Выпуск 47(64) ОПТИМИЗАЦИЯ 1990 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ИДЕАЛАХ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Б.Чердак

В заметке исследуется вопрос о существовании инвариантных идеалов компактных мажорируемых операторов. В обозначениях и терминологии мы будем следовать [1-3].

Введем необходимые нам в дальнейшем определения. Пусть далее E - порядково полная банахова решетка ($\dim E > 1$), (X,p,E) - банахово пространство со смешанной нормой [2]. Подпространство $I \subset X$ назовем слабым идеалом в X, если $p(I)$ - нормальное подмножество в E. Пусть $T \in M(X)$. Идеал $I \subset X$ назовем T-инвариантным, если $Tx \in I$ для любого $x \in I$. Если спектральный радиус оператора T равен нулю, то такой оператор назовем квазинильпотентным. Заметим, что если мажоранта оператора $T \in M(X)$ - квазинильпотентный оператор, то T - также квазинильпотентный оператор. Обратное в общем случае неверно.

Теорема. *Пусть $T \in M(X)$ - ненулевой компактный оператор с квазинильпотентной точной мажорантой. Тогда в X существует T-инвариантный слабый идеал.*

Доказательство. Пусть

$$C(T) = \{0 \leqslant R \in \mathcal{L}(E) : R|T| = |T|R\},$$

$$A^+ = \{0 \leqslant S \in \mathcal{L}(E) : \exists\, R \in C(T),\ 0 \leqslant S \leqslant R\}.$$

Обозначим

$$B = \{M \in M(X) : |M| \in A^+\}.$$

Тогда B - линейное подпространство в $M(X)$. Действительно, для

любых $M_1, M_2 \in B$ имеем $|M_1 + M_2| \leqslant |M_1| + |M_2| \in A^+$, однородность доказывается аналогично.

Кроме того, заметим, что $T \in B$ и для любого $M \in B$ оператор $TM \in B$.

Так как E – банахова решетка, то центр E совпадает с множеством всех ортоморфизмов на E. Банахова алгебра $M(X)$ будет модулем над кольцом $Z(E)$. Для любого $\pi \in Z(E)$ оператор $\pi M \in B$, если $M \in B$. Действительно, $|\pi M| = |\pi||M| = |\pi|S \in A^+$.

Для ненулевого $x_0 \in X$ определим

$$B[x_0] = \{Mx_0 : M \in B\}.$$

Множество $B[x_0]$ – T-инвариантное подпространство в X. Действительно, для любого $y \in B[x_0]$ существует $M \in B$ такой, что $y = Mx_0$. Тогда $Ty = TMx_0 \in B[x_0]$, так как $TM \in B$. Заметим, что $x_0 \in B[x_0]$.

Покажем, что $B[x_0]$ – слабый идеал в X. Действительно, пусть $f \in p(B[x_0])$ и пусть $e \in E$, $0 \leqslant e \leqslant f$, тогда существует такой $M \in B$, что $f = p(Mx_0)$. Так как E – порядково полная банахова решетка, то существует такой $\pi_0 \in Z(E)$, что $e = \pi_0 f$ (это следует из теоремы Фрейдентала). Отсюда имеем $e = \pi_0 f = \pi_0 p(Mx_0) = p(\pi_0 Mx_0)$. Таким образом, $e \in p(B[x_0])$, поэтому $B[x_0]$ – слабый идеал в X. Тогда его замыкание $\overline{B[x_0]}$ также будет T-инвариантным слабым идеалом в X.

Покажем теперь существование замкнутого нетривиального T-инвариантного идеала в X. Для этого достаточно показать, что существует $x \in X$ такой, что $\overline{B[x]} \neq X$. Предположим, что это не так, т.е. $\overline{B[x]} = X$ для любого $x \in X$. Выберем $x_0 \in X$ так, чтобы

$$\|x_0\| > 1 \text{ и } \|Tx_0\| > 1.$$

Для простоты можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$.

Пусть U – открытый шар в X единичного радиуса с центром x_0. Так как T – компактный оператор, то $K = \overline{TU}$ – компакт. Любой $x \in U$ представим в виде $x = x_0 + z$, где $\|z\| < 1$. Если $y = Tx$, то $y = Tx_0 + Tz$ и $\|Tz\| \leqslant 1$. Следовательно,

$$\|y\| \geqslant \|Tx_0\| - \|Tz\| \geqslant \|Tx_0\| - 1 = \delta > 0,$$

откуда для любого $y \in K$ имеем

$$\|y\| \geqslant \delta > 0, \tag{*}$$

где δ не зависит от y.

Так как, по предположению, $B[x] = X$ для любого $\overline{x \in X}$, то $B[x] \cap U \neq \varnothing$ и, следовательно, для любого ненулевого $x \in X$ существует такой $M \in B$, что $Mx \in U$, откуда

$$\bigcup_{M \in B} M^{-1}(U) = X \setminus \{0\}.$$

В силу (*) имеем $K \subset X \setminus \{0\}$, откуда $\{M^{-1}(U) : M \in B\}$ – открытое покрытие компакта K. Выберем из него конечное подпокрытие

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} M_i^{-1}(U).$$

Возьмем точку x_0, выбранную выше. Так как $Tx_0 \in TU \subset K$, то найдется i_1, $i \leqslant i_1 \leqslant m$, для которого $Tx_0 \in M_{i_1}^{-1}(U)$. Тогда определим $x_1 = M_{i_1}(Tx_0) \in U$. Аналогично, найдется i_2, $1 \leqslant i_2 \leqslant m$, для которого $x_2 = M_{i_2}(Tx_1)$, и так далее. Получим последовательность $\{x_n\} \subset U$ такую, что

$$x_n = M_{i_n} T M_{i_{n-1}} T \ldots T M_{i_1} T x_0.$$

Оценим векторную норму элементов последовательности $\{x_n\}$.

Пусть

$$|M_{i_k}| = S_{i_k} \leqslant R_{i_k} \qquad (1 \leqslant i_k \leqslant m,\ S_{i_k} \in A^{+},\ R_{i_k} \in C(T));$$

$$p(x_n) = p(M_{i_n} T \ldots T M_{i_1} T x_0) \leqslant$$

$$\leqslant |M_{i_n}|\ |T|\ |M_{i_{n-1}}|\ |T| \ldots |T|\ |M_{i_1}|\ |T| p(x_0) \leqslant$$

$$\leqslant R_{i_n} |T|\ R_{i_{n-1}} |T| \ldots |T|\ R_{i_1} |T| p(x_0).$$

Учитывая перестановочность R_{i_k} и $|T|$, получим

$$p(x_n) \leqslant R_{i_n} R_{i_{n-1}} \ldots R_{i_1} |T|^n p(x_0).$$

Пусть $D = \max_{i \leqslant i_k \leqslant m} \|R_{i_k}\|$, тогда $\|x_n\| \leqslant D^n \| |T|^n \| \|x_0\|$, откуда $\|x_n\|^{1/n} \leqslant D \| |T|^n \|^{1/n} \|x_0\|^{1/n}$.

Отсюда имеем $(x_n) \longrightarrow 0$, т.е. $\{0\} \in K$, что противоречит (*). Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы использована предложенная Б. де Пагтером [4] модификация доказательства Хильдена теоремы В.И.Ломоносова [5].

Следствие 1. *Если E - банахова решетка, $T \in \mathcal{L}^r(E)$ - ненулевой компактный оператор с квазинильпотентным модулем, то в E существует нетривиальный T-инвариантный идеал.*

Сохраняющий дизъюнктность оператор $T \in M(X)$ назовем d-гомоморфизмом, если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$p(T) = |T| p(x).$$

Следствие 2. *Если T - d-гомоморфизм, то для любого ненулевого компактного квазинильпотентного оператора T существует транслированный T-инвариантный идеал.*

Литература

1. **Кусраев А.Г.** Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.

2. **Кусраев А.Г.** Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние, 1987. - Т.9. - С. 84-123.

3. **Кусраев А.Г., Стрижевский В.З.** Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и анализу. Тр. Ин-та математики СО АН СССР. - Т.7. - 1987. - С.132-158.

4. **Pagter B.de.** Irreducible compact operators // Math. Z. - 1986. - Bd.192. - S.149-153.

5. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.03.1990 г.