Посвящается светлой памяти Глеба Павловича Акилова

УДК 517.83

ПОНЯТИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТАНДАРТНОСТИ И π-МОНАДЫ БЕННИНГХОФЕНА - РИХТЕРА

Е.И.Гордон

В [1] построена общая теория π-монад и суперинфинитезималей, которые применяются для сравнения "порядков бесконечности" бесконечных элементов в различных топологических пространствах. Необходимость в таком сравнении возникает часто, когда требуется применить результаты нестандартного анализа к нестандартным объектам. Напомним, что обычно существенные упрощения определений сходимости, непрерывности и многих других достигаются при применении нестандартного анализа лишь к стандартным объектам. В [2] рассмотрены многочисленные приложения построенной теории в функциональном анализе и общей топологии.

Для аналогичных целей автором в работах [3-5] был введен и изучен предикат относительной стандартности. Цель настоящей заметки - показать, что π-монады допускают простую интерпретацию в терминах относительной стандартности, и проиллюстрировать, как в этих терминах получаются приложения, рассмотренные в работах

[1,2].

Отметим также, что поскольку предикат относительной стандартности определяется в терминах теории внутренних множеств Нельсона [6], то для построения стандартных эквивалентов предложений, сформулированных с использованием этого предиката, можно применять непосредственно алгоритм Нельсона из [6]. Соответствующие вопросы в теории π-монад требуют специального исследования, которое проведено в [1].

1. Напомним необходимые определения из [1,3]. Пусть $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ - стандартное семейство фильтров ($\mathcal{F}_i$ - стандартный фильтр на стандартном множестве X_i), $\mathcal{F}$ - порожденный этим семейством фильтр на множестве $\prod\{X_i \mid i \in I\}$. Тогда π-монадой семейства $\mathcal{F}$ называется внешнее множество

$$^{\pi}\mu_J(\underline{\mathcal{F}}) = \{x \in {}^*X_J \mid (\forall^{st} F \in \mathcal{F})(x \in {}^*F(J))\},$$

где $J \in {}^*I$ (т.е. J может быть и нестандартным), а ${}^*F(J)$ - проекция ${}^*F$ на J-ю компоненту. Если J стандартно, то $^{\pi}\mu_J(\underline{\mathcal{F}}) = \mu(\mathcal{F}_J)$ есть просто монада фильтра $\mathcal{F}_J$. Если для $i \in I$ верно $X_i = X$, а $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_0$, причем $\underline{M} = \mu(\mathcal{F}_0)$ - монада фильтра $\mathcal{F}_0$, то в этом случае $^{\pi}\mu_J(\underline{\mathcal{F}})$ обозначается через $^{\pi}M[J]$. Ясно,что $^{\pi}M[J] \subseteq M$.

Элемент J нестандартного универсума называется допустимым, если он принадлежит некоторому стандартному множеству. Элемент x стандартен относительно J (J-стандартен, $x\,\mathrm{st}J$), если существует стандартная функция f такая, что $J \in {}^*\mathrm{dom}\, f$, причем $f(a)$ - конечное множество для $a \in \mathrm{dom}\, f$ и $x \in {}^*f(J)$ (${}^*f(J)$ - гиперконечное множество ввиду принципа переноса). Предполагается, что в нестандартном универсуме выполняются принципы I,S,T теории Нельсона. В этом случае истинны релявитизованные к любому допустимому J принципы переноса и идеализации (т.е. все вхождения предиката st в формулы, которыми записываются эти принципы, заменяются на ... $\mathrm{st}J$).

2. Если X - J-стандартное множество, а $\mathcal{F}$ - J-стандартный фильтр на X, то J-монадой фильтра $\mathcal{F}$ назовем внешнее множество

$$\mu_J(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid (\forall^{\mathrm{st}J} F \in \mathcal{F})\ (x \in \mathcal{F})\}.$$

Из релятивизованного принципа идеализации следует, что $\mu_J(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Заметим, что, если A – стандартное множество, то $^*A$ стандартно отсительно любого J.

Теорема. *Если $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\iota \mid \iota \in I\}$ – стандартное семейство фильтров, $J \in {}^*I$, то $^{\pi}\mu_J(\underline{\mathcal{F}})$ есть J-монада.*

Доказательство. Обозначим через φ и ψ такие стандартные функции, что $\varphi(\iota) = \{X_\iota\}$, $\psi(\iota) = \{\mathcal{F}_\iota\}$. Тогда $^*X_J \in {}^*\varphi(J)$, $^*\mathcal{F}_J \in {}^*\psi(J)$ J-стандартны, причем $^*\mathcal{F}_J$ – фильтр на $^*X_J$. Покажем, что $\mu_J({}^*\mathcal{F}_J) = {}^{\pi}\mu_J(\mathcal{F})$.

Если $x \in \mu_J({}^*\mathcal{F}_J)$, то $(\forall^{\mathrm{st}J} A \in {}^*\mathcal{F}_J)(x \in A)$. Если $F \in \mathcal{F}$, то $F(\iota) \in \mathcal{F}_\iota$ для $\iota \in I$, т.е. $^*F(J) \in {}^*\mathcal{F}_J$. Ясно, что $^*F(J) \mathrm{st} J$, т.е. $\forall^{\mathrm{st}} F\ x \in {}^*F(J)$.

Пусть, наоборот, $x \in {}^{\pi}\mu_J(\underline{\mathcal{F}})$. Если A – J-стандартное множество, то $\exists f(\mathrm{dom}\,{}^*f \ni J \wedge (\forall a \in \mathrm{dom} f)\ (f(a)$ – конечное множество$)$ $\wedge A \in {}^*f(J))$. Рассмотрим новую стандартную функцию h такую, что $\mathrm{dom} h = I$ и

$$h(\iota) = \begin{cases} \bigcap \{B \mid B \in f(\iota) \ \bigcap\ \mathcal{F}_\iota\}, & \iota \in \mathrm{dom}\, f, \\ X_\iota, & \iota \notin \mathrm{dom}\, f. \end{cases}$$

Тогда ясно, что $(\forall \iota \in I)\ (h(\iota) \in \mathcal{F}_\iota)$ и $^*h(J) \subseteq A$. При этом $F = \prod \{h(\iota) \mid \iota \in I\} \in \mathcal{F}$ и $^*F(J) = {}^*h(J)$, а так как $x \in {}^*F(J)$, то $x \in A$, что и требовалось.∎

Из доказанной теоремы следует, что если X – топологическое пространство, $x \in X$ $(X, x$ стандартны$)$ и при любом $\iota \in I$ $\mathcal{F} = \mathfrak{A}(x)$ – фильтр окрестностей точки x, а M – монада $\mathfrak{A}(x)$, т.е. M – монада точки x, то $^{\pi}M[J] = \bigcap \{U \in {}^*\mathfrak{A}(x) \mid U \mathrm{st} J\}$. Элементы стоящего справа множества названы в [4] J-бесконечно близкими к $x (y \overset{J}{\approx} x)$. В частности, если $X = \mathbb{R}$, $x = 0$, а $y \overset{J}{\approx} 0$, то y называется J-бесконечно малым, а y^{-1} - J-бесконечно большим ($y^{-1} \overset{J}{\sim} \infty$). В [3,4] установлено, что если функция f и числа a и b J-стандартны, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff (\forall y \overset{J}{\approx} a) f(y) \overset{J}{\approx} b \qquad (1)$$

(a и b могут принимать значения $\pm\infty$).

3.Рассмотрим доказательство нетривиальной части правила Лопиталя при помощи относительных бесконечно больших и бесконечно малых (ср. с приведенным в [1] доказательством при помощи π-монад).

Пусть f и g - стандартные функции, дифференцируемые в окрестности точки a, $f(x),g(x) \to \infty$ при $x \to a$, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = d$. Требуется показать, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = d$.

Возьмем произвольную точку $y \approx a$ и точку $z \overset{y}{\approx} a$. Пусть, например, $z \leqslant y$. По теореме Коши найдется $\eta \in [z,y]$ такое, что

$$\frac{{}^*f(y)-{}^*f(z)}{{}^*g(y)-{}^*g(z)} = \frac{{}^*f'(\eta)}{{}^*g'(\eta)} \approx d, \text{ так как } \eta \approx a. \qquad (2)$$

Поскольку $f(x),g(x) \to \infty$ при $x \to a$, $z \overset{y}{\approx} a$, то, используя (1) и тот факт, что ${}^*f(y), {}^*g(y) \mathrm{st} y$, получаем $\dfrac{{}^*f(y)}{{}^*f(z)} \approx \dfrac{{}^*g(y)}{{}^*g(z)} \approx 0$. Теперь, ввиду (2),

$$d \approx \frac{{}^*f(y)}{{}^*g(y)} \cdot \frac{1 - {}^*f(y)/{}^*f(z)}{1 - {}^*g(y)/{}^*g(z)} \approx \frac{{}^*f(y)}{{}^*g(y)} \, ,$$

что и требовалось. ∎

В случае $a = \pm\infty$ доказательство проходит совершенно аналогично. В терминах относительной стандартности можно также получить результаты из общей топологии и функционального анализа, аналогичные тем, которые получены в [2] при помощи π-монад.

Литература

1. **Benninghofen B., Richter M.** A general theory of superinfinitesimals // Fund. Math. - 1987. - V.128, № 3. - P.199-215.

2. **Stroyan K., Benninghofen B., Richter M.** Superinfinitesimals in topology and functional analysis // Proc. London Math. Soc. - 1989. - V.5, № 1. - P.153-181.

3. **Гордон Е.И.** Относительно стандартные элементы в теории IST // 8 Всесоюз. конф. по мат. логике: Тез. докл.- Москва, 1986.

4. **Гордон Е.И.** Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е.Нельсона // Сиб. мат. журн. - 1989. - Т.30, № 1. - С.89-95.

5. **Гордон Е.И.** О некоторых свойствах предиката относительной стандартности // Математические чтения памяти М.Я.Суслина: Тез. докл. - Саратов, 1989.

6. **Nelson E.** Internal set theory. A new approach to nonstandart analysis // Bull. Amer. Math. Soc. - 1977. - V.83, № 6. - P.1165-1198.

Поступила в редакцию
17.09.1990 г.