Выпуск 47(64) ОПТИМИЗАЦИЯ 1990 г.

Теория игр

УДК 519.8

О РЕГУЛЯРНОСТИ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

М.Г.Зуев

0. Пусть $\langle Q,\rho\rangle$ – метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Следующий результат является одним из основных в теории меры на топологических пространствах (см.,например, [1, с.15]):

Пусть $\mu : \Sigma \longrightarrow R$ – σ-аддитивная мера ограниченной вариации. Тогда μ регулярна, т.е.

$$|\mu|(e) = \sup\{|\mu|(f) : f \subseteq e, f \text{ замкнуто}\} \quad (e \in \Sigma), \tag{1}$$

где $|\mu|$ – полная вариация меры μ.

Тот факт, что значение неотрицательной регулярной меры на любом множестве $e \in \Sigma$ можно сколь угодно точно представить с помощью значений этой меры на замкнутых подмножествах e (или открытых надмножествах e), широко используется во многих важных теоремах теории меры. Представляется желательным распространить этот результат на неаддитивные борелевские функции множества. Такая постановка диктуется, в частности, потребностями теории игр с континуумом участников, например задачей построения бесконечномерного аналога вектора Шепли [2,3]. Кроме того, это распространение представляет интерес и с общематематической точки зрения.

Первый вопрос, возникающий при распространении соотношения (1) на неаддитивные функции множества, заключается в следующем: в каком смысле следует понимать регулярность неаддитивной функции?

Дело в том, что определение регулярности аддитивной функции μ использует понятие полной вариации. Для неаддитивных функций существует несколько определений полной вариации (см.,например, [2,4]). В случае, когда варьируется аддитивная функция, все эти определения совпадают с обычным определением полной вариации (см.[5]), однако для неаддитивных функций они существенно отличаются друг от друга. Мы будем придерживаться определения полной полиномиальной вариации из [2], которое, на наш взгляд, наиболее конструктивно отражает степень неаддитивности функции множества. Там же было введено понятие регулярности неаддитивной функции в терминах этой вариации, которым мы будем пользоваться в настоящей статье.

Вообще говоря, даже при фиксированном выборе определения полной вариации регулярность неаддитивной функции можно трактовать по-разному. Однако у нас есть некоторые основания считать определение 2.1. из [2] наиболее адекватным обобщением понятия регулярной аддитивной функции (см.замечание 3).

Второй вопрос состоит в нахождении естественного условия, которому должна удовлетворять неаддитивная функция, чтобы быть регулярной. Регулярность аддитивной функции следует из ее σ-аддитивности. (В случае, когда $\langle Q,\rho\rangle$ – метрический компакт, верно и обратное утверждение: любая регулярная аддитивная борелевская функция является σ-аддитивной). В свою очередь, σ-аддитивность аддитивной функции μ эквивалентна следующему свойству, называемому непрерывностью относительно теоретико-множественой сходимости (или σ-непрерывностью): для любого $e \in \Sigma$ и любой последовательности $\{e_n\}_{n\in N}$ элементов Σ, сходящейся к e в теоретико-множественном смысле, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mu(e_n) = \mu(e).$$

Именно условие σ-непрерывности естественно распространить на неаддитивные функции множества.

Статья состоит из введения и четырех пунктов. В п.1 приведе-

ны все необходимые для дальнейшего сведения. В п.2 доказываются две вспомогательные леммы о σ-непрерывности неаддитивных функций множества. В п.3 доказываются теоремы 1 и 2, а также следствия из них, которые и содержат обобщение формулы (1) на неаддитивные функции. Подчеркнем, что важную роль в доказательствах играют некоторые теоретико-игровые факты, касающиеся C-ядра кооперативной игры. В п.4 даются более сильные формулировки теоремы об аналитичности регулярных функций множества из [2] и теоремы об опорной функции ядра выпуклой регулярной игры из [6], вытекающие из теоремы 2 об эквивалентности условий регулярности и σ-непрерывности для функций ограниченной полиномиальной вариации.

1. Пусть $\langle Q,\Sigma\rangle$ – измеримое пространство, где Q – непустое множество, Σ – алгебра подмножеств Q. Через W обозначим совокупность всех функций $v:\Sigma \longrightarrow R$, удовлетворяющих условию $v(\emptyset) = 0$. Для $v \in W$ определим рекуррентным образом последовательные полиномиальные разности относительно конечных наборов попарно-непересекающихся элементов $e_i \in \Sigma$ $(i = 1,2,\dots,n,$ $n \in N)$:

$$v_1(e_1) = v(e_1);$$

$$v_2(e_1,e_2) = v(e_1 \cup e_2) - v(e_1) - v(e_2);$$

$$v_{n+1}(e_1,\dots,e_n,e_{n+1}) = v_n(e_1,\dots,e_n \cup e_{n+1}) -$$

$$- v_n(e_1,\dots,e_n) - v_n(e_1,\dots,e_{n-1},e_{n+1}).$$

Обозначая через $\Xi(e)$ совокупность всех конечных Σ-измеримых разбиений элемента $e \in \Sigma$, положим

$$v_\omega^\eta = v_k(e_{i_1},\dots,e_{i_k}),\ \text{где}\ \eta = \{e_1,\dots,e_n\} \in \Xi(e),$$

$$\omega = \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq N^\eta = \{1,\dots,n\}.$$

Нетрудно проверить, что для всех $e \in \Sigma$ и $\eta \in \Xi(e)$ справедливо тождество

$$v(e) = \sum_{\omega\subseteq N^\eta} v_\omega^\eta.$$

Будем говорить, что функция $v \in W$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если

$$\|v\|_o = \sup\left\{ \sum_{\omega\subseteq N^\eta} |v_\omega^\eta| \; : \; \eta \in \Xi\,(Q)\right\} < \infty.$$

Совокупность всех функций ограниченной полиномиальной вариации обозначим через $V(Q,\Sigma)$ (или просто через V, если ясно, о каком измеримом пространстве идет речь).

Множество $V(Q,\Sigma)$, наделенное операциями поточечного сложения и умножения на скаляры, а также полуупорядоченностью, порожденной конусом вполне положительных элементов

$$V_+ = \left\{ v \in V \; : \; v_\omega^\eta \geqslant 0 \quad \text{для любых} \quad \eta \in \Xi(Q),\ \omega \subseteq N^\eta \right\},$$

является линейным полуупорядоченным пространством [2]. В частности, для каждого элемента $v \in V$ определены положительная, отрицательная и полная вариации

$$v^+ = v \bigvee \mathbb{0}, \quad v^- = (-v) \bigvee 0, \quad |v| = v \bigvee (-v).$$

Как известно, в линейном полуупорядоченном пространстве имеют место соотношения

$$|v| = v^+ + v^-, \quad v = v^+ - v^-.$$

Кроме того, будем использовать следующую формулу из [2]:

$$|v|(e) = \sup\left\{ \sum_{\omega\subseteq N^\eta} |v_\omega^\eta| \; : \; \eta \in \Xi(e)\right\} \quad (e \in \Sigma).$$

Так как для аддитивных функций полиномиальная вариация совпадает с обычной полной вариацией, то в дальнейшем множество аддитивных функций ограниченной полиномиальной вариации будем обозначать через $V^1(Q,\Sigma)$.

Замечание 1. Пространство $V(Q,\Sigma)$ было введено В.А.Васильевым в [6] в связи с изучением полиномиальных функций множества и бесконечномерных аналогов вектора Шепли. Многие основные струк-

турные свойства этого пространства, а также некоторых подпространств V исследованы в [2,3,6,7]. Все сведения о функциях ограниченной полиномиальной вариации, приводимые здесь и далее, можно найти в перечисленных выше статьях.

Теперь дадим основное для данной статьи

Определение 1. Пусть $\langle Q,\Sigma\rangle$ – измеримое пространство. Функция $v \in W$ называется:

а) непрерывной в Q (в $\emptyset$), если для любой монотонно возрастающей (убывающей) последовательности $\{e_n\}_{n\in N} \subseteq \Sigma$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n = Q$ $(\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \emptyset)$, имеет место $\lim_{n\to\infty} v(e_n) = v(Q)$ $(v(\emptyset))$;

б) непрерывной вверх (вниз), если для любого $e \in \Sigma$ и любой монотонно возрастающей (убывающей) последовательности $\{e_n\}_{n\in N} \subseteq \Sigma$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n = e$ $(\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = e)$, имеет место $\lim_{n\to\infty} v(e_n) = v(e)$;

в) σ-непрерывной, если для любого $e \in \Sigma$ и любой последовательности $\{e_n\}_{n\in N} \subseteq \Sigma$, сходящейся к e в теоретико-множественном смысле, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} v(e_n) = v(e).$$

Отметим, что в некоторых работах по теории игр (например, в [8]) под σ-непрерывностью понимается более слабое свойство непрерывности вверх и вниз одновременно. Более подробному обсуждению свойств σ-непрерывных функций посвящен п.2 настоящей статьи.

Одним из важнейших понятий кооперативной теории игр является понятие C-ядра. Напомним, что кооперативной игрой называется тройка

$$\Gamma = \langle Q,\Sigma,v\rangle,$$

где $\langle Q,\Sigma\rangle$ – измеримое пространство, а $v \in W$. В дальнейшем будем отождествлять игру Γ с функцией v, порождающей Γ.

Определение 2 (ср.[6,9]). C-ядром кооперативной игры $\Gamma = \langle Q,\Sigma,v\rangle$ называется множество

$$C(v) = \{\mu \in V^1 : \mu(Q) = v(Q),\ \mu(e) \geqslant v(e)\ (e \in \Sigma)\}.$$

Сформулируем важные для дальнейшего свойства C-ядра. Для

этого нам понадобятся некоторые сведения о функциях, заданных на решетках подмножеств множества Q [1].

Определение 3. Пусть $\mathcal{L}$ – решетка подмножеств Q. Функция $\lambda:\mathcal{L} \longrightarrow R$ называется:

а) супермодулярной, если $\lambda(e_1 \cup e_2)+\lambda(e_1 \cap e_2) \geqslant \lambda(e_1)+\lambda(e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$;

б) субмодулярной, если $\lambda(e_1 \cup e_2)+\lambda(e_1 \cap e_2) \leqslant \lambda(e_1)+\lambda(e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$;

в) модулярной, если λ супермодулярна и субмодулярна одновременно.

В случае, когда $\mathcal{L}$ является алгеброй и $\lambda(\emptyset) = 0$, функция λ, удовлетворяющая одному из условий а) – в), называется выпуклой, вогнутой, аддитивной соответственно.

В изучении выпуклых функций ключевую роль играет

Теорема о сандвиче [9]. *Пусть $\mathcal{L}$ – $\emptyset$-решетка подмножеств Q; L – подрешетка $\mathcal{L}$, $\beta : \mathcal{L} \longrightarrow R$ – субмодулярная функция, $\beta(\emptyset) = 0$, $\gamma : L \longrightarrow R$ – супермодулярная функция и $\gamma \leqslant B$ на L. Тогда существует модулярная функция $\mu : \mathcal{L} \longrightarrow R$ такая, что $\mu \leqslant \beta$ на $\mathcal{L}$ и $\gamma \leqslant \mu$ на L.*

Из теоремы о сандвиче вытекает известное

Предложение 1. *Пусть $v \in W$ – выпуклая функция. Тогда $C(v) \neq \emptyset$ и при этом*

$$v(e) = \min \{\mu(e) : \mu \in C(v)\} \quad (e \in \Sigma).$$

Напомним, система подмножеств Z множества Q называется цепью, если Z линейно-упорядочено по включению. Введем обозначение

$$C(v,Z) = \{\mu \in C(v) : \mu(e) = v(e) \ (e \in Z)\}.$$

Предложение 2 [9,10]. *Пусть $v \in W$ – неотрицательная функция. Для того чтобы v была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы*

---

[1] Система подмножеств $\mathcal{L}$ называется решеткой, если для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ имеет место $e_1 \cup e_2$, $e_1 \cap e_2 \in \mathcal{L}$. Если, в дополнение, $\emptyset \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ называется $\emptyset$-решеткой.

$C(v,Z) \neq \emptyset$ *для любой цепи* $Z \subseteq \Sigma$.

Пусть $v \in W$ – неотрицательная выпуклая функция. Определим функцию v^*, называемую иногда сопряженной к v [4], следующим образом: $v^*(e) = v(Q\setminus e)$ $(e \in \Sigma)$. Непосредственно из определения $C(v)$ и v^*, а также из предложения 1 вытекает

Предложение 3. *Если* $v \in W$ – *выпуклая неотрицательная функция, то функция* v^* *обладает следующими свойствами:*

а) $v^*(\emptyset) = 0$ *и* $v^*(Q) = v(Q)$;

б) v^* – *неотрицательная монотонная вогнутая функция;*

в) $C(v) = \{\mu \in V^1 : \mu(Q) = v(Q),\ \mu(e) \leqslant v^*(e)\}$ $(e \in \Sigma)$;

г) $v^*(e) = \max\{\mu(e) : \mu \in C((v)\}$ $(e \in \Sigma)$.

Пусть теперь Σ – борелевская σ-алгебра топологического пространства Q, а $\hat{Q}$ обозначает совокупность замкнутых подмножеств Q. Положим для $e \in \Sigma$

$$\hat{e} = \{f \in \hat{Q} : f \subseteq e\};$$

$$\check{e} = \{g \subseteq Q : g \supseteq e \text{ и } g \text{ открыто}\}.$$

Очевидно, что для любого $e \in \Sigma$ $\hat{e}$ и $\check{e}$ являются решетками подмножеств Q.

Определение 4 [2]. Функция $v \in V(Q,\Sigma)$ называется регулярной, если для любых $n \geqslant 1$, $\eta = \{e_1,\ldots,e_n\} \in \Xi(e)$, $e \in \Sigma$, верно равенство

$$|v|_n(e_1,\ldots,e_n) = \sup\{|v|(f_1,\ldots,f_n) : f_i \in \hat{e}_i,\ i = 1,\ldots,n\}. \quad (2)$$

Подпространство всех регулярных функций $v \in V$ будем обозначать через rV. Многие интересные свойства функций из rV можно найти в [2].

2. Здесь мы рассмотрим некоторые условия, гарантирующие σ-непрерывность функций из $V(Q,\Sigma)$. Выше уже указывалось, что для аддитивных функций σ-непрерывность эквивалентна σ-аддитивности. На самом деле для σ-непрерывности аддитивной функции необходимым и достаточным является условие непрерывности этой функции в $\emptyset$ (или в Q) [5]. Для σ-непрерывности неаддитивных функций этого условия уже недостаточно, как показывает следующий простой

пример:

$$I(e) = \begin{cases} 1, \text{ если } e = Q; \\ 0, \text{ если } e \neq Q. \end{cases}$$

Эта функция выпукла и непрерывна в $\emptyset$, однако не является непрерывной в Q. Для неотрицательных выпуклых функций можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $v : \Sigma \longrightarrow R_+$ – выпуклая функция, непрерывная в Q. Тогда v σ-непрерывна.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что $C(v) \neq \emptyset$ и состоит из σ-аддитивных мер (см.[8, с.123]). Используя этот факт, можно доказать, что v непрерывна вверх и вниз. Фиксируем $e \in \Sigma$, и пусть $e_n \nearrow e$ $(e_n \searrow e)$. Тогда система подмножеств $Z = \{e_n, e\}_{n \in N}$ образует цепь. Согласно предложению 2, существует мера $C(v,Z)$. Используя σ-непрерывность функции μ, получаем

$$\lim_{n \to \infty} v(e_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(e_n) = \mu(e) = v(e),$$

что и требовалось. Теперь для доказательства σ-непрерывности v достаточно повторить рассуждение из [5, с.33-34], проведенное там для случая аддитивной функции. При этом используется тот факт, что выпуклая неотрицательная функция монотонна.

Замечание 2. Результат, содержащийся в лемме 1, скорее всего известен, но нам не удалось найти точной ссылки.

Лемма 2 (см.также [7]). *Пусть $v \in V(Q,\Sigma)$ – непрерывная вверх функция. Тогда v σ-непрерывна.*

Доказательство. Поскольку функция $|v| \in V_+$, то она выпукла. Это сразу следует из того, что для любой функции $u \in V_+$

$$u(e_1 \cup e_2) + u(e_1 \cap e_2) - u(e_1) - u(e_2) = u_2(e_1 \setminus e_2, e_2 \setminus e_1) +$$
$$+ u_3(e_1 \setminus e_2, e_2 \setminus e_1, e_1 \cap e_2) \geqslant 0.$$

Докажем, что функция $|v|$ непрерывна в Q. Пусть $e_n \nearrow Q$. Так как функция $|v|$ монотонна, то $\lim_{n \to \infty} |v|(e_n)$ существует и не превосходит $|v|(Q)$. Справедливо и обратное неравенство

$$|v|(Q) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} |v|(e_n). \tag{3}$$

Действительно, возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и такое $\eta_\varepsilon = \left\{a_1, \ldots, a_{m_\varepsilon}\right\} \in \Xi(Q)$, что

$$\sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq N^{h_\varepsilon}} |v_s(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})| \geqslant |v|(Q) - \varepsilon.$$

Так как $\eta_\varepsilon \in \Xi(Q)$, то разбиение $\{a_1 \cap e_n, \ldots, a_{m_\varepsilon} \cap e_n\}$ принадлежит $\Xi(e_n)$ $(n \in N)$ и, учитывая непрерывность вверх функции v, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq N^{\eta_\varepsilon}} |v_s(a_{i_1} \cap e_n, \ldots, a_{i_s} \cap e_n)| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} |v|(e_n).$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq N^{\eta_\varepsilon}} |v_s(a_{i_1} \cap e_n, \ldots, a_{i_s} \cap e_n)| =$$

$$= \sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq N^{\eta_\varepsilon}} |v_s(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})| \geqslant |v|(Q) - \varepsilon.$$

Следовательно, $\varliminf_{n \to \infty} |v|(e_n) \geqslant |v|(Q) - \varepsilon$, откуда, в силу произвольности ε, следует неравенство (3). Таким образом, функция v непрерывна в Q, что и требовалось. Теперь, используя лемму 1, заключаем, что $|v|$ σ-непрерывна. Остается вспомнить соотношения

$$|v| + v = 2v^+, \ |v| - v = 2v^-, \ v = v^+ - v^-$$

и завершить доказательство леммы 2.

Отметим, что лемма 2 фактически содержится в [7].

3. **Теорема 1.** *Пусть* $\langle Q, \rho \rangle$ *– метрическое пространство с борелевской* σ*-алгеброй* Σ, $v \in W$ *– неотрицательная выпуклая функция. Если* v *непрерывна в* Q, *то*

$$v(e) = \sup \{v(f): f \in \hat{e}\} \quad (e \in \Sigma).$$

Доказательство. Если v^* есть сопряженная к v функция, то

$$\sup\{v(f): f \in \hat{e}\} = \sup\{v(Q) - v^*(Q \setminus f): f \in \hat{e}\} =$$
$$= v(Q) - \inf\{v^*(g): g \in Q \check{\setminus} e\},$$

где

$$Q \check{\setminus} e = \{g \subseteq Q: Q \setminus e \subseteq g, \ g \text{ открыто}\}.$$

Таким образом, если мы решим "двойственную" задачу, т.е. докажем, что для любого $e \in \Sigma$

$$v^*(e) = \inf\{v^*(g): g \in \check{e}\},$$

мы докажем теорему 1. Фиксируем $e_0 \in \Sigma$ и определим на решетке $\check{e}$ супермодулярную функцию γ

$$\gamma(g) = \begin{cases} \inf\limits_{\tilde{g} \in \check{e}_0} v^*(\tilde{g}), & \text{если } g \neq Q, \\ v^*(Q), & \text{если } g = Q. \end{cases}$$

Тогда γ не превосходит v^* на $\check{e}_0$. Учитывая, что v^* – вогнутая функция (см. предложение 3), и применив теорему о сандвиче к функциям γ и v^*, заключаем, что существует $\mu_0 \in V^1$ такая, что $\mu_0 \leqslant v^*$ на Σ и $\gamma \leqslant \mu_0$ на $\check{e}_0$. Тогда $\mu_0(Q) \in v^*(Q)$ и $\mu_0(e) \leqslant v^*(e)$ $(t \in \Sigma)$. Следовательно, $\mu_0 \in C(v)$ (см. предложение 3). Поскольку v непрерывна в Q, все элементы $C(v)$ суть σ-аддитивные функции. Любая σ-аддитивная функция, заданная на борелевской алгебре метрического пространства, регулярна (см.,например, [1]).

Следовательно,

$$\inf_{\tilde{g} \in \check{e}_0} \mu_0(\tilde{g}) = \mu_0(e_0).$$

С другой стороны,

$$\inf_{\tilde{g} \in \check{e}_0} \mu_0(\tilde{g}) = \inf_{\tilde{g} \in \check{e}_0} v^*(\tilde{g}) \geqslant v^*(e_0),$$

поскольку v^* – монотонная функция. Учитывая неравенство $\mu_0(e_0) \leqslant v^*(e_0)$, заключаем, что

$$\mu_0(e_0) = \inf_{\tilde{g}\in\check{e}_0} v^*(\tilde{g}) = v(e_0),$$

что и требовалось. Ввиду произвольности выбора $e_0 \in \Sigma$ доказательство закончено.

Следствие 1. Пусть $\langle Q,\rho\rangle$ – *метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Если $v \in V(Q,\Sigma)$ непрерывна вверх, то*

$$|v|(e) = \sup\{|v|(f):f \in \hat{e}\} \quad (e \in \Sigma).$$

Доказательство. При доказательстве леммы 2 было показано, что в условиях следствия 1 функция $|v|$ является σ-непрерывной и выпуклой. Осталось применить к функции $|v|$ теорему 1.

Если в дополнение к условиям следствия 1 потребовать, чтобы Q было гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству (т.е. являлось польским пространством), то справедливо

Следствие 2. *Пусть Q – польское пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Тогда для любой непрерывной вверх функции $v \in V(Q,\Sigma)$ верно равенство*

$$|v|(e) = \sup\{|v|(K):K \subseteq e,\ K - \text{компакт}\}. \qquad (4)$$

Доказательство. Полностью повторяет схему доказательства теоремы 1 и следствия 1, если положить в теореме 1 $e = \{g \subseteq Q : g \supseteq e,\ Q \setminus g - \text{компакт}\}$, а также учесть, что в польском пространстве равенство (4) выполнено для любой σ-аддитивной меры (см., например, [11]).

Прежде чем доказать основной результат данной статьи, докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть $\langle Q,\Sigma\rangle$ – измеримое пространство, $v \in V_+(Q,\Sigma)$. Для любого конечного набора попарно-непересекающихся элементов $\eta = \{e_1,\dots,e_n\}$, $e_i \in \Sigma$, $i=1,\dots,n$, $n \in N$, определим функцию ω_η:*

$$\omega_\eta(e) = \omega_{\{e_1,\dots,e_n\}}(e) = v_{n+1}(e_1,\dots,e_n,e\setminus \bigcup_{i=1}^{n} e_i).$$

Тогда для любого η функция ω_η принадлежит $V_+(Q,\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $n = 1$ и $\{a_1,\dots,a_m\}$ – произвольно

выбранный набор попарно-непересекающихся элементов Σ. Индукцией по m легко показать, что

$$[\omega_{\{e_1\}}]_m(a_1,\ldots,a_m) = v_{m+1}(e_1,a_1\setminus e_1,\ldots,a_m\setminus e_1).$$

Действительно,

$$\omega_{\{e_1\}}(a_1) = v_2(e_1,a_1\setminus e_1);$$

$$[\omega_{\{e_1\}}]_m(a_1,\ldots,a_m) = [\omega_{\{e_1\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1}\cup a_m) -$$

$$- [\omega_{\{e_1\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1}) - [\omega_{\{e_1\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-2},a_m) =$$

$$= v_m(e_1,a_1\setminus e_1,\ldots,(a_{m-1}\setminus e_1)\cup(a_m\setminus e_1)) -$$

$$-v_m(e_1,a_1\setminus e_1,\ldots,a_{m-1}\setminus e_1)-v_m(e_1a_1\setminus e_1,\ldots,a_{m-2}\setminus e_1,a_m\setminus e_1)=$$

$$= v_{m+1}(e_1,a_1\setminus e_1,\ldots,a_m\setminus e_1).$$

Здесь использованы предположение индукции и определение $m+1$-й разности функции v.

Пусть теперь для $n<k$ утверждение леммы доказано. Докажем его при $n=k$. Индукцией по m можно показать, что

$$[\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}]_m(a_1,\ldots,a_m) =$$

$$= v_{k+m}(e_1,\ldots,e_k,a_1\setminus\bigcup_{i=1}^{k}e_i,\ldots,a_m\setminus\bigcup_{i=1}^{k}e_i).$$

Действительно, при $m=1$ это есть определение функции $\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}$. Далее,

$$[\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}]_m(a_1,\ldots,a_m) = [\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1}\cup a_m)-$$

$$- [\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1}) -$$

$$- [\omega_{\{e_1,\ldots,e_k\}}]_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-2},a_m) =$$

$$= v_{k+m-1}\left[e_1,\ldots,e_k,a_1\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t,\ldots,(a_{m-1}\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t)\cup(a_m\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t)\right] -$$

$$- v_{k+m-1}\left[e_1,\ldots,e_k,a_1\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t,\ldots,a_{m-1}\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t\right] -$$

$$-v_{k+m-1}\left[e_1,\ldots,e_k,a_1\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t,\ldots,a_{m-2}\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t,a_m\setminus\bigcup_{t=1}^{k} e_t\right] =$$

$$= v_{k+m}\left[e_1,\ldots,e_k,a_1\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t,\ldots,a_m\setminus\bigcup_{t=1}^{k}e_t\right].$$

Здесь также использованы предположение индукции и определение $k+m$-й разности функции v. Поскольку $v \in V_+$, лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть Q – топологическое пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *для любой непрерывной вверх функции $v \in V(Q,\Sigma)$ верно равенство*

$$|v|(e) = \sup\{|v|(f) : f \in \hat{e}\} \quad (e \in \Sigma);$$

б) *любая непрерывная вверх функция $v \in V(Q,\Sigma)$ регулярна.*

Доказательство. б) ⟶ а) следует из определения. Осталось доказать импликацию а) ⟶ б). Так как непрерывность вверх функции v влечет σ-непрерывность полной полиномиальной вариации $|v|$, то, без ограничения общности, можно считать, что $v \in V_+$. Сразу отметим, что из непрерывности вверх функции v следует также непрерывность вверх функций ω_η, введенных в лемме 3. Действительно, если $a_n \nearrow a$, то для любого $\eta = \{e_1,\ldots,e_n\} \in \Xi(e)$ $(e \in \Sigma)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\eta(a_n) = \lim_{n\to\infty} v_{k+1}\left[e_1,\ldots,e_k,a_n\setminus \bigcup_{t=1}^{k}e_t\right] =$$

$$= v_{k+1}\left[e_1,\ldots,e_k,a\setminus \bigcup_{t=1}^{k}e_t\right],$$

так как

$$\left[a_n\setminus \bigcup_{t=1}^{k} e_t\right] \nearrow \left[a \setminus \bigcup_{t=1}^{k} e_t\right].$$

Кроме того, $\omega_\eta \in V(Q,\Sigma)$, так как ω_η вполне положительны (лемма

3), и, значит,

$$\|\omega_\eta\| = \omega_\eta(Q) < \infty \quad \text{для любого} \quad \eta \in \Xi(e),\ e \in \Sigma.$$

Таким образом, по предположению а) доказываемой теоремы, все функции ω_η удовлетворяют равенству

$$\omega_\eta(e) = \sup\,\{\omega_\eta(f) : f \in \hat{e}\},\ e \in \Sigma.$$

Исходя из этого, можно доказать равенство (2) для полиномиальных разностей функции v любого порядка. Фиксируем $e_1, e_2 \in \Sigma$, $e_1 \cap e_2 = \emptyset$. Тогда

$$\omega_{\{e_1\}}(e_2) = v_2(e_1,e_2) = \sup_{f \in \dot{e}} \omega_{\{e_1\}}(f) = \sup_{f \in \dot{e}} v_2(e_1,f).$$

С другой стороны, для любого $f \in \hat{e}_2$

$$v_2(e_1,f) = \omega_{\{f\}}(e_1) = \sup_{h \in \hat{e}_1} \omega_{\{f\}}(h).$$

Таким образом,

$$v_1(e_1,e_2) = \sup_{f \in \hat{e}_2} v_2(e_1,f) = \sup_{f \in \hat{e}_2} \sup_{h \in \hat{e}_1} v_2(f,h),$$

что и требовалось. Пусть теперь $n \in N$ произвольно. Для любого $\eta = \{e_1,\ldots,e_n\} \in \Xi(e)$, $e \in \Sigma$, справедливы равенства:

$$v_n(e_1,\ldots,e_n) = \omega_{\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}}(e_n) =$$

$$= \sup_{f_n \in \dot{e}_n} v_n(e_1,\ldots,e_{n-1},f_n) =$$

$$= \sup_{f_n \in \hat{e}_n} \omega_{\{e_1,\ldots,e_{n-2},f_n\}}(e_{n-1}) =$$

$$= \sup_{f_n \in \dot{e}_n} \sup_{f_{n-1} \in \hat{e}_{n-1}} v_n(e_1,\ldots,e_{n-2},f_{n-1},f_n) = \ldots =$$

$$= \sup_{f_n \in \dot{e}_n} \sup_{f_{n-1} \in \hat{e}_{n-1}} \ldots \sup_{f_1 \in \dot{e}_1} v_n(f_1,\ldots,f_n),$$

откуда и следует равенство (2) для полиномиальной разности v любого порядка $n \in N$.

Следствие 3. *Пусть $\langle Q,\rho\rangle$ – метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Любая непрерывная вверх функция $v \in V(Q,\Sigma)$ регулярна.*

Доказательство. Сразу следует из теоремы 1 и 2.

Следствие 4. *Пусть Q – польское пространство с борелевской σ-алгеброй Σ. Любая непрерывная вверх функция $v \in V(Q,\Sigma)$ радонова, т.е. для любого $n \geq 1$, $\eta = \{e_1,\dots,e_n\} \in \Xi(e)$, $e \in \Sigma$, верно равенство*

$$|v|_n(e_1,\dots,e_n) = \sup\{|v|_n(K_1,\dots,K_n): K_i \subseteq e_i, K_i \text{ – компакт}\}.$$

Доказательство. Повторяет схему доказательства следствия 3 с заменой в теореме 3 слова "регулярность" на "радоновость". Вместо следствия 1 следует использовать следствие 2.

Замечание 3. Поскольку любая ограниченная аддитивная функция является функцией ограниченной полиномиальной вариации, а "классическая" полная вариация аддитивной функции совпадает с полиномиальной, следствия 1 и 2 являются обобщениями соответствующих теорем для мер. Однако равенства, фигурирующие в этих следствиях, на наш взгляд, не могут считаться адекватным обобщением понятий регулярности и радоновости на неаддитивные функции множества. Действительно, из теории меры известно, что любая регулярная (= радонова) аддитивная функция, заданная на борелевской алгебре метрического компакта, σ-аддитивна, т.е. σ-непрерывна (см., например, [1]). Теорема 4.3 из [2] утверждает, что при тех же условиях на топологическое пространство Q любая функция из $V(Q,\Sigma)$ σ-непрерывна. В то же время не всякая функция из $V(Q,\Sigma)$, удовлетворяющая равенству (4), является σ-непрерывной, как показывает следующий простой пример.

Для произвольного бесконечного компактного подмножества K метрического компакта Q положим

$$v_K(e) = \begin{cases} 1, \text{ если } K \subseteq e; \\ 0, \text{ если } K \not\subseteq e. \end{cases} \qquad (e \in \Sigma).$$

С помощью индукции по η легко доказать, что для любых

$\eta = \{e_1,\dots,e_n\} \in \Xi(e)$, $e \in \Sigma$, $n \in N$, верно

$$v_K(e_1,\dots,e_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } K \cap e_i \neq \emptyset \text{ для всех } i=1,\dots,n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $v_K \in V_+(Q,\Sigma)$. Кроме того, для функции v_K справедливо равенство (4). Действительно,

если $v_K(e) = 1$, то $K \subseteq e$ и $v_K(e) = v_K(K)$;

если $v_K(e) = 0$, то $K \subseteq e$ и $v_K(e) = v_K(\{x\})$ для любого $x \in e \setminus K$. Однако функция v_K не является σ-непрерывной (достаточно взять последовательность $e_n \nearrow K$ так, чтобы $e_n \neq K$ для всех $n \in N$). Этот же пример и теорема 4.3 из [2] показывают, что из равенства $|v|(e) = \sup\{|v|(f) : f \in \hat{e}\}$ $(e \in \Sigma)$ не следует, вообще говоря, регулярность функции v.

4. Здесь будут даны некоторые следствия из полученных результатов. С помощью следствия 3 можно получить усиление теоремы 4.2 из [2] об аналитичности регулярных функций множества. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из [2]. Функция $v \in V(Q,\Sigma)$ называется полиномиальной порядка n, если $v_{n+1}(e_1,\dots,e_{n+1}) = 0$ для любого $\eta = \{e_1,\dots,e_{n+1}\} \in \Xi(e)$ $(e \in \Sigma)$. Совокупность таких функций будем обозначать через $V^n(Q,\Sigma)$. Функция $v \in V^n(Q,\Sigma)$ называется однородной порядка n, если выполняется следующее условие:

$$\lim_{\eta\in\Xi(e)} \sum_{\substack{\omega \subseteq N^\eta \\ |\omega| = k}} v^\eta_\omega = 0 \quad (e \in \Sigma,\ k = 1,\dots,n-1)^2.$$

Совокупность всех однородных функций порядка n будем обозначать через $V^{(n)}(Q,\Sigma)$. Примером функции из $V^n(Q,\Sigma)$ является, очевидно, любой полином от аддитивной функции из $V^1(Q,\Sigma)$ степени $\leqslant n$. В [7] было доказано, что любая функция $v \in V^n(Q,\Sigma)$ единственным образом представляется в виде суммы однородных функций

---

[2] $\Xi(e)$ упорядочено по степени измельчения разбиений.

$$v = \sum_{m=1}^{n} v_m \quad (v_m \in V^{(n)},\ m = 1,\dots,n).$$

Читатель легко усмотрит здесь аналогию со случаем обычных полиномов. Естественным образом возникает следующее

Определение 5 [2]. Функция $v \in V(Q,\Sigma)$ называется аналитической, если она представима в виде

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \quad (v_m \in V^{(m)},\ m = 1,2\dots),$$

где под суммой ряда понимается (O) - $\lim \sum_{m=1}^{n} v_m$ в полуупорядоченном пространстве $\langle V,V_+\rangle$.

В.А.Васильевым была доказана следующая

Теорема [2, теорема 4.2.]. *Если $\langle Q,\rho\rangle$ - метрический компакт с борелевской σ-алгеброй и $v \in rV(Q,\Sigma)$, то функция v аналитична.*

Из этой теоремы, с учетом следствия 4, получаем

Следствие 5 (аналитичность σ-непрерывных функций). *Пусть $\langle Q,\rho\rangle$ - метрический компакт с борелевской σ-алгеброй Σ. Любая σ-непрерывная функция $v \in V(Q,\Sigma)$ является аналитической*[3].

Еще одно уточнение, связанное с ослаблением условия регулярности, относится к теореме об опорной функции ядра выпуклой кооперативной игры на метрическом компакте [12]. Именно, из теоремы 2 и теоремы из [12] вытекает

Следствие 6 (формула опорной функции ядра выпуклой кооперативной игры). *Пусть $\langle Q,\rho\rangle$ - метрический компакт с борелевской σ-алгеброй Σ. Для любой непрерывной вверх выпуклой функции $v \in V(Q,\Sigma)$ справедлива формула*

$$h_v(\Phi) = \int \hat{\Phi}\, d\mu_v \quad (\Phi \in S(Q,\Sigma)),$$

где $h_v(\Phi) = \sup\{\int \Phi d\mu : \mu \in C(v)\}$, $S(Q,\Sigma)$ - пространство вещественнозначных ограниченных Σ-измеримых функций, $\hat{\Phi} : \hat{Q} \to R$, $\hat{\Phi}(f) = \sup\{\Phi(x) : x \in f\}$, $(f \in \hat{Q})$.

---

[3] Ясно, что условие σ-непрерывности можно заменить на условия непрерывности вверх.

Литература

1. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. - М.: Наука, 1977.

2. **Васильев В.А.** Об одном пространстве неаддитивных функций множества // Оптимизация. - 1975. - Вып.16(38). - С.99-120.

3. **Васильев В.А.** Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация. - 1975. - Вып.17(34).- С.5-27.

4. **Ауман Р., Шепли Л.** Значения для неатомических игр. - М.: Мир, 1977.

5. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. - М.: Мир, 1969.

6. **Васильев В.А.** Общая характеристика полиномиальных функций множеств // Оптимизация. - 1974. - Вып.14(31). - С.103-123.

7. **Васильев В.А.** Некоторые классы неаддитивных функций множества и арбитражные схемы для бесконечных кооперативных игр. Диссертация... канд.физ.-мат.наук. - Новосибирск, 1975. - 117 с.

8. **Розенмюллер И.** Кооперативные игры и рынки. - М.: Мир, 1974.

9. **Kindler J.** A Mazur-Orlicz type theorem for submodular set functions // J. Math. Anal. and Appl. - 1986. - V.120.- P.533-546.

10. **Delbaen F.I.** Convex games and extreme points // J. Math. Anal. and Appl. - 1974. - V.45. - P.210-234.

11. **Вахания Н., Тариеладзе В., Чобанян С.** Вероятностные распределения в банаховых пространствах. - М.: Наука, 1985.

12. **Васильев В.А., Зуев М.Г.** Опорная функция ядра выпуклой кооперативной игры на метрическом компакте // Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61). - С.155-160.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.12.1989 г.