическим и решеточным изоморфизмом. Тогда

$$Tx = \frac{d}{dm_2} \circ \tilde{T}x = \frac{d}{dm_2} \int x\mu(\cdot)dm_1,$$

что и требовалось. ■

Простым следствием теоремы 6 и теоремы С.А.Малюгина является следующий классический результат (ср.[5], с.544, следствие 9).

Теорема 7. *Если $(B,\mathcal{B})$ – стандартное борелевское измеримое пространство, то оператор $T \in \mathcal{L}(L_1(m_1),L_1(m_2))$ допускает представление*

$$Tx = \frac{d}{dm_2} \int x(t)\tilde{\mu}(t,b)dm_1(t), \tag{6}$$

где $\tilde{\mu} \in sbca_{m_2}(A\times\mathcal{B},R)$. Существует алгебраический и решеточный изоморфизм $\mathcal{L}(L_1(m_1),L_1(m_2)) \simeq sbca_{m_2}(A\times\mathcal{B},R)$, при котором оператору T соответствует класс эквивалентности, содержащий случайную меру $\tilde{\mu}$ из представления (6).

■ С привлечением теоремы 6 и теоремы А.С.Малюгина доказательство аналогично доказательству теоремы 5.■

4^0. Пусть $(A,\mathcal{A},\mu)$ – произвольное пространство с мерой, $(Y,|\cdot|,F)$ – произвольное ПБК. Обозначим $L_p(\mu):= L_p(A,\mathcal{A},\mu)$ $(p \geqslant 1)$, $M(L_p(\mu),Y)$ – совокупность всех мажорируемых (см.[4]) операторов из $L_p(\mu)$ в Y, $SM(L_p(\mu),Y)$ – совокупность всех субмажорируемых операторов из $L_p(\mu)$ в Y (см. [3]). Рассмотрим векторную меру $\nu:\mathcal{A} \longrightarrow Y$. По определению (см.[11,12]), векторная мера ν имеет ограниченную векторную q-вариацию (ограниченную векторную q-полувариацию), $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, если для любого $A \in \mathcal{A}$ существует $\bar{\nu}_q(a):= \sup\sum_{i=1}^{n}|a_i\nu(a_i)|$ (соответственно существует

$\tilde{\nu}_q(a) := \sup|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(a_i))$, где супремумы берем по всем функциям $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{a_i}$, $a_i \cap a_i = \emptyset$ при $i \neq j$, $a_i \in \mathcal{A}$ $(i=1,\ldots,n)$, $a = \bigcup_{i=1}^{n} a_i \in \mathcal{A}$, $\|\varphi\|_{L_p(\mu)} \leqslant 1$. Здесь 1_a – характеристическая функция множества a. Очевидно, $\bar{\nu}_q, \tilde{\nu}_q : \mathcal{A} \longrightarrow F$, $\bar{\nu}_q \geqslant \tilde{\nu}_q \geqslant 0$. Кроме того, легко видеть, что $\bar{\nu}_q, \tilde{\nu}_q$ субаддитивны, т.е. $\bar{\nu}_q, \tilde{\nu}_q$ – субмеры.

Отметим одно свойство $\bar{\nu}_q, \tilde{\nu}_q$, которое нам понадобится в дальнейшем: для $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{a_i}$, $a_i \cap a_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$, $a_i \in \mathcal{A}$ $(i=1,\ldots,n)$ справедливы мажорантные неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \nu(a_i)| \leqslant \bar{\nu}_q(A) \cdot \|\varphi\|_{L_p(\mu)},$$

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(a_i)| \leqslant \tilde{\nu}_q(A) \cdot \|\varphi\|_{L_p(\mu)},$$

за исключением случая $\bar{\nu}_q(A) = \infty$ и $\|\varphi\|_{L_p(\mu)} = 0$ (соответственно $\tilde{\nu}_q(F) = \|\varphi\|_{L_p(\mu)} = 0$).

Теорема 8. *Существует биекция между мажорируемыми операторами с абстрактной нормой $T: L_p(A, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow Y$ и векторными мерами $\nu: \mathcal{A} \longrightarrow Y$ ограниченной векторной q-полувариации.*

■ Пусть $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow Y$ – мера ограниченной векторной q-полувариации. Сопоставим мере ν оператор $T: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ следующим образом: для

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{a_i}, \; a_i \in \mathcal{A},$$

положим

$$T\varphi := \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \nu(a_i) =: \int \varphi d\nu \in Y.$$

Из мажорантного неравенства

$$|T\varphi| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(a_i)| \leqslant \tilde{\nu}_q(A) \cdot \|\varphi\|_{L_p(\mu)}$$

следует, что T можно продолжить на все $L_p(\mu)$ и полученный оператор $T: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ является субмажорируемым оператором с абстрактной нормой. В качестве субмажоранты $H: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ можно взять $P(\varphi) = \tilde{\nu}_q(A) \cdot \|\varphi\|_{L_p(\mu)}$. Обратно, субмажорируемому оператору с абстрактной нормой $T: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ сопоставим векторную меру $\nu: \mathcal{A} \longrightarrow Y$ следующим образом: $\nu(a) := T(1a)$ $(a \in \mathcal{A})$. Тогда

$$\tilde{\nu}_q(a) := \sup|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(a_i)| = \sup |T\varphi| < \infty,$$

что и требовалось. Супремум взят по всем функциям $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{a_i}$, $a = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in \mathcal{A}$, $a_i \cap a_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $\|\varphi\|_{L_p(\mu)} \leqslant 1$. ■

Замечания. 1. Мажорируемому оператору $T: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ можно сопоставить векторную меру $\nu: \mathcal{A} \longrightarrow Y$ ограниченной векторной q-вариации равенством $\nu(a) := T(1a)$ $(a \in \mathcal{A})$. В этом случае $\bar{\nu}_q(a) \leqslant |T|(1a)$.

2. Если Y – банахово пространство, то из доказанного следует теорема об изоморфизме между ограниченными операторами $T: L_p(\mu) \longrightarrow Y$ и векторными мерами ограниченной векторной q-полувариации $\nu: \mathcal{A} \longrightarrow Y$ (см. [11], с.251, теорема 1).

Автор приносит благодарность А.Г.Кусраеву за внимание к работе.

Литература

1. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

2. **Кусраев А.Г., Малюгин С.А.** Некоторые вопросы теории векторных мер. - Новосибирск: изд.Института математики СО АН СССР, 1988.

3. **Кусраев А.Г.** Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии "в целом" и математическому анализу. - Новосибирск: Наука, 1987. - С.84-123.

4. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.

5. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962.

6. **Халмош П.** Теория меры. - М.: ИЛ, 1953.

7. **Кусраев А.Г., Стрижевский В.З.** Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и анализу. - Новосибирск: Наука, 1987. - С.132-158.

8. **Кусраев А.Г.** Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.

9. **Левин В.Л.** Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. - М.: Наука, 1985.

10. **Ionescu-Tulcea A., Ionescu-Tulcea C.** Topics in the theory of lifting. - Berlin a.o.: Springer, 1969.

11. **Dinculeanu N.** Vektor measures. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

12. **Diestel J., Uhl J.J.** Vector measures. - Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.01.1990 г.