*Светлой памяти нашего учителя Г.П.Акилова*

УДК 517.98

# БУЛЕВОЗНАЧНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

*А.Г.Кусраев, С.С.Кутателадзе*

Возникновение теории векторных решеток принято относить к началу тридцатых годов двадцатого века и связывать с именами Л.В.Канторовича, Ф.Рисса и Г.Фрейденталя. Изучение векторных пространств, наделенных отношением порядка и, как правило, согласованной с имеющимися структурами нормой, очевидно, мотивировалось не в последнюю очередь общими обстоятельствами, вызвавшими к жизни функциональный анализ, переживавший в те годы эпоху своего формирования. Тут следует назвать общую тягу к абстракции и социологическому подходу к изучению функций, операций над ними и связанных с ними уравнений. Примечальным обстоятельством было то, что к числу наблюдаемых свойств функциональных объектов относилась возможность их сравнения. В то же время общая концепция банаховых пространств не учитывала специфики конкретных функциональных пространств классической школы - наличие в них естественной структуры порядка, превращающей эти пространства в векторные решетки.

В те же годы наряду с теорией упорядоченных пространств закладывалась теория банаховых алгебр. Хотя в первые годы развитие названных теорий шло параллельно, вскоре их пути разошлись. Банаховы алгебры продемонстрировали свою исключительную эффективность в теории функций, в спектральной теории операторов и родственных направлениях. Теория векторных решеток развивалась медленнее и ее достижения, связанные с характеризацией различного рода упорядоченных пространств и описанием действующих в них операторов, носили более скромный и специальный характер.

В середине семидесятых годов начался период роста интереса к теории векторных решеток, приведший к ее быстрому развитию. Связанный с общим бурным прогрессом функционального анализа в эти годы, отмеченный процесс определялся и особыми причинами. Главной следует назвать необычайную полезность идеи упорядоченного векторного пространства в математических исследованиях, вызванных социальными науками и, прежде всего, экономикой. Немалую роль в синтезе теории упорядоченных пространств с экономической теорией и оптимизацией сыграли творчество и уникальность личности Л.В.Канторовича. Следующей менее очевидной причиной интереса к векторным решеткам стала их неожиданная роль в нестандартных - булевозначных - моделях теории множеств. Построенные Д.Скоттом, Р.Соловеем и П.Вопенкой в связи со знаменитыми результатами П.Дж.Коэна по гипотезе континуума, эти модели оказались неразрывно связанными с теорией векторных решеток. Именно, обнаружилось, что элементы таких решеток служат изображениями вещественных чисел в подходящим образом подобранной булевозначной модели. Этот факт не только вложил точный смысл в изначальное представление о том, что абстрактные упорядоченные пространства суть производные от вещественных чисел. Тем самым возникла новая возможность выводить общие свойства векторных решеток, используя то положение, что они в точно формулируемом смысле служат изображением подрешеток поля $\mathbb{R}$. Именно эту возможность мы взяли за основу в настоящем микрокурсе лекций. Начало курса (первые три лекции) будут опубликованы Американским математическим обществом. Здесь представлены два более продвинутых раздела: функциональное исчисление в векторных решетках и осколки положительных операторов.

При изложении главное место уделяем фундаментальным понятиям и их иллюстрации. Доказательства формулируемых теорем для краткости, как правило, опускаются.

Приведенная в конце курса литература ни в коей мере не претендует на полноту как в области векторных решеток, так и по нестандартному анализу. Она за редкими исключениями состоит из монографий и статей обзорного характера, в которых содержится обширная библиография. Оригинальные работы цитируются по специальным соображениям.

## Лекция 4

### Булевозначный анализ векторных решеток

В этой лекции мы покажем, что важнейшие структурные свойства векторных решеток - представление пространствами функций, спектральная теорема, функциональное исчисление и т.п. - являются изображениями свойств поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели.

4.1. Начнем с нескольких полезных замечаний, которыми ниже будем пользоваться, часто без специальных пояснений. Возьмем $K$-пространство $E$. В силу теоремы о булевозначной реализации векторных решеток (см. [21]), можно считать $E$ подрешеткой расширенного $K$-пространства $\mathcal{R}{\downarrow}$, где, как обычно, $\mathcal{R}$ - поле действительных чисел в модели $V^{(B)}$, $B := \mathfrak{B}(E)$. Более того идеал $\hat{E} := I(E)$, порожденный множеством $E$ в $\mathcal{R}{\downarrow}$, будет фундаментом $\mathcal{R}{\downarrow}$ и одновременно $o$-пополнением $E$. Единица 1 решетки $E$ будет единицей и в $\mathcal{R}{\downarrow}$. В подрешетке $E$ точные границы счетных множеств наследуются из $\mathcal{R}{\downarrow}$. Подробнее, если точная верхняя (нижняя) граница $x$ последовательности $(x_n) \subset E$ существует в $\mathcal{R}{\downarrow}$, то $x$ будет точной верхней (нижней) границей и в $E$ при условии, что $x \in E$. Таким образом, безразлично, в $E$ или в $\mathcal{R}{\downarrow}$ вычисляется $o$-предел ($o$-сумма) последовательности из $E$, если только результат принадлежит $E$. То же верно для $r$-пределов и $r$-сумм. В частности, можно утверждать, что если $x \in E$, то след $e_x$ и характеристика $e_\lambda^x$ элемента $x$, вычисленные в $\mathcal{R}{\downarrow}$, являются соответственно элементом $B := \mathfrak{E}(E)$ и отображением из $R$ в $B$.

**4.2. Теорема.** *Для спектральной функции элемента произвольного $K_\sigma$-пространства с единицей* 1 *справедливы следующие соотношения:*

(1) $s \leqslant t \to e_s^x \leqslant e_t^x \quad (s,t \in \mathbb{R});$

(2) $\bigvee_{t\in P} e_t^x = 1, \quad \bigwedge_{t\in P} e_t^x = 0;$

(3) $\bigvee\{e_s^x : s \in P,\ s < t\} = e_t^x \quad (t \in \mathbb{R});$

(4) $x \leqslant y \leftrightarrow (\forall t \in P) e_t^y \leqslant e_t^x;$

(5) $e_t^{x+y} = \bigvee\{e_s^x \wedge e_r^y : r,s \in P,\ r + s = t\} \quad (t \in P);$

(6) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \to e_t^{x\cdot y} = \bigvee\{e_r^x \wedge e_s^y : r,s \in P_+,\ rs = t\}$
$(t \in P,\ t > 0);$

(7) $e_t^{-x} = \bigvee\{1 - e_{-s}^x : s \in P,\ s < t\} \quad (t \in P);$

(8) $x = \inf(A) \leftrightarrow (e_t^x = \bigvee_{a\in A} e_t^a) \quad (t \in \mathbb{R});$

(9) $e_t^{x\vee y} = e_t^x \wedge e_t^y \ (t \in \mathbb{R});$

(10) $c \in \mathfrak{C}(1) \to e_t^{cx} = (1 - c) \wedge e_t^x \quad (t \in \mathbb{R},\ t < 0),$

$c \in \mathfrak{C}(1) \to e_t^{cx} = c \wedge e_t^x \quad (t \in \mathbb{R},\ t \leqslant 0).$

Здесь $P$ - произвольное плотное подполе поля $\mathbb{R}$. (В (6) и (8) предполагается существование произведения и инфимума соответственно.)

◄ Можем считать, не ограничивая общности, что рассматриваемое $K_\sigma$-пространство совпадает с $\mathcal{R}\downarrow$. Но тогда требуемые соотношения без труда выводятся из элементарных свойств чисел. Докажем, например, (6) и (8). Заметим прежде всего, что $P^\wedge$ - плотное подполе поля $\mathcal{R}$ внутри $V^{(B)}$.

Возьмем положительные элементы $x,y \in \mathcal{R}\downarrow$ и число $0 < t \in P$. Тогда $x,y$ и $t^\wedge$ - действительные числа в модели $V^{(B)}$. Воспользуемся следующим свойством чисел:

$$x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \to (xy < t^\wedge \leftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (\exists r,s \in \hat{P}_{+})(x < r \wedge y < s \wedge rs = t)).$$

Привлекая принцип переноса и правила вычисления булевых оценок, придем к соотношению

$$[\![xy < t^{\wedge}]\!] = \bigvee_{\substack{0 \leqslant r,\, s \in P \\ rs = t}} [\![x < r^{\wedge}]\!] \wedge [\![y < s^{\wedge}]\!] .$$

Отсюда вытекает требуемое равенство (6), если применить $\chi$ к обе-им частям равенства и учесть, что $\chi\, [\![x < \lambda^{\wedge}]\!] = e^{x}_{\lambda}$.

Пусть теперь $A$ - множество в рассматриваемом $K_{\sigma}$-пространстве. Тогда $A\!\uparrow$ - некоторое множество действительных чисел внутри $V^{(B)}$ и справедлива формула $\inf(A) < t \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow \exists a \in A\!\uparrow)\ (a < t)$. Теперь можно выписать цепочку эквивалентностей:

$$x = \inf(A) \longleftrightarrow [\![x = \inf(A\!\uparrow)]\!] - 1 \longleftrightarrow [\![\forall T\cdot \in P^{\wedge})$$

$$(x < t\ \inf(A\!\uparrow) < t)]\!] = 1 \longleftrightarrow (\forall t \in P)[\![x < t^{\wedge}]\!] =$$

$$= [\![(\exists a \in A\!\uparrow)(a < t^{\wedge})]\!] \longleftrightarrow (\forall t \in P)[\![x < t^{\wedge}]\!] = \bigvee_{a \in A} [\![a < t^{\wedge}]\!]. \ \triangleright$$

**4.3.** Итак, каждому элементу $K_{\sigma}$-пространства с единицей соответствует спектральная функция, причем все операции преобразуются вполне определенным образом. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности реализации произвольного $K_{\sigma}$-пространства с единицей в виде пространства спектральных функций. Рассмотрим вопрос подробнее.

Разложением единицы в булевой алгебре $B$ называют отображение $e : \mathbb{R} \longrightarrow B$, удовлетворяющее условиям:

(1) $s \leqslant t \longrightarrow e(s) \leqslant e(t) \quad (s,t \in \mathbb{R})$;

(2) $\bigvee\limits_{t \in \mathbb{R}} e(t) = 1, \quad \bigwedge\limits_{t \in \mathbb{R}} e(t) = 0$;

(3) $\bigvee\limits_{s \in \mathbb{R},\, s < t} e(s) = e(t) \quad (e \in \mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{R}(B)$ - множество всех разложений единицы в $B$. Введем отношение порядка формулой

$$e' \leqslant e'' \longleftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R})(e''(t) \leqslant e'(t)) \quad (e',e'' \in \mathfrak{R}(B)).$$

Далее предположим, что $B$ - $\sigma$-алгебра, $P$ - счетное плотное подполе $\mathbb{R}$.

В силу свойства (3) всякое разложение единицы однозначно определено своими значениями на $P$.

Для любых $e', e'' \in \mathfrak{R}(B)$ можно определить отображение

$$e : t \longrightarrow \bigvee \{e'(r) \wedge e''(s) : r, s \in P,\ r + s = t\} \quad (t \in P),$$

$$e : t \longrightarrow \bigvee \{e(s) : s \in P,\ s < t\} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

которое, как видно, будет разложением единицы в $B$. Полагая $e' + e'' := e$, получим в $\mathfrak{R}(B)$ структуру коммутативной группы, причем нулевой элемент 0 и обратный элемент $-e$ имеют вид:

$$-e(t) := \bigvee \{1 - e^{x}_{-s} : s \in P,\ s < P\}; 0(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Наконец, произведение элемента $e \in \mathfrak{R}(B)$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ зададим правилами:

$$(\alpha e)(t) := e(t/\alpha) \quad (\alpha > 0,\ t \in \mathbb{R}),$$

$$(\alpha e)(t) := (-e)(-t/\alpha) \quad (\alpha < 0,\ t \in \mathbb{R}).$$

**4.4. Теорема.** *Пусть $B$ - полная булева алгебра. Множество $\mathfrak{R}(B)$ с введенными операциями и порядком представляет собой расширенное $K$-пространство. Отображение, сопоставляющее элементу $x \in \mathcal{R}\!\downarrow$ разложение единицы $t \longrightarrow [\![x < \hat{t}]\!]$ $(t \in \mathbb{R})$, является изоморфизмом $K$-пространств $\mathcal{R}\!\downarrow$ и $\mathfrak{R}(B)$.*

**4.5.** Выведем несколько важных следствий из сформулированной теоремы.

(1) Расширенное $K$-пространство $E$ с единицей 1 изоморфно $K$-пространству $\mathfrak{R}(B)$, где $B = \mathfrak{E}(1)$. Изоморфизмом служит отображение $x \longrightarrow ((e^{x}_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}})$ $(x \in E)$.

(2) Спектральная теорема Фрейденталя. Пусть $E$ - произвольное $K_\sigma$-пространство с единицей 1. Всякий элемент $x \in E$ допускает представление

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, de^{x}_{\lambda},$$

где интеграл понимается как предел с регулятором 1 интегральных сумм $x(\beta):=\sum_{n\in Z}\tau(e^x_{t_{n+1}} - e^x_{t_n})$, $t_n < \tau_n < t_{n+1}$ при $\delta(\beta):=\sup_{n\in Z}(t_{n+1}-t_n)\to 0$.

◁ Можно считать, что $R\!\downarrow$ – максимальное расширение $E$, причем $E\subset R\!\downarrow$. Пусть $x\in E$, $\beta:=(t_n)_{n\in Z}$ – разбиение $\mathbb{R}$ и $t_n<\tau_n<t_{n+1}$ $(n\in Z)$. Тогда

$$b_n \leqslant [\![ \hat{t}_n \leqslant x \leqslant \hat{t}_{n+1} ]\!] \wedge [\![ \hat{t}_n < \hat{\tau}_n < \hat{t}_{n+1} ]\!] \wedge$$

$$\wedge [\![ \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n \leqslant \delta(\beta)^\wedge ]\!] \leqslant [\![ |x-\hat{\tau}_n| < \delta(\beta)^\wedge ]\!].$$

Учитывая равенство $x(\beta) := \operatorname*{mix}_{n\in Z}(b_n\hat{\tau}_n)$, выводим $[\![ |x - x(\beta)| < \delta(\beta)^\wedge ]\!] = 1$ или $|x-x(\beta)| \leqslant \delta(\beta)1$. Остается привлечь замечания из 4.1. ▷

(3) Для произвольной $\sigma$-алгебры $B$ множество $\mathfrak{R}(B)$ (структурированное, как в 4.3) представляет собой расширенное $K_\sigma$-пространство с единицей. Наоборот, любое расширенное $K_\sigma$-пространство $E$ с единицей изоморфно $\mathfrak{R}(B)$, где $B=\mathfrak{C}(E)$.

◁ Пусть $\hat{B}$ – это $o$-пополнение $\sigma$-алгебры $B$. Согласно 4.4 $\mathfrak{R}(\hat{B})$ - расширенное $K$-пространство. Множество $\mathfrak{R}(B)$ содержится в $\mathfrak{R}(\hat{B})$. Более того, из 4.2 (4)-(7) и 4.4 видно, что структура векторной решетки, а также точные границы счетных множеств в $\mathfrak{R}(B)$ наследуются из $\mathfrak{R}(\hat{B})$. Следовательно, $\mathfrak{R}(B)$ – это $K_\sigma$-пространство с единицей. Из этих же соображений вытекает, что всякое счетное множество попарно-дизъюнктных элементов в $\mathfrak{R}(B)$ ограничено.

Возьмем теперь произвольное $K_\sigma$-пространство с единицей и его максимальное расширение $\hat{E}$. Если $B=\mathfrak{C}(E)$ и $\hat{B}=\mathfrak{C}(\hat{E})$, то $\hat{B}$ есть $o$-пополнение $B$. В силу (1) пространства $\hat{E}$ и $\mathfrak{R}(\hat{B})$ изоморфны, причем образом подпространства $E$ будет $\mathfrak{R}(B)$, как следует из (2).▷

**4.6.** Из 4.4 и 4.5 непосредственно выводятся результаты о функциональной реализации векторных решеток.

(1) **Теорема.** *Пусть $Q$ – стоуновский компакт $\sigma$-алгебры $B$. Векторные решетки $C_\infty(Q)$ и $\mathfrak{R}(B)$ изоморфны. В частности, $C_\infty(Q)$ – расширенное $K_\sigma$-пространство с единицей для любого квазиэкстремального компакта $Q$.*

◁ Возьмем $e \in \mathfrak{E}(B)$. Пусть $G_t$ – открыто-замкнутое множество в $Q$, соответствующее элементу $e(t) \in B$. Существует единственная непрерывная функция $\hat{e} : Q \longrightarrow \bar{R}$, для которой

$$\{\hat{e} < t\} \subset G_t \subset \{\hat{e} \leqslant t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Из соотношений 4.2 (2) следует, что замкнутое множество $\bigcap \{G_t : t \in R\}$ имеет пустую внутренность, а открытое множество $\bigcup \{G_t : t \in R\}$ плотно в $Q$. Значит, функция конечна всюду за исключением, быть может, точек нигде не плотного множества, поэтому $\hat{e} \in C_\infty(Q)$. Нетрудно проверить, что отображение $e \longrightarrow \hat{e}$ и есть искомый изоморфизм. ▷

(2) **Теорема.** *Пусть $Q$ – стоуновский компакт полной булевой алгебры $B$, а $\mathcal{R}$ – поле действительных чисел в модели $V^{(B)}$. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ изоморфна расширенному K-пространству $\mathcal{R}\downarrow$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $x \in \mathcal{R}\downarrow$ функции $\hat{x} : Q \longrightarrow \bar{R}$ по формуле*

$$\hat{x}(q) = \inf\{t \in \mathbb{R} : [\![x < t^\wedge]\!] \in q\}.$$

(3) **Теорема.** *Пусть $E$ – архимедова векторная решетка, а $Q$ – стоуновский компакт базы $\mathfrak{B}(Q)$. Тогда $E$ изоморфна минорантной подрешетке $E_0 \subset C_\infty(Q)$. При этом $E$ будет фундаментом $C_\infty(Q)$ (совпадать с $C_\infty(Q)$) в том и только в том случае, если $E$ – это K-пространство (расширенное K-пространство).*

**4.7.** В дальнейшем изложении потребуется понятие интеграла по спектральной мере. Пусть $(T,\Sigma)$ – измеримое пространство, т.е. $T$ – непустое множество и $\Sigma$ – фиксированная $\sigma$-алгебра подмножеств $T$. Спектральной мерой называют всякий $\sigma$-непрерывный булев гомоморфизм $\mu$ из $\Sigma$ в булеву алгебру $B$. Точнее, отображение $\mu : \Sigma \longrightarrow B$ будет спектральной мерой, если $\mu(T-A) = 1 - \mu(A)\,(A \in \Sigma)$ и

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для любой последовательности $(A_n)$ элементов $\sigma$-алгебры $\Sigma$.

Пусть $B := \mathfrak{E}(E)$ – булева алгебра единичных элементов K-пространства $E$ с фиксированной единицей $1$. Возьмем измеримую функцию $f : T \to \mathbb{R}$. Для произвольного разбиения числовой прямой $\beta := (\lambda_k)_{k\in Z}$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ $(k \in Z)$, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$, положим $A_k := f^{-1}([\lambda_k, \lambda_{k+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f,\beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k \mu(A_k), \quad \bar{\sigma}(f,\beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k+1} \mu(A_k),$$

где суммы вычисляются в $E$. Ясно, что при любом выборе $t_k \in A_k (k \in Z)$ будет

$$\underline{\sigma}(f,\beta) \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} f(t_k)\mu(A_k) \leqslant \bar{\sigma}(f,\beta).$$

Понятно также, что при измельчении разбиения $\beta$ $\underline{\sigma}(f,\beta)$ возрастает, а $\bar{\sigma}(f,\beta)$ убывает. Если существует такой элемент $x \in E$, что $\sup\{\underline{\sigma}(f,\beta)\} = x = \inf\{\bar{\sigma}(f,\beta)\}$, где точные границы берутся по всевозможным разбиениям $\beta := (\beta_k)_{k\in Z}$ числовой прямой, то говорят, что функция $f$ интегрируема по спектральной мере $\mu$ или что существует спектральный интеграл $I_\mu(f)$, и пишут при этом

$$I_\mu(f) := \int_T f d\mu := \int_T f(t) d\mu(t) := x.$$

4.8. Спектральный интеграл $I_\mu(f)$ существует для любой ограниченной измеримой функции $f$. Если же $E$ – расширенное $K$-пространство, то всякая измеримая функция интегрируема по спектральной мере.

4.9. **Теорема.** *Пусть $E := \mathcal{R}{\downarrow}$, а $\mu$ – спектральная мера со значениями в $B := \mathfrak{E}(E)$. Тогда для любой измеримой функции $f$ интеграл $I_\mu(f)$ – единственный элемент $K$-пространства $E$, удовлетворяющий условию*

$$[\![ I_\mu(f) < \lambda^\wedge ]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

◁ Возьмем произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и такое разбиение прямой $\beta := (\lambda_k)_{k\in Z}$, что $\lambda_0 = \lambda$. Если $b := [\![ I_\mu(f) < \lambda^\wedge ]\!]$, то $b = [\![ \exists t \in \mathbb{R}^\wedge)(I_\mu(f) < t \wedge t < \lambda^\wedge) ]\!]$. В силу принципа перемешивания существует разбиение $(b_\xi)$ элемента $b$ и семейство $(t_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{R}$ такие, что $t_\xi < \lambda$ и $b_\xi \leqslant [\![ I_\mu(f) \leqslant t_\xi^\wedge ]\!]$ для всех $\xi$. Привлекая теорему Гордона (см., например, [21]), отсюда выводим

$$b_\xi \underline{\sigma}(f,\beta) \leqslant t_\xi b_\xi < \lambda b_\xi \qquad (\xi \in \Xi)$$

и далее

$$\lambda_k b_\xi \mu(A_k) \leqslant t_\xi b_\xi \mu(A_k) < \lambda b_\xi \mu(A_k) \quad (\xi \in \Xi,\ k \in Z).$$

При $k \geqslant 1$ верно $\lambda_k > \lambda$, поэтому $b_\xi \mu(A_k) = 0$. Тем самым

$$b = \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \leqslant \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)^* = \mu(T - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\{f < \lambda\}).$$

С другой стороны, $b^* = [\![ I_\mu(f) \geqslant \lambda^\wedge ]\!]$ и вновь по теореме Гордона будет $\lambda b^* \leqslant b^* I_\mu(f) \leqslant b^* \bar{\sigma}(f,\beta)$ или

$$\lambda b^* \mu(A_k) \leqslant b^* \lambda_k \mu(A_k) \qquad (k \in Z).$$

При $k < 0$ верно $\lambda_k < \lambda$, поэтому $b^* \mu(A_k) = 0$. Следовательно,

$$b^* \leqslant \bigvee_{k=-1}^{-\infty} \mu(A_k)^* = \mu(T - \bigcup_{k=-1}^{-\infty} A_k) = \mu(\{f \geqslant \lambda\}).$$

Последнее влечет $b \geqslant \mu(\{f < \lambda\})$, и окончательно получаем $b = \mu(\{f < \lambda\})$.

Предположим, что для некоторого $x \in \mathcal{R}{\downarrow}$ верно

$$[\![ x < \lambda^\wedge ]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Тогда в силу установленного $[\![ x < \lambda^\wedge ]\!] = [\![ I_\mu(f) < \lambda^\wedge ]\!]$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Это равносильно соотношению

$$[\![ (\forall \lambda \in \mathbb{R}^\wedge)(x < \lambda \longleftrightarrow I_\mu(f) < \lambda) ]\!] = 1.$$

Учитывая плотность $\mathbb{R}^\wedge$ в $\mathcal{R}$, отсюда получаем равенство $[\![ x = I_\mu(f) ]\!] = 1$, $x = I_\mu(f)$. ▷

**4.10.** Рассмотрим измеримую функцию $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ и спектральную меру $\mu : \Sigma \longrightarrow B := \mathfrak{E}(E)$, где $E$ – некоторое $K$-пространство. Если существует интеграл $I_\mu(f) \in E$, то отображение $\lambda \longmapsto \mu(\{f < \lambda\})(\lambda \in R)$ совпадает со спектральной функцией элемента $I_\mu(f)$.

**4.11. Теорема.** *Пусть $E$ — расширенное $K_\sigma$-пространство, а $\mu : \Sigma \longrightarrow B_0 := \mathfrak{E}(E)$ — некоторая спектральная мера. Спектральный интеграл $I_\mu(\cdot)$ представляет собой секвенциально о-непрерывный (линейный мультипликативный и решеточный) гомоморфизм из $f$-алгебры измеримых функций $\mathcal{M}(T,\Sigma)$ в $E$.*

◄ Не ограничивая общности, можем считать, что $E \subset \mathcal{R}{\downarrow}$, причем $\mathcal{R}{\downarrow}$ есть о-пополнение $E$. Здесь $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в $V(B)$, где $B$ — пополнение алгебры $B_0$. Линейность и положительность оператора $I_\mu$ очевидны. Докажем секвенциальную о-непрерывность.

Возьмем убывающую последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ измеримых функций такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(t) = 0$ при всех $t \in T$. Пусть $x_n := I_\mu(f_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Если обозначить $A_n := \{t\in T\colon\ f_n(t)<\varepsilon\}$, то $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. В силу предложения 4.9 можем написать

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty} e_\varepsilon^{x_n} = \text{o-}\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \bigvee_{n=1} \mu(A_n) = 1.$$

По признаку 0-сходимости получаем $\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = o$. Далее, для любых измеримых функций $f,g\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ при $I := I_\mu$ будет:

$$\varepsilon_\lambda^{I(f\vee g)} \quad \mu(\{f \vee g < \lambda\}) = \mu(\{f < \lambda\}) \wedge$$

$$\wedge(\{g < \lambda\}) = e_\lambda^{I(f)} \wedge e_\lambda^{I(g)} = e_\lambda^{I(f)\vee I(g)},$$

следовательно, $I(f\vee g) = I(f)\vee I(g)$. Это означает, что $I_\mu$ — решеточный гомоморфизм. Аналогично, для $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ видно, что для $\lambda \in Q, \lambda > 0$, будет

$$e_\lambda^{I(f\cdot g)} = \mu(\{f \cdot g < \lambda\}) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{r,s\in Q_+\\ r,s=\lambda}} \{f < r\} \cap \{g < s\}\Big) =$$

$$= \bigvee_{\substack{rs\in Q_+\\ rs=\lambda}} \mu(\{f < r\}) \wedge \mu(\{g < s\}) = \bigvee_{\substack{r,s\in Q_+\\ rs=\lambda}} e_r^{I(f)} \wedge e_s^{I(g)} =$$

$$= e_\lambda^{I(f)\cdot I(g)}.$$

Итак, $I(f\cdot g) = I(f)\cdot I(g)$. Для произвольных $f$ и $g$ последнее равенство вытекает из уже установленных свойств спектрального интеграла. ▷

**4.12.** Ниже потребуется один факт о представлении булевых алгебр (см.[24, теорема 29.1]).

Теорема Люмиса - Сикорского. Пусть $Q$ - стоуново пространство булевой $\sigma$-алгебры $B$. Пусть $\mathfrak{B}_\sigma(Q)$ - это $\sigma$-алгебра подмножеств $Q$, порожденная множеством $\mathfrak{B}(Q)$ всех открыто-замкнутых множеств, а $\Delta$ - $\sigma$-идеал в $\mathfrak{B}_\sigma(Q)$, состоящий из тощих множеств. Тогда алгебра $B$ изоморфна фактор-алгебре $\mathfrak{B}_\sigma(Q)/\Delta$. Если $\iota_0$ - изоморфизм $B$ на $\mathfrak{B}(Q)$, то отображение

$$\iota : b \longrightarrow [\iota_0(b)]_\Delta \qquad (b \in B),$$

где $[A]_\Delta$ - класс эквивалентности множества $A \in \mathfrak{B}_\sigma(Q)$ по идеалу $\Delta$, является изоморфизмом алгебры $B$ на алгебру $\mathfrak{B}_\sigma(Q)/\Delta$.

**4.13.** Пусть $e_1,\ldots,e_n : \mathbb{R} \longrightarrow B$ - конечный набор спектральных функций со значениями в $\sigma$-алгебре $B$. Тогда существует единственная $B$-значная спектральная мера $\mu$, определенная на борелевской $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которой

$$\mu\Big(\prod_{k=1}^{n}(-\infty,\lambda_k)\Big) = \bigwedge_{k=1}^{n} e_k(\lambda_k),$$

каковы бы ни были $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$.

◁ Не ограничивая общности, можно предположить, что $B = \mathfrak{B}(Q)$, где $Q$ - стоуновский компакт $B$. Существуют непрерывные функции $x_k: Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $e_k(\lambda) = \mathrm{cl}\{x_k < \lambda\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $k:= 1,\ldots,n$. Положим $f(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, если все $x_k(t)$ конечны, и $f(t) = \infty$, если $x_k(t) = \pm\infty$ хотя бы для одного индекса $k$. Тем самым определено непрерывное отображение $f:Q \longrightarrow \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$. (Базис фильтра окрестностей точки $\infty$ состоит из дополнений ко всевозможным шарам с центром в нуле.) Ясно, что $f$ измеримо относительно борелевских мер алгебр $\mathcal{B}(Q)$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathfrak{B}_\sigma(Q), \iota, [\cdot]_\Delta$ - те же, что и в 4.12.

Определим отображение $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B$ формулой

$$\mu(A) := \iota^{-1}([f^{-1}(A)]_\Delta) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Очевидно, что $\mu$ – спектральная мера. Если $A := \prod_{k=1}^{n}(-\infty,\lambda_k)$, то $f^{-1}(A) = \bigcap_{k=1}^{n}\{x_k < \lambda_k\}$, значит, $\mu(A) = e_1(\lambda_1)\wedge\ldots\wedge e_n(\lambda)$. Если $\nu$ – еще одна спектральная мера с теми же свойствами, что и $\mu$, то множество $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \nu(A) = \mu(A)\}$ является $\sigma$-алгеброй и содержит все множества вида $\prod_{k=1}^{n}(-\infty,\lambda_k)$, где $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}$. Отсюда видно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ▷

4.14. Возьмем теперь упорядоченный набор элементов $x_1,\ldots,x_n$ $K_\sigma$-пространства $E$ с единицей 1. Пусть $e^{x_k}:\mathbb{R} \longrightarrow B := \mathfrak{E}(1)$ – спектральная функция элемента $x_k$. В соответствии с доказанным предложением существует спектральная мера $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B$, для которой

$$\mu\Big(\prod_{k=1}^{n}(-\infty,\lambda_n)\Big) = \bigwedge_{k=1}^{n} e^{x_k}(\lambda_k).$$

Как видно, мера $\mu$ однозначно определяется упорядоченным набором $\mathfrak{X} := (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$. Поэтому пишут $\mu_{\mathfrak{X}} := \mu$ и говорят, что $\mu_{\mathfrak{X}}$ – спектральная мера набора $\mathfrak{X}$. Для интеграла от измеримой функции $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ по спектральной мере $\mu_{\mathfrak{X}}$ приняты обозначения

$$\hat{\mathfrak{X}}(f) := f(\mathfrak{X}) := f(x_1,\ldots,x_n) := I_\mu(f).$$

Если $\mathfrak{X} = (x)$, то пишут также $\hat{x}(f) := f(x) := I_\mu(f)$, а $\mu_x := \mu_{\mathfrak{X}}$ именуют спектральной мерой элемента $x$. Напомним, что пространство $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ всех борелевских функций $\mathbb{R}^n$ является расширенным $K_\sigma$-пространством и точной $f$-алгеброй.

**4.15. Теорема.** *Спектральные меры набора* $\mathfrak{X} := (x_1,\ldots,x_n)$ *и элемента* $f(\mathfrak{X})$ *связаны соотношением*

$$\mu_{f(\mathfrak{X})} = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{\leftarrow},$$

*где* $f^{\leftarrow}:\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *– гомоморфизм, действующий по правилу* $A \longrightarrow f^{-1}(A)$. *В частности, для измеримых функций* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *и* $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *будет* $(g \circ f)(\mathfrak{X}) = g(f(\mathfrak{X}))$, *если существуют* $f(\mathfrak{X})$ *и* $g(f(\mathfrak{X}))$.

◁ Согласно 4.10 для каждого $t \in \mathbb{R}$ будет

$$\mu_{f(\mathfrak{X})}(-\infty,t) = e_t^{f(\mathfrak{X})} = [\![f(\mathfrak{X}) < t]\!] = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}(-\infty,t).$$

Значит, спектральные меры $\mu_{f(\mathfrak{X})}$ и $\mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{\leftarrow}$, определенные на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, совпадают на интервалах вида $(-\infty, t)$. Отсюда стандартными рассуждениями выводится, что эти меры совпадают везде. Для обоснования второй части нужно лишь заметить, что $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$ и применить дважды уже установленное. ▷

**4.16. Теорема.** *Для любого упорядоченного набора $\mathfrak{X} := (x_1, \ldots, x_n)$ элементов расширенного $K_\sigma$-пространства $E$ отображение*

$$\hat{\mathfrak{X}} : f \longrightarrow \hat{\mathfrak{X}}(f) \qquad (f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

*представляет собой единственный секвенциально о-непрерывный гомоморфизм f-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в $E$, удовлетворяющий условию*

$$\hat{\mathfrak{X}}(dt_k) = x_k \quad (k := 1, \ldots, n),$$

*где $dt_k : (t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow t_k$ — это $k$-я координатная функция в $\mathbb{R}^n$.*

◁ Как установлено в 4.11, отображение $f \longrightarrow \hat{\mathfrak{X}}(f)$ будет секвенциально о-непрерывным гомоморфизмом f-алгебр. По теореме 4.15 верны равенства

$$\mu_{dt_k(\mathfrak{X})} = \mu_{\mathfrak{X}} \circ (dt_k)^{\leftarrow} = \mu_{x_k}.$$

Следовательно, элементы $\hat{\mathfrak{X}}(dt_k) = dt_k(\mathfrak{X})$ и $x_k$ совпадают, ибо имеют одну и ту же спектральную функцию. Если $h : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow E$ — еще один гомоморфизм f-алгебр с теми же свойствами, то $h$ и $\hat{\mathfrak{X}}(\cdot)$ совпадают на всех полиномах. Из-за секвенциальной о-непрерывности $h$ и $\hat{\mathfrak{X}}(\cdot)$ совпадают на всем $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. ▷

## Комментарий к лекции 4

(а) Результаты из этой лекции, за редким исключением, хорошо знакомы специалистам по теории векторных решеток. Новым здесь является метод доказательства: все основные факты выводятся путем интерпретации в булевозначной модели простых свойств поля действительных чисел.

(б) Понятия единицы, единичного элемента и характеристики (спектральной функции элемента) ввел Г.Фрейденталь. Им же установлена спектральная теорема 4.5 (2) (см. [11,19]). Из теоремы 4.4 вытекает, что для полной булевой алгебры $B$ множество разложений единицы является расширенным $K$-пространством, база которого изоморфна $B$. Этот факт принадлежит Л.В.Канторовичу [19]. Теорему 4.5 (1) получил А.Г.Пинскер (см. [19]). Основной результат п.4.6 - реализация произвольного $K$-пространства в виде фундамента в $C_{\infty}(Q)$ - впервые установили независимо Б.З.Вулих и Т.Огасавара (см. [11,19]).

(в) Из 4.13 вытекает, что всякая спектральная функция со значениями в $\sigma$-алгебре определяет спектральную меру на борелевской $\sigma$-алгебре действительной прямой. Этот факт впервые указал В.И.Соболев в [39]. Однако в [39] предполагалось, что такую меру можно получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д.А.Владимиров, для полной булевой алгебры счетного типа продолжения по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Итак, метод продолжения в 4.13, основанный на представлениях Люмиса - Сикорского булевых $\sigma$-алгебр 4.12, существенно отличается от продолжения по Каратеодори. В [71] М.Райт получил утверждение 4.13 как следствие из установленной им теоремы Рисса для операторов со значениями в $K$-пространстве.

(г) Борелевские функции от элементов произвольного $K$-пространства с единицей, по-видимому, впервые рассмотрел В.И.Соболев (см. [11,19]). Теоремы 4.15 и 4.17 в приведенной общности получены в [29,30]. В [29,30] строится также борелевское функциональное исчисление (счетных или несчетных) наборов элементов произвольного $K$-пространства. Булевозначное доказательство теоремы 4.16 приводится также в [49].

## Лекция 5

### Осколки положительных операторов

В этой лекции мы проиллюстрируем положение: в теории векторных решеток и положительных операторов весьма плодотворно сочетание булевозначных и инифинитезимальных методов. Не до конца еще ясно, каков оптимальный способ сочетания и каким должен быть синтетический нестандартный анализ, так как здесь имеются различные возможности для комбинирования технических средств. Поэтому остановимся на одном конкретном, но принципиальном вопросе вычисления осколков положительных операторов, который удается изучить довольно основательно путем последовательного применения нестандартных методов.

5.1. Для удобства читателя приведем сразу же формулировки некоторых из основных утверждений. Для множества $A$ в $K$-пространстве через $A^{\vee}$ обозначим результат добавления к $A$ супремумов всех его непустых конечных подмножеств. Символ $A^{(\uparrow)}$ используется для результата присоединения к $A$ супремумов непустых возрастающих сетей элементов $A$. Естественным образом трактуют знаки $A^{(\uparrow\downarrow)}$ и $A^{(\uparrow\downarrow\uparrow)}$.

Пусть $E$ – векторная решетка, $F$ – произвольное $K$-пространство и $U$ – положительный оператор из $E$ в $F$. Для элемента $e \in E_+$ введем оператор $\pi_e U$ по формулам:

$$(\pi_e U)x := \sup_{n\in\mathbb{N}} U(x \wedge ne) \quad (x \in E_+);$$

$$(\pi_e U)x := (\pi_e U)x^+ - (\pi_e U)x^- \qquad (x \in E).$$

Легко понять, что $\pi_e U \in L^{\sim}(E,F)$. Более того, $\pi_e U$ – осколок оператора $U$, а отображение $U \longrightarrow \pi_e U$ $(U \geqslant 0)$, естественным образом продолженное на $L^{\sim}(E,F)$, будет порядковым проектором. Если $\rho \in \mathfrak{P}(F)$, то той же буквой $\rho$ будем обозначать проектор $U \longrightarrow \rho U$ в $K$-пространстве $L^{\sim}(E,F)$.

(1) Булева алгебра осколков $\mathfrak{C}(U)$ восстанавливается из осколков вида $(\rho \circ \pi_e)U$ по формуле

$$\mathfrak{E}(U) = \{(\rho \circ \pi_e)U : \rho \in \mathfrak{P}(F),\ e \in E_+\}^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}.$$

Множество проекторов $\mathcal{P}$ в $K$-пространстве $L^\sim(E,F)$ будем называть порождающим, если $Ux^+ = \sup\{(\pi U)x : \pi \in \mathcal{P}\}$ для всех $U \in L(E,F)_+$ и $x \in E$. Пусть $U$ и $V$ – положительные операторы из $L^\sim(E,F)$, а $W$ - проекция $V$ на $\{U\}^{\perp\perp}$.

(2) Если $\mathcal{E}$ - фильтр (слабых) единиц в $F$, то для каждого $x \in E_+$ будет

$$Wx = \sup_{e\in\mathcal{E}} \inf\{\pi Vy + \pi^\perp Vx : 0 \leqslant y \leqslant x,\ \pi \in \mathfrak{P}(F),\ \pi U(x-y) \leqslant \mathcal{E}\}.$$

(3) Если $\mathcal{P}$ - порождающее множество проекторов в $L^\sim(E,F)$, то для $x \in E_+$ верно

$$Wx = \sup_{e\in\mathcal{E}} \inf\{(\pi P)^\perp Vx : \pi PUx \leqslant \mathcal{E},\ P \in \mathcal{P},\ \pi \in \mathfrak{P}(F)\}.$$

**5.2.** Займемся теперь обоснованием указанных и некоторых других аналогичных формул. Вначале разберем случай функционалов, привлекая аппарат инфинитезимального анализа. При этом мы используем неоклассическую установку, восходящую к Э.Нельсону. Детальное изложение необходимых сведений можно найти в [28,34,46] (см.также [52,56,57,59,64]). Здесь же ограничимся следующими краткими замечаниями. Без особых оговорок принимается соглашение о стандартности антуража, т.е. при использовании теории внутренних множеств все несвязные переменные в формальной записи излагаемого считаются стандартными. Знак $\approx$ имеет в $K$-пространстве $F$ обычный смысл: $x \approx y$ для $x,y \in F$ означает, что $(\forall^{st} e \in \mathcal{E})\ |x-y| \leqslant e$. Ясно, что при $F = \mathbb{R}$ речь идет о бесконечной малости числа $x-y$.

Пусть $E$ - векторное пространство над плотным подполем $\hat{\mathbb{R}}$ в поле $\mathbb{R}$. Пусть далее $q : E \longrightarrow R$ - сублинейный функционал и $A$ - порождающее множество для $q$, т.е. $q(x) = \sup\{f(x) : f \in A\}$ $(x \in E)$. Обозначим через $\tau$ топологию поточечной сходимости в $E$ $L(E,\mathbb{R})$ на элементах $E$. По классической теореме Мильмана при $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ для множества крайних точек $\mathrm{Ch}(q)$ субдиференциала $\underline{\partial} q := \{f \in E : (\forall x(E) f(x) \leqslant q(x)\}$ выполнено $\mathrm{Ch}(q) \subset \mathrm{cl}_\tau(A)$. Это заключение - мильмановское обращение теоремы Крейна - Мильмана - справедливо и в рассматриваемом нами сейчас случае.

**5.3. Теорема.** *Каждая крайняя точка субдифференциала лежит в* $\tau$*-замыкании порождающего для* $q$ *множества.*

◁ Ясно, что $\tau$ - это локально-выпуклая топология в векторном пространстве $E$ над полем $\mathbb{R}$. При этом по теореме Тихонова $\partial q$ является $\tau$-компактным. Обозначим через $D$ множество, полученное $\tau$-замыканием выпуклой оболочки $A$. Очевидно, что $D := \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{co}(A))$ - это выпуклое $\tau$-компактное множество. Допустим, что некоторый элемент $\bar{f} \in \partial q$ не лежит в $D$. По теореме отделимости имеется $\tau$-непрерывный линейный функционал $\varphi$ над $E^\#$ такой, что $\sup\{\varphi(f) : f \in D\} = \varphi(f_0) < r < \varphi(\bar{f})$ для $f_0 \in D$ и $r \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности $\varphi$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in E$, $t \in \mathbb{R}$ и всех $f \in E^\#$ будет $|\varphi(f)| \leqslant t|f(x_1)| \vee \ldots \vee |f(x_n)|$. Тем самым для подходящих чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi(f) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$. Работая в стандартном антураже, подберем числа $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n \in \hat{\mathbb{R}}$, бесконечно близкие к $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ соответственно. Отметим также, что в силу гипотезы стандартности $x_k$ и неравенства $-q(-x_k) \leqslant f(x_k) \leqslant q(x_k)$ выполнено: $f(x_k) \in {}^{\mathrm{fin}}\mathbb{R}$, т.е. $f(x_k)$ - конечное число для любого $f \in \partial q$ и $k = 1, \ldots, n$. Положим $x := \sum_{k=1}^{n} \hat{\alpha}_k x_k$. Тогда для $f \in \partial q$ справедливы соотношения

$$\alpha(f) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \hat{\alpha}_k)\, f(x_k) \approx f(x),$$

ибо $\alpha_k - \hat{\alpha}_k$ - бесконечно малая величина для $k := 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $\varphi(f) + \varepsilon \geqslant f(x)$ при любом стандартном $\varepsilon < 0$. Значит, для такого $\varepsilon < 0$ имеют место оценки:

$$q(x) = \sup\{f(x) : f \in A\} \leqslant \sup\{\varphi(f) + \varepsilon : \varphi \in A\} \leqslant \varphi(f_0) + \varepsilon.$$

Отсюда ${}^\circ q(x) \leqslant \varphi(f_0) < r$. С другой стороны,

$$(\forall^{st} \varepsilon > 0)\ r \leqslant \varphi(\bar{f}) \leqslant \bar{f}(x) + \varepsilon \leqslant q(x) + \varepsilon.$$

Следовательно, ${}^\circ q(x) \geqslant {}^\circ q(x)$. Получили противоречие, означающее, что $D = \partial q$ и, стало быть, на основании упомянутой выше теоремы Мильмана $\mathrm{cl}_\tau(A) \supset \mathrm{Ch}(q)$. ▷

**5.4.** Фиксируем некоторое множество $P$ положительных проекторов и соответствующее множество $P(f) := \{p \in P\}$ осколков положительного функционала $f$ в векторной решетке $E$ над плотным подполем $\mathbb{R}$ (с единицей).

Эквивалентны следующие утверждения:

(1) $\mathcal{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(f)$;

(2) $\mathcal{P}$ порождает осколки $f$;

(3) $(\forall x \in {}^{\circ}E)(\exists p \in \mathcal{P})\ \ pf(x) \approx f(x^{+})$;

(4) функционал $g$ из $[0,f]$ служит осколком $f$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in E_{+}$ имеет место равенство

$$\inf_{p\in\mathcal{P}} ((p^{\perp}g)(x) + p(f-g)(x)) = 0;$$

(5) $(\forall g \in {}^{\circ}\mathfrak{E}(f))(\forall x \in {}^{\circ}E_{+})(\exists p \in \mathcal{P})\ |pf-g|(x) \approx 0$;

(6) $\inf\{|pf-g|(x) : p \in \mathcal{P}\} = 0$ для каждого осколка $g \in \mathfrak{E}(f)$ и положительного элемента $x \geqslant 0$;

(7) для $x \in E_{+}$ и $g \in \mathfrak{E}(f)$ найдется элемент $p \in \mathcal{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}$, обеспечивающий равенство $|pf-g|(x) = 0$.

Импликации (1)$\to$(2)$\to$(3) не вызывают сомнений.

(3)$\to$(4). Будем работать в стандартном антураже. Заметим прежде всего, что выполнение интересующего нас равенства для каких-либо функционалов $g$ и $f$ таких, что $0 \leqslant g \leqslant f$, обеспечивает для стандартного $x \geqslant 0$ наличие $p \in \mathcal{P}$, для которого $p^{\perp}g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$. Стало быть, ${}^{\circ}p(g \wedge (f-g))(x) \leqslant {}^{\circ}p(f-g)(x) = 0$ и ${}^{\circ}p^{\perp}((f-g) \wedge g)(x) \leqslant {}^{\circ}p^{\perp}g(x) = 0$, т.е. $g \wedge (f-g) = 0$.

Установим теперь, что в условиях (3) необходимое нам равенство гарантируется обычным критерием дизъюнктности:

$$\inf_{\substack{x_1\geqslant 0,\, x_2\geqslant 0\\ x_1+x_2=x}} (g(x_1) + (f-g)(x_2)) = 0.$$

Для фиксированного стандартного $x$ отыщем внутренние положительные $x_1$ и $x_2$ такие, что $x_1 + x_2 = x$ и, кроме того, $g(x_1) \approx 0$ и $f(x_2) \approx g(x_2)$. В силу условия (3) на основании 5.3 осколок $g$ лежит в слабом замыкании $\mathcal{P}(f)$. В частности, имеется элемент $p \in \mathcal{P}$, для которого $g(x_1) \approx pf(x_1)$ и $g(x_2) \approx pf(x_2)$. Стало быть,

$p^{\perp}(x_2) \approx 0$, ибо $p^{\perp}g \leqslant p^{\perp}f$. Окончательно, $p^{\perp}g(x) \approx 0$. Отсюда $p(f-g)(x) = pf(x_2) + pf(x_1) - pg(x) \approx g(x_2) + g(x_2) + g(x_1) - pg(x) \approx p^{\perp}g(x) \approx 0$. Это и обеспечивает нужное равенство.

(4) $\longrightarrow$(5). В силу тождества $|pf-g|(x) = p^{\perp}g(x) + p(f-g)(x)$, подбирая $p \in \mathcal{P}$ так, чтобы было $p^{\perp}g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$, видим требуемое.

Эквивалентность (5)$\longleftrightarrow$(6) очевидна. Импликации (5)$\longrightarrow$(7)$\longrightarrow$(1) доказываются с помощью приемов, изложенных в [26].

5.5. Множество проекторов $\mathcal{P}$ является порождающим в том и только в том случае, если для любых положительных функционалов $f$ и $g$ и точки $x \geqslant \mathbb{O}$ справедливы представления

$$(f \vee g)(x) = \sup_{p\in\mathcal{P}} (pf(x) + p^{\perp}g(x));$$
$$(p \wedge g)(x) = \inf_{p\in\mathcal{P}} (pf(x) + p^{\perp}g(x)).$$

5.6. Для положительных функционалов $f$ и $g$ и порождющего множества проекторов $\mathcal{P}$ эквивалентны следующие утверждения:

(1) $g \in \{f\}^{\perp\perp}$;

(2) для каждого конечного $x \in {}^{\mathrm{fin}}E := \{x \in E : (\exists\ \bar{x} \in {}^{\circ}E)\,|x| \leqslant \bar{x}\}$ будет $pg(x) \approx 0$, как только $pf(x) \approx 0$ при $p \in \mathcal{P}$;

(3) $(\forall\ x \in E_+)(\forall\ \varepsilon \in \mathcal{P})\ \ pf(x) \leqslant \delta \longrightarrow pg(x) \leqslant \varepsilon$.

**Теорема.** *Пусть $f, g$ – положительные функционалы на $E$ и $x$ – положительный элемент $E$. Для проектора $\pi_f$ на компоненту $\{f\}^{\perp\perp}$ имеют место следующие представления:*

$$(1)\ \ \pi_f g(x) \Longrightarrow \inf{}^*\{{}^{\circ}pg(x) : p^{\perp}f(x) \approx 0,\ p \in \mathcal{P}\}$$

*(знак $\Longrightarrow$ символизирует точность формулы, т.е. достижимость равенства);*

$$(2)\ \ \pi_f g(x) = \sup_{\varepsilon \in 0} \inf\{pg(x) \leqslant \varepsilon,\ \ p \in \mathcal{P}\};$$

$$(3)\ \ \pi_f g(x) \Longrightarrow \inf{}^*\{{}^{\circ}g(y) : f(x-y) \approx 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x\};$$

$$(4)\ \ (\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ p\in\mathcal{P})pf(x) < \delta \longrightarrow \pi_f g(x) \leqslant p^{\perp}g(x) + \varepsilon;$$

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\forall\ \delta>))(\exists\ p\in\mathcal{P})p(f(x) < \delta \wedge p^{\perp}g(x) \leqslant \pi_f g(x) + \varepsilon;$$

(5) $(\forall\ \varepsilon>0)(\exists\ \delta>0)(\forall\ 0\leqslant y\leqslant x) f(x-y) \leqslant \delta \longrightarrow \pi_f g(x) \leqslant g(y) + \varepsilon;$

$$(\forall\ \varepsilon>0)(\forall\ \delta>0)(\exists\ 0\leqslant y\leqslant x) f(x-y) \leqslant \delta \wedge g(y) \leqslant \pi_f g(x) + \varepsilon.$$

◀ Обозначим для краткости $h := \pi_f g$. Ясно, что $h(x) \leqslant g(x)$ и, значит, $pg(x) \geqslant ph(x)$. Если $p^{\perp}f(x) \approx 0$, то $p^{\perp}h(x) \approx 0$ и, стало быть, $h(x) = {}^{\circ}ph(x) \leqslant {}^{\circ}pg(x)$. Следовательно, каждый стандартный элемент внешнего множества $\{{}^{\circ}pg(x) : p \in P,\ p^{\perp}f(x) \approx 0\}$ мажорирует $h(x)$. По принципу переноса заключаем, что левая часть в (1) не превосходит соответствующей правой части. Для доказательства достижения равенства в (1) заметим, что $f \wedge (g-h) = 0$. Значит, в силу 5.5 для некоторого $p \in P$ будет $p^{\perp}f(x) \approx 0$ и $pg(x) \approx ph(x)$. Учитывая, что $h \in \{f\}^{\perp\perp}$, и на основании 5.6 выводим: $p^{\perp}h(x) \approx 0$. Окончательно, $pg(x) \approx ph(x) + p^{\perp}h(x) = h(x)$. Тем самым $h(x) = {}^{\circ}pg(x)$ и (1) установлено.

Для доказательства (2), взяв $\delta < 0$, в стандартном антураже выводим:

$$\inf\{pg(x) : p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon\} \leqslant \inf{}^{*}\{pg(x) + \delta : p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf{}^{*}\{{}^{\circ}pg(x) : p^{\perp}f(x) \approx 0\} + \delta = h(x) + \delta.$$

Учитывая произвольность $\delta$, заключаем

$$h(x) \geqslant \sup \inf \{pg(x) : p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon\}.$$

Вновь зафиксировав стандартное число $\delta > 0$, для каждого бесконечно малого $\varepsilon > 0$ на основании (1) заключаем о выполнении следующего внутреннего свойства:

$$\inf \{pg(x) : p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon\} + \delta \geqslant h(x).$$

В самом деле, неравенство $p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon$ влечет соотношение $p^{\perp}f(x) \approx 0$ и, стало быть, $pg(x) + \delta \geqslant pg(x) \geqslant h(x)$. По принципу Коши упомянутое выше внутреннее свойство выполнено для некоторого стандартного строго положительного числа $\varepsilon$. Используя принцип переноса, окончательно выводим

$$(\forall\ \delta>0)(\exists\ \varepsilon>0)\quad h(x)-\delta \leqslant \inf\{pg(x) : p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon\},$$

что и завершает доказательство справедливости (2).

Для проверки (3) поступим по образцу доказательства (1). Утверждения (4) и (5) проверяются сходным образом применением алгоритма Нельсона. Соответствующие выкладки опускаем.

5.8. Итак, выше описаны способы порождения осколков функционалов и даны представления проекций на главные компоненты. Общий случай положительных операторов анализируется с помощью погружения в булевозначный универсум и спуска полученных для функционалов результатов. Потребуются следующие вспомогательные факты.

(1) Пусть $f:A\times B \longrightarrow f$ - экстенсиональное отображение и $f_D(a):= \sup f(a,D)$ для $a \in A$ и $D \subset B$. Тогда отображение $f_D:A \longrightarrow F$ также экстенсионально, причем имеет место равенство $f_D\uparrow = f\uparrow_{D\uparrow}$.

(2) Рассмотрим $E^\wedge$ - стандартное имя $E$ в отделимом булевозначном универсуме $V^{(B)}$, построенном над $B:= \mathfrak{P}(F)$. Отметим, что $E^\wedge$ - векторная решетка над стандартным именем $\mathbb{R}^\wedge$ поля $\mathbb{R}$. При этом $\mathbb{R}^\wedge$ - плотное подполе $\mathcal{R}$ внутри $V^{(B)}$. Здесь, как обычно, $\mathcal{R} = F\uparrow$ - поле вещественных чисел внутри $V^{(B)}$. Осуществим по общим правилам подъемы отображений $E$ в $F$ до отображений $E^\wedge$ в $\mathcal{R}$ внутри $V^{(B)}$. При этом, как несложно убедиться,

$$E^{\wedge\sim}\downarrow = L(E^\wedge,\mathcal{R})\downarrow = \{U\uparrow : U \in L^\sim(E,F)\}.$$

Спущенные структуры превращают $E^{\wedge\sim}\downarrow$ в $K$-пространство и даже в расширенный модуль над алгеброй ортоморфизмов. При этом мы попадаем, по существу, в скалярную ситуацию, изученную выше. Полноты ради, поясним некоторые необходимые нам типичные моменты.

(3) Напомним, что для $U \in L^\sim(E,F)$ подъем $U\uparrow$ определен правилом $[\![U\uparrow x^\wedge = Ux]\!] = 1$ для $x \in E$. При этом $U\uparrow$ становится регулярной формой на $E^\wedge$ - элементом $E^{\wedge\sim}$ внутри $V^{(B)}$. Для $P \in \mathcal{P}$ отображение $U\uparrow \longrightarrow (PU)\uparrow$ $(U \in L^\sim(E,F))$ экстенсионально. В самом деле, для $\pi \in B$ выполнено

$$\pi \leqslant [\![U_1\uparrow = U_2\uparrow]\!] \longrightarrow (\forall\, x\in E)\pi \leqslant [\![U_1\uparrow x^\wedge = U_2\uparrow x^\wedge]\!] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (\forall\, x \in E)\ \pi U_1 x = \pi U_2 x \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (\forall\, x \in E)\ \pi P U_1 x = \pi P U_2 x \longrightarrow \pi \leqslant [\![(PU_1)\uparrow = (P)U_1)\uparrow]\!].$$

Таким образом, определен подъем $P\uparrow$ - проектор $E^{\wedge\sim}$ внутри $V^{(B)}$. Правило действия $P\uparrow$ следующее: $P\uparrow U\uparrow = (PU)\uparrow$ для $U\in L^\sim(E,F)$.

(4) Полезно отметить, что для $U,V \in L^\sim(E,F)$ будет

$(U \wedge V)\uparrow = U\uparrow \wedge V\uparrow$ внутри $V^{(B)}$. В самом деле, учитывая, что $[\![(U \wedge V)\uparrow \leqslant U\uparrow \wedge V\uparrow]\!] = 1$, выводим

$$[\![(U \wedge V)\uparrow = U\uparrow \wedge V\uparrow]\!] = [\![U\uparrow \wedge V\uparrow \leqslant (U \wedge V)\uparrow]\!] =$$

$$= [\![(\forall W \in E^{\wedge\sim})\ W \leqslant U\uparrow \wedge W \leqslant V\uparrow \longrightarrow W \leqslant (U \wedge V)\uparrow]\!] =$$

$$= \bigwedge_{W \in L^{\sim}(E,F)_+} [\![W\uparrow \leqslant U\uparrow \wedge W\uparrow \leqslant V\uparrow \longrightarrow W\uparrow \leqslant (U \wedge V)\uparrow]\!].$$

Обозначим $\pi := [\![W\uparrow \leqslant U\uparrow]\!] \wedge [\![W\uparrow \leqslant V\uparrow]\!]$. Несомненно, что $\pi W \leqslant \pi U$ и $\pi W \leqslant \pi V$. Стало быть, $\pi W \leqslant \pi(U \wedge V)$. Отсюда

$$[\![W\uparrow \leqslant (U \wedge V)\uparrow]\!] = [\![(\forall x \in E^{\wedge\sim},\ x \geqslant 0)\ W\uparrow x \leqslant (U \wedge V)\uparrow x]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x \in E_+} [\![Wx \leqslant (U \wedge V)x]\!] \geqslant \pi,$$

т.е. интересующая нас оценка равна единице. Иначе говоря, отображение $W \in L^{\sim}(E,F) \longrightarrow W\uparrow \in E^{\wedge\sim}\downarrow$ осуществляет изоморфизм структур $L^{\sim}(E,F)$ и $E^{\wedge\sim}\downarrow$. Тем самым можно утверждать, что $V$ – осколок $U$ в том и только в том случае, если $V\uparrow$ – осколок $U\uparrow$ внутри $V^{(B)}$.

**5.9.** Для множества проекторов $\mathcal{P}$ в $L^{\sim}(E,F)$ и $U \in L^{\sim}(E,F)_+$ эквивалентны утверждения:

(1) $\mathcal{P}(U)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(U)$;

(2) $\mathcal{P}$ порождает осколки $U$;

(3) оператор $V \in [0,U]$ служит осколком $U$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in E_+$ имеет место равенство:

$$\inf_{P \subset \mathcal{P}} (P^{\perp}Vx + P(U-V)x) = 0;$$

(4) $(\forall x \in {}^{0}E)(\exists P \in \mathcal{P}\uparrow\downarrow)\ PUx \approx Ux^{+}$.

**5.10.** (1) Множество $\mathcal{P}$ является порождающим в том и только в том случае, если для любых $U,V \in L^{\sim}(E,F)_+$ и $x \in E$ справедливы соотношения:

$$(U \vee V)x = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{(PU)x + (P^{\perp}V)x\};$$

$$(U \wedge V)x = \inf_{P \in \mathcal{P}} \{(Pu)x + (P^{\perp}V)x\}.$$

(2) Множество проекторов $\mathcal{P}:=\{\pi_e : e \in E_+\}$ является порождающим. В частности, имеет место утверждение 5.1 (1).

Нужно лишь заметить, что если $e:=x^+$, то $\pi_e Ux = \pi_e Ux^+ = Ux^+$, и применить 5.9 (4). Вторая часть утверждения следует из 5.9 (1). ▷

5.11. Для положительных операторов $U$ и $V$ и порождающего множества $\mathcal{P}$ проекторов в $L^\sim(E,F)$ эквивалентны следующие утверждения:

(1) $V \in \{U\}^{\perp\perp}$;

(2) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)(\forall P \in \mathcal{P})(\forall \pi \in B)\ \pi PUx \approx 0 \longrightarrow \pi PVx \approx 0$;

(3) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)(\forall \pi \in B)\ \pi Ux \approx 0 \longrightarrow \pi Vx \approx 0$;

(4) $(\forall x \geqslant 0)(\forall \varepsilon \in \mathcal{E})(\exists \delta \in \mathcal{E})(\forall P \in \mathcal{P})(\forall \pi \in B)\pi PUx \leqslant \longrightarrow \pi PVx \leqslant \varepsilon$;

(5) $(\forall x \geqslant 0)(\forall \varepsilon \in \mathcal{E})(\exists \delta \in \mathcal{E})(\forall \pi \in B)\pi Ux < \delta \longrightarrow \pi Vx \leqslant \varepsilon$.

**5.12. Теорема.** *Пусть $E$ - векторная решетка, $F$ - некоторое К-пространство с фильтром единиц $\mathcal{E}$ и базой $B$. Пусть, далее, $U,V$ - положительные операторы из $L^\sim(E,F)$ и $W$ - проекция $V$ на компоненту $\{U\}^{\perp\perp}$. Для положительного $x \in E$ справедливы представления:*

(1) $Wx = \sup\limits_{\varepsilon \in \mathcal{E}}\{\pi Vy + \pi^\perp Ux : 0 \leqslant y \leqslant x,\ \pi \in B,\ \pi U(x-y) \leqslant \varepsilon\}$;

(2) $Wx = \sup\limits_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \inf\{(\pi P)^\perp Vx : \pi PUx \leqslant \mathcal{E},\ P \in \mathcal{P},\ \pi \in B\}$,

*где $\mathcal{P}$ - порождающее множество проекторов в $L^\sim(E,F)$.*

## Комментарий к лекции 5

(a) В изложении настоящей лекции следуем работам [20,35]. Основная идея, предложенная в [35], такова. Осколки положительного оператора $T$ суть крайние точки порядкового отрезка $[0,T]$. Последнее множество совпадает с субдифференциалом в нуле (опорным множеством) $\partial P$ сублинейного оператора $Px = Tx^+$. Тем самым изучение осколков положительного оператора сводится к описанию экстремальной структуры субдифференциалов. Такое описание для общих сублинейных операторов впервые получено в работе С.С.Кутателадзе [32] (подробное изложение см. в [27]). Отметим, что подход, разработанный в [32], решает, в частности, и задачу о крайнем продолжении положительного оператора (литературу по этому поводу см. в [5,27]).

(б) Формулу типа 5.1 (1) впервые установил де Пагте (см. [41]) с двумя существенными ограничениями: $F$ имеет тотальное множество $o$-непрерывных функционалов, а $E$ порядково полно. Первое ограничение устранено в [31], второе – в [2,20]. Все эти случаи соответствуют различным порождающим множествам проекторов. Понятие порождающего множества введено в [35].

(в) Формулы проектирования типа 5.1 (2,3) формировались постепенно. Некоторое представление об этой истории можно получить по [41,42]. Общий подход, предложенный в [35], позволяет получать различные формулы проектирования, если брать конкретные порождающие множества проекторов.

## Литература


1. **Акилов Г.П., Кутателадзе С.С.** Упорядоченные векторные пространства. – Новосибирск: Наука, 1978.

2. **Бухвалов А.В.** Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 26. – С.3-63.

3. **Бухвалов А.В., Векслер А.И., Гейлер В.А.** Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С.125-184.

4. **Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я.** Банаховы решетки – некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук, 1979. – Т. 34, № 2, – С.137-183.

5. **Векслер А.И.** О новой конструкции дедекиндова пополнения некоторых структур и $l$-групп с делением // Сиб. мат. журн. – 1969. – Т.10, № 6. – С. 1206-1213.

6. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. – М.: Наука.

7. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961.

8. **Гордон Е.И.** Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 237, № 4. – С. 773-775.

9. **Гордон Е.И.** К теоремам о сохранении соотношений в *K*-пространствах // Сиб. мат. журн. - 1982. - Т. 23, № 5. - С. 55-65.

10. **Йех.Т.** Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, 1973.

11. **Канторович Л.В.** О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций. - Докл. АН СССР, 1935. - Т. 4, № 1-2. - С.11-14.

12. **Канторович Леонид Витальевич.** Материалы к библиографии ученых СССР. Сер. мат. Т. 18. - М.: Наука, 1989.

14. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984. - 752 с.

14. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л: Гостехиздат, 1950. - 548 с.

15. **Коэн П.** Теория множеств и континуум гипотеза. - М.: Мир, 1973. - 348 с.

16. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962. - 342 с.

17. **Кусраев А.Г.** О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.271, № 1. - С.281-284.

18. **Кусраев А.Г.** Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1986. - 254 с.

19. **Кусраев А.Г.** Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // 8 Всесоюзная конф. по мат. логике, Москва, 1986. - С.99.

20. **Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Субдифференциальное исчисление. - Новосибирск: Наука, 1987. - 224 с.

21. **Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Нестандартные методы анализа. - Новосибирск: Наука, 1990.

22. **Кутателадзе С.С.** Спуски и подъемы // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.272, № 2. - С.521-524.

23. **Манин Ю.И.** Доказуемое и недоказуемое. - М.: Сов. радио, 1979. - 168 с.

24. **Сикорский Р.** Булевы алгебры. - М.: Мир, 1969. - 376 с.

25. **Aliprantis C.D., Burkinshaw O.** Locally solid Riesz

spaces. - N.Y. a.o.: Academic Press, 1978.

26. **Aliprantis C.D., Burkinshaw J.** Positive operators. - N.Y.: Acad. Press, 1985. - 367 p.

27. **Bell T.L.** Bollean valued models and independence proofs in set theory. - Oxford: Clarendon Press, 1979. - 126 p.

28. **Doods P.G., Fremlin D.H.** Compact operators in Banach lattices // Isr. J. Math. - 1979. - V.34, № 4. - P.287-320.

29. **Fremlin D.H.** Topological Riesz spaces and measure theory. - Cambridge Univ. Press, 1974.

30. **Halmos P.R.** Lectures on Boolean algebras. - Toronto - N.Y. - London: Van Nostrand, 1963.

31. **Le Jonge E., Van Rooij A.C.M.** Introduction to Riesz spaces. - Amsterdam: Mathematisch centrum, 1977. - 229 p.

32. **Jameson G.J.O.** Ordered linear spaces. - Berlin a.o.: Springer, 1970. - 194. (Lecture Notes in Math., № 141).

33. **Jech T.** Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc. - 1985. - V.289, № 1. - P.133-162.

34. **Jech T.** First order theory of complete Stonean algebras // Canad. Math. Bull. - 1987. - V.30, № 4. - 385-392.

35. **Jech T.** Bolean linear spaces. - Pennsylvania: Penn. St. Univ., 1987. - 124 p.

36. **Lacey H.E.** The isometric theory of classical Banach spaces. - Berlin a.o.: Springer, 1974. - 243 p.

37. **Lindenshauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. Function spaces.- Berlin a.o.: Springer, 1979. - 243 p.

38. **Luxemburg W.A.J., Zaanen A.G.** Riesz spaces. V.1. - Amsterdam - London: North Holland, 1971. - 514 p.

39. **Peressini A.I.** Ordered topological vector spaces. - N.Y.: Harper and Row, 1967. - 228 p. (Harper's ser. in modern Math.)

40. **Rosser J.B.** Simplified independence proofs: Boolean-valued models of set theory. - N.Y.: Academic Press, 1969.

41. **Schaefer H.H.** Banach lattices and positive operators. - Berlin a.o.: Springer, 1974. - 376 p.

42. **Schwarz H.-V.** Banach lattices and operators. - Leipzig: Teubner, 1984. - 208 p.

43. **Solovay R.** A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. - 1970. - V.92, № 2. - P.1-56.

44. **Solovay R., Tennenbaum S.** Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. - 1972. - V.94, № 2. - P.201-245.

45. **Takeuti G.** Two applications of logic to mathematics. - Tokio - Princeton: Ivanami and Princeton Univ. Press, 1978. - 137 p.

46. **Takeuti G., Zaring W.M.** Introduction to the axiomatic set theory. - N.Y. a.o.: Springer, 1971. - 348 p.

47. **Takeuti G., Zaring W.M.** Axiomatic set theory. - N.Y. a.o.: Springer, 1973. - 238 p.

48. **Vopenka P.** General theory of $\nabla$-models // Comment. Math. Univ. Carolinae. - 1967. - V.7, № 1. - P.147-170.

49. **Vopenka P., Hajek P.** The theory of semisets. - Amsterdam: North Holland, 1972.

50. **Wong Y.-Ch., Ng K.-F.** Partially ordered topological vector spaces. - Oxford: Clarendon Press, 1973. - 217 p.

51. **Zaanen A.Z.** Riesz spaces. V.2. - Amsterdam a.o.: North Holland, 1983. - 720 p.

*Поступила в редакцию*
*28 августа 1990 г.*