Посвящается светлой памяти Глеба Павловича Акилова

УДК 517.98

О ВЕКТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА

С.А.Малюгин

Данная работа является продолжением [1], где рассматривалась проблема моментов Хаусдорфа для последовательности векторов в решеточно нормированном пространстве. Здесь аналогичная задача решается в постановке Гамбургера. Показывается, что при более слабых ограничениях на моментную последовательность векторов $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ из o-полного решеточно нормированного пространства Y существует борелевская мера $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$ такая, что

$$y_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \mu(d\lambda) \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

В отличие от задачи Хаусдорфа здесь μ задается не на ограниченном интервале, а на всей прямой. Как будет видно далее, отличие имеется не только в постановке задачи, но и в методах решения. Например, в проблеме моментов Гамбургера возникает нетривиальная задача о единственности представляющей меры μ. В скалярном случае все эти вопросы изложены в [2,3].

Отметим, что известную теорему Фрейденталя о представлении произвольного элемента a из K_σ-пространства F в виде интеграла по спектральной мере также можно рассматривать как решение проблемы моментов Гамбургера для последовательности $\{a^k\}_{k=0}^{\infty}$ степеней элемента a. Другие векторные постановки задачи о моментах рассматривались в [4-6].

1. Вспомогательные результаты

В [7-9] имеются все необходимые для дальнейшего сведения о K-пространствах, решеточно нормированных пространствах и мажорируемых операторах. Далее будем рассматривать o-полное решеточно нормированное пространство $(Y,|\cdot|,F)$ с нормирующим K-пространством F и векторной нормой $|\cdot|$ (разложимость нормы не предполагается). Через $B(\mathbb{R})$ обозначаем борелевскую σ-алгебру вещественной прямой $\mathbb{R}$. Борелевской мерой ограниченной векторной вариации из $B(\mathbb{R})$ в Y называем σ-аддитивную меру $\mu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$, для которой существует положительная σ-аддитивная мера $\nu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ такая, что $|\mu(B)| \leqslant \nu(B)$ $(B \in B(\mathbb{R}))$. В K-пространстве всех ограниченных мер $\nu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ существует наименьшая, удовлетворяющая указанному неравенству. Она называется векторной вариацией меры μ и обозначается через $|\mu|$ (см.[10]).

Обозначим через $C_p(\mathbb{R})$ векторную решетку всех непрерывных полиномиально ограниченных функций, т.е. $f \in C_p(\mathbb{R})$ означает, что $f \in C(\mathbb{R})$ и существует полином p такой, что $|f(\lambda)| \leqslant p(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Рассмотрим все полиномы вида

$$q(\lambda) = c_0 + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{2k}\lambda^{2k},$$

где $c_0, c_2, c_4, \ldots, c_{2k} \in \mathbb{N}$. Занумеруем их в одну последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для данного мажорируемого оператора $T : C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$ рассмотрим счетный набор последовательностей

$$S = \left\{\left\{\frac{1}{k}|T|q_n\right\}_{k=1}^{\infty} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Множество S обладает следующими свойствами (ср. [10, с.37]):

1) если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$, то $e_k \searrow 0$;

2) если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ S, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$, то $\{e_k+f_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$.

В [10] свойство 2) сформулировано для направленностей и по форме отличается от написанного здесь, но на самом деле эти различия несущественны.

Определение 1. Говорим, что направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in B} \subset Y$ S-сходится к элементу $y \in Y$, если существует последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in S$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $\beta_k \in B$, для которого $|y_\beta - y| \leqslant e_\alpha$ при всех $\beta \geqslant \beta_k$.

Определение 2. Мажорируемый оператор $T:C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$ называем S-непрерывным, если для любой направленности $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset C_p(\mathbb{R})$, убывающей поточечно к нулю, направленность $\{Tf_\alpha\}_{\alpha\in A}$ S-сходится к нулю.

Лемма 1. *Любой мажорируемый оператор $T:C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$ является S-непрерывным.*

Доказательство. Пусть дана направленность $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset C_p(\mathbb{R})$, убывающая поточечно к нулю. Фиксируем $\alpha_0 \in A$ и рассмотрим полином q_n из нашего набора такой, что $f_\alpha \leqslant q_n$. Полагаем $p(\lambda) = (\lambda^2+1)q_n(\lambda)$. Полином p тоже будет каким-то членом последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, поэтому последовательность $e_k = \frac{1}{k}|T|p$ ($k \in \mathbb{N}$) будет принадлежать S. Для данного $k \in \mathbb{N}$ при $\lambda^2 > k$ будем иметь $f_{\alpha_0}(\lambda) \leqslant q_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{k}p(\lambda)$. Если же $\lambda^2 \leqslant k$, то в силу теоремы Дини найдется $\alpha_k \geqslant \alpha_0$ такой, что для всех $\lambda \geqslant \lambda_k$ будем иметь $f_\alpha(\lambda) \leqslant \frac{1}{k}p(\lambda)$. Отсюда следует, что

$$|T|f_\alpha \leqslant e_k \quad (\alpha \geqslant \alpha_k), \text{ где } e_k = \frac{1}{k}|T|p \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Это и означает, что оператор T и его мажорантная норма $|T|$ являются S-непрерывными. Лемма доказана.

Теорема I. *Для любого мажорируемого оператора $T:C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$*

существует единственная борелевская мера $\mu:\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$, имеющая ограниченную векторную вариацию, такая, что $\mathcal{L}_1(\mu) \supset C_p(\mathbb{R})$ и справедливо интегральное представление

$$Tf = \int f d\mu \quad (f \in C_p(\mathbb{R})). \tag{1}$$

Эта теорема является прямым следствием леммы 1 и теоремы 1.4.10 из [10].

2. Проблема моментов для K-пространства

Определение 3. Последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ из K-пространства F называется позитивной, если имеют место неравенства

$$\sum_{k,l=0}^{n} s_{k+l}\sigma_k\sigma_l \geqslant 0 \quad (\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \quad n = 0,1,2,\ldots).$$

Теорема 2. *Для данной последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ существует положительная борелевская мера $\nu:\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ такая, что*

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \nu(d\lambda) \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ позитивна.

Доказательство. Необходимость требования позитивности очевидна. Докажем достаточность. На векторном пространстве $P(\mathbb{R})$ всех полиномов с вещественными коэффициентами определим линейный оператор U по формулам

$$U(p) = \sum_{k=0}^{n} c_k s_k, \qquad \text{где} \quad p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k\lambda^k \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Так как любой неотрицательный полином на $\mathbb{R}$ является суммой квадратов двух других полиномов [2], то из позитивности последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует положительность оператора U. По теореме Канторовича (см. [7, теорема X.3.1]) U продолжается до положительного оператора $V:C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow F$. Применяя теорему 1 в случае, когда $Y = F$, получим положительную борелевскую меру $\nu:\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow F$, для которой справедливы равенства (1). В частнос-

ти, выполняются все равенства (2). Теорема доказана.

Теперь займемся исследованием вопроса единственности представляющей меры ν.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ *позитивна, то компонента, порожденная элементом* s_0, *содержит все остальные элементы* s_k $(k \geqslant 1)$.

Это сразу следует из теоремы 2, так как

$$s_0 = \int_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) = \nu(\mathbb{R}).$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что в F имеется порядковая единица $\mathbb{1}$, равная s_0. Относительно этой единицы в F можно однозначно ввести умножение элементов. В частности, все определители

$$D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix}$$

неотрицательны. Пусть ρ_n - носитель элемента $D_n \in F$. Как легко заметить, $\rho_0 = \mathbb{1}$, $\rho_{n-1} \geqslant \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Полагаем $\tau_n = \rho_{n-1} - \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\rho = \inf_n \rho_n$. Спроектируем последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ на компоненту, порожденную единичным элементом τ_n. Обозначив $s_k^{(n)} = \tau_n \cdot s_k$ $(k = 0,1,2,\dots)$, $\nu_n = \tau_n \cdot \nu$, видим, что в этой компоненте задача о моментах вырождается. Точнее, справедлив следующий факт.

Лемма 3. *Мера* ν_n, *являющаяся решением проблемы моментов для последовательности* $\{s_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$, *разлагается в сумму* n *спектральных мер*

$$\nu_n = \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} \mu_i^{(n)}, \qquad c_i^{(n)} \in \{\tau_n\}^{dd} \quad (i = 1,\dots,n). \tag{3}$$

Меры $\mu_i^{(n)}$ и $\mu_j^{(n)}$ при $i \neq j$ дизъюнктны. Такое представление в определенном смысле единственно (см.[11, теорема 4.4]). Именно,

если имеется другое представление

$$\nu_n = \sum_{i=0}^{m} d_i^{(m)} \beta_i^{(m)}$$

с другими дизъюнктными спектральными мерами $\beta_i^{(m)}$, то $m = n$ и найдется матрица $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, состоявшая из единичных элементов K-пространства F такая, что

$$b_{ij} \wedge b_{ik} = 0, \quad b_{jl} \wedge b_{kl} = 0 \quad (j \neq k), \qquad \sup_j b_{ij} = 1,$$

$$\beta_i^{(n)} = \sup_j b_{ij} \mu_j^{(n)},$$

$$d_i^{(n)} = \sup_j b_{ij} c_j^{(n)}.$$

Доказательство. Существует набор элементов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ из $\{\tau_n\}^{dd}$, для которого

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i \, s_{i+k}^{(n)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Так как D_{n-1} строго положителен в компоненте $\{\tau_n\}^{dd}$, то $\xi_i \in \{\xi_n\}^{dd}$ $(i < n)$ и набор $\{\xi_i\}_{i=0}^{n}$ единствен с точностью до умножения на строго ненулевой элемент из $\{\tau_n\}^{dd}$. Рассмотрим многочлен с векторными коэффициентами $\xi_0 + \xi_1\lambda + \ldots + \xi_n\lambda^n$. Сейчас удобно будет перейти к реализации компоненты $\{\tau_n\}^{dd}$ в пространстве $C_\infty(Q_n)$ (Q_n – экстремальный компакт). Тогда из функционального равенства $\xi_0(q) + \xi_1(q)\lambda + \ldots + \xi_n(q)\lambda^n = 0$ $(q \in Q_n)$ можно будет найти n непрерывных функций $\{\lambda_i(q)\}_{i=1}^{n}$, обращающих это равенство в тождество. Причем эти функции существенно различны, т.е. при $i \neq j$ равенства $\lambda_i(q) = \lambda_j(q)$ возможны только на нигде не плотном множестве. Следовательно, мы показали, что векторный многочлен $\xi_0 + \xi_1\lambda + \ldots + \xi_n\lambda^n$ имеет n существенно различных векторных корней $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. Теперь задача о моментах сводится к нахождению векторов $\{c_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ из системы уравнений

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)}\lambda_i^k \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1).$$

Чтобы связать это решение с мерой ν_n, рассмотрим спектральные меры $\mu_i^{(n)}$ для элементов λ_i. Тогда, как легко видеть, в компоненте $(\tau_n)^{dd}$ получается разложение ν_n на n спектральных мер:

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)}\mu_i^{(n)}.$$

Дизъюнктность мер $\mu_i^{(n)}$ и $\mu_j^{(n)}$ при $i \neq j$ следует из того, что равенства $\lambda_i(q) = \lambda_j(q)$ выполняются на нигде не плотном множестве (это еще эквивалентно тому, что $|\lambda_i - \lambda_j|$ является порядковой единицей в $(\tau_n)^{dd}$). Единственность представления в указанном смысле следует из того, что корни $\{\lambda_i(q)\}_{i=1}^{n}$ определяются единственным образом с точностью до перенумерации их на открыто замкнутых подмножествах Q_n. Лемма доказана.

Отметим, что из леммы 3 при $n = 1$ легко выводится следующий критерий спектральности меры (случай $n = 1$ в лемме 3 как раз соответствует теореме Фрейденталя).

Следствие 1. *Положительная мера $\mu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ является спектральной тогда и только тогда, когда*

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \lambda\mu(d\lambda)\right]^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\mu(d\lambda) \in mF.$$

Осталось рассмотреть невырожденный случай, которому соответствует компонента $(\rho)^{dd}$. Обозначим проекции векторов s_k на эту компоненту через $s_k^{(\infty)}$, а проекцию меры ν – через $\nu^{(\infty)}$. Комплексификацию K-пространства F будем обозначать через $F_{\mathbb{C}}$.

Лемма 4. *Для любого невещественного $\lambda \in \mathbb{C}$ существуют два вектора $w_1, w_2 \in (\rho)^{dd}$, $w_1 \leqslant w_2$, такие, что вектор $w \in (\rho)^{dd}$ удовлетворяет неравенствам $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$ тогда и только тогда, когда найдется положительная мера $\beta : B(\mathbb{R}) \longrightarrow F$, являющаяся решением проблемы моментов для последовательности $\{s_k^{(\infty)}\}_{k=0}^{\infty}$ и удовлетворяющая соотношению*

$$w = \int_{\mathbb{R}} Re \frac{1}{u-\lambda} \ \beta(du).$$

Доказательство. По моментной последовательности $\{s_k^{(\infty)}\}_{k=0}^{\infty}$ построим так же, как и в [2], якобиеву матрицу с векторными коэффициентами a_k, b_k ($k = 0,1,2,\ldots$), далее строим систему полиномов $P_k(\lambda)$, $Q_k(\lambda)$ и по тому же самому алгоритму определяем для данного невещественного $\lambda \in \mathbb{C}$ векторный круг Неванлинны $K_\infty(\lambda) \subset F_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим вектор

$$w^* = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda} \ \nu^{(\infty)}(du).$$

Так как для непрерывной функции этот интеграл есть (r)-предел сумм Стильтьеса по фиксированной счетной последовательности разбиений, то, переходя опять к стоуновской реализации, получим для каждого q из экстремального компакта Q (за исключением тощего множества) скалярную задачу Гамбургера. Применяя теорему 2.2.4 из [2] для всех таких q, получим, что $w^* \in K_\infty(\lambda)$. Пусть R – векторный радиус круга $K_\infty(\lambda)$, а C – его центр. Полагая $w_1 = ReC - R$, $w_2 = ReC + R$, $w = Re\, w^*$, будем иметь $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$. Обратно, возьмем элемент $w^* = w_2 + i \operatorname{Im} C$. Он лежит на границе круга $K_\infty(\lambda)$. Это значит, что для всех $q \in Q$ (кроме тощего множества) точка $w^*(q)$ лежит на границе обычного комплексного круга $K_\infty(\lambda)(q)$. Прямо воспользоваться обратным утверждением теоремы 2.2.4 из [2] не можем, так как скалярная мера там строится с помощью теоремы Хэлли и возникает трудность со "склеиванием" построенных таким образом скалярных мер в одну векторную меру. Поэтому предварительно дополним теорему 2.2.4 из [2]. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = Re \frac{1}{u-\lambda} \qquad (u \in \mathbb{R}).$$

Пусть скалярная мера $\beta : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ является таким решением проблемы Гамбургера для последовательности $\{s_k^{(\infty)}(q)\}_{k=0}^{\infty}$, что выполняется

$$w^*(q) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda} \ \beta(du).$$

Через Φ_β обозначим функционал, определяемый равенствами

$$\Phi_\beta(f) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\beta(du) \qquad (f \in C_p(\mathbb{R})).$$

Докажем равенство

$$\hat{\Phi}_\beta(\varphi) := \inf\{\Phi_\beta(p) : p \in P(\mathbb{R}),\ p \geqslant \varphi\} = \Phi_\beta(\varphi) =$$

$$= Re\, w^*(q) = w_2(q).$$

Так как Φ_β - положительный функционал, то $\hat{\Phi}_\beta(\varphi) \geqslant \Phi_\beta(\varphi)$. Построим теперь новый положительный функционал $\Phi : C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Положим $\Phi_0 = \Phi_\beta|_{P(\mathbb{R})}$. Далее будем продолжать функционал Φ_0 на пространство $C_p(\mathbb{R})$ в точности так же, как это делается в теореме Канторовича (см. [7, теорема X.3.1]). Этим способом можно получить такое продолжение Φ, чтобы выполнялось равенство $\Phi(\varphi) = \hat{\Phi}_0(\varphi) = \hat{\Phi}_\beta(\varphi)$. По теореме 1 существует положительная борелевская мера $\mu : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\Phi = \Phi_\mu$. Так как μ тоже является решением этой же проблемы моментов, то по теореме 2.2.4 из [2] получаем, что точка

$$w_\mu = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\,\mu(du)$$

должна тоже принадлежать кругу $K_\infty(\lambda)(q)$. Отсюда сразу следует неравенство $\Phi(\varphi) \leqslant w_2(q)$ и, так как $\Phi(\varphi) = \hat{\Phi}_\beta(\varphi)$, то $\hat{\Phi}_\beta(\varphi) \leqslant \omega_2(q) = \Phi_\beta(\varphi)$. Следовательно, $\hat{\Phi}_\beta(\varphi) = w_2(q)$. Зададим оператор $U : P(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ по формулам

$$U(p) = \sum_{k=0}^{n} c_k s_k^{(\infty)}, \qquad \text{где} \qquad p(u) = \sum_{k=0}^{n} c_k u^k \, (u \in \mathbb{R}).$$

Так как в пространстве $C_\infty(Q)$ точные верхние и нижние грани вычисляются поточечно, за исключением тощего множества, то из вышеизложенного получаем равенство

$$\hat{U}(\varphi) = \inf\{U(p) : p \in P(\mathbb{R}),\ p \geqslant \varphi\} = w_2.$$

Пользуясь этой же теоремой Канторовича в векторном виде, продол-

жаем U до оператора $V_2 : C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ так, чтобы выполнялось равенство $V_2(\varphi) = \hat{U}(\varphi) = w_2$. Аналогичным образом продолжаем U до другого оператора $V_1 : C_p(\mathbb{R}) \longrightarrow F$, удовлетворяющего равенству $V_1(\varphi) = w_1$. По теореме 1 получаем векторные положительные меры $\beta_j : B(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ $(j = 1,2)$, решающие проблему моментов для последовательности $\{s_k^{(\infty)}\}_{k=0}^{\infty}$ и такие, что

$$w_j = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\beta_j(du) \qquad (j = 1,2).$$

Если вектор w удовлетворяет неравенствам $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$, то $w = a_1 w_1 + a_2 w_2$ при некоторых $a_1, a_2 \in F$. Тогда мера $\beta = a_1\beta_1 + a_1\beta_2$ будет требуемым решением. Лемма доказана.

Пусть $\tau_н$ – носитель элемента $w_2 - w_1$, а $\tau_0 = \rho - \tau_н$. Все вышеизложенное сейчас можно сформулировать в одном утверждении.

Теорема 3. *Для любой позитивной последовательности векторов $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$, $s_0 = 1$, существует единственное разбиение единицы 1 в дизъюнктную последовательность элементов $\tau_0, \tau_н$, $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ такое, что*

1) в компоненте $\{\tau_0\}^{dd}$ для проекций $s_k^{(0)} = \tau_0 \cdot s_k$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ проблема моментов невырождена и решается единственным образом;

2) для любого ненулевого единичного элемента $\tau \leqslant \tau_н$ в компоненте $\{\tau\}^{dd}$ для проекций $s_k^{(н)} = \tau \cdot s_k$ $(k = 0,1,2\ldots)$ проблема моментов невырождена и имеет неединственное решение;

3) для любого $n \in \mathbb{R}$ в компоненте $\{\tau_n\}^{dd}$ для проекций $s_k^{(n)} = \tau_n \cdot s_k$ $(k = 0,1,2\ldots)$ проблема моментов вырождена и ее единственное решение есть линейная комбинация из n дизъюнктных спектральных мер.

Теорема 3 получена здесь методами классического функционального анализа, но можно отметить также, что она имеет еще естественную булевозначную интерпретацию.

3. Проблема моментов для решеточно нормированного пространства

Решение задачи Гамбургера в o-полном решеточно нормированном пространстве $(Y, |\cdot|, F)$ в случае, когда оно разложимо по Канторовичу, по существу сводится к теореме 3. Совсем иная ситуация возникает в общем случае, когда разложимость Y не предполагается. Здесь появляются технические трудности, в связи с чем в формулировке теоремы 4 требуется дополнительное условие (5), которое в скалярном случае соответствует известному условию Харди (см. [2]).

Теорема 4. *Пусть в o-полном решеточно нормированном пространстве Y дана последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Допустим, что последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ удовлетворяет условиям*

$$\left| \sum_{k,l=0}^{n} y_{k+l}\sigma_k\sigma_l \right| \leqslant \sum_{k,l=0}^{n} s_{k+l}\sigma_k\sigma_l$$

$$\left(\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R},\ n = 0,1,2\ldots \right)$$

и при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, в K-пространстве F сходится положительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k} s_{2k}}{(2k)!}. \tag{5}$$

Тогда существует единственная борелевская мера $\mu : B(\mathbb{R}) \to Y$ ограниченной векторной вариации такая, что

$$y_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \mu(d\lambda) \quad (k = 0,1,2\ldots). \tag{6}$$

Доказательство. Из (4) следует позитивность последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. По теореме 2 существует борелевская положительная мера $\nu : B(\mathbb{R}) \to F$, для которой

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \nu(d\lambda) \quad (k = 0,1,2\ldots).$$

Из сходимости ряда (5) следует, что при некотором $\alpha > 0$ функция

$e^{\alpha|\lambda|}$ принадлежит $\mathcal{L}_1(\nu)$. Определим оператор $T:\mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow F$ по формулам

$$Tp = \sum_{k=0}^{n} c_k y_k, \quad \text{где} \quad p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Из (4) видно, что при $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $p \geqslant 0$, выполняется оценка $|Tp| \leqslant Up$, где мажоранта U есть интеграл

$$Uf = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\nu(d\lambda) \qquad (f \in \mathcal{L}_1(\nu)).$$

Пусть $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $0 < \beta < \alpha$, и последовательность полиномов $\{p_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся поточечно к функции $\cos(\beta\lambda/2)$, удовлетворяет оценкам $|p_k(\lambda)| \leqslant e^{\beta|\lambda|/2}$ $(k \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R})$. (Этим условиям удовлетворяет, например, последовательность частичных сумм ряда Тейлора для функции $\cos(\beta\lambda/2)$.) Для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{R}$ существует $m \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|q(\lambda)[(p_k(\lambda))^2 - (p_l(\lambda))^2]| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{\lambda^2}{n^2}[(q(\lambda))^2 + 1] \cdot [(p_k(\lambda))^2 + (p_l(\lambda))^2] =$$

$$= r_{k,l}(\lambda)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $k,l \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$, $l \geqslant m$. Полиномы

$$q_{k,l}(\lambda) = r_{k,l}(\lambda) - q(\lambda) \cdot [(p_k(\lambda))^2 - (p_l(\lambda))^2]$$

неотрицательны на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$|T(qp_k^2) - T(qp_l^2)| \leqslant \int (q_{k,l} + r_{k,l})\, d\nu \leqslant 3 \int r_{k,l}\, d\nu =$$

$$= 3\,\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) + \frac{6}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2[(q(\lambda))^2 + 1]e^{\beta|\lambda|}\nu(d\lambda).$$

Это доказывает o-фундаментальность последовательности $\{T(qp_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$. Из предыдущих рассуждений следует также o-фундаментальность последовательности $\{T(qq_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$, где $q_k(\lambda) = p_k(\frac{\pi}{1\beta} - \lambda)$ $(k \in \mathbb{N})$. Теперь для функции

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda$$
$$(p,q,r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

полагаем по определению

$$T_1 g = Tp + \text{o-}\lim_k \{T(q(2p_k^2 - 1)) + T(r(2q_k^2 - 1))\}.$$

Таким образом, получим линейный оператор $T_1 : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$, определенный на пространстве $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ всех функций вида

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda$$
$$(p,q,r \in \mathcal{P}(\mathbb{R})).$$

Пусть функция g, имеющая такое представление, неотрицательна. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$-\varepsilon - \frac{\lambda^2}{n^2}\{[p(\lambda))^2 + 1] + [(q(\lambda)^2 + 1]\cdot[2(p_k(\lambda))^2+1] +$$
$$+ [(r(\lambda))^2+1]\cdot[2(q_k(\lambda))^2+1]\} \leqslant$$
$$\leqslant p(\lambda) + q(\lambda)[2(p_k(\lambda))^2-1] + r(\lambda)[2(q_k(\lambda))^2 - 1]$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$|T_1 g| \leqslant \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\nu(d\lambda) + 2\varepsilon\int_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) +$$
$$+ \frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\{(p(\lambda))^2+1+[(q(\lambda))^2+1](2e^{\beta|\lambda|}+1) +$$
$$+ [(r(\lambda))^2+1](2e^{\frac{\pi}{2}+\beta|\lambda|} + 1)\}\nu(d\lambda).$$

Отсюда следует оценка

$$|T_1 g| \leqslant \int_{\mathbb{R}} g d\nu \quad (g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}),\ g \geqslant 0).$$

Полагая (для фиксированных $p,q,r,s,t \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

$$g_k(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda +$$

$$+ s(\lambda)\{2[(p_k(\lambda))^2 - 1]\cos\beta\lambda - [2(q_k(\lambda))^2 - 1]\sin\beta\lambda\} +$$
$$+ t(\lambda)\{4[(p_k(\lambda))^2 - 2]\sin\beta\lambda\},$$

можно доказать o-фундаментальность последовательности $\{T_1 g_k\}_{k-1}^{\infty}$. После чего для функции

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda +$$
$$+ s(\lambda)\cos 2\beta\lambda + t(\lambda)\sin 2\beta\lambda$$

определяем

$$T_2 g := o\text{-}\lim T_1 g_k.$$

Продолжая индуктивно такие построения, получим линейный оператор $T_\beta : P_\beta(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$, определенный на пространстве $P_\beta(\mathbb{R})$ всех функций вида

$$s(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} [c_k(\lambda)\cos k\beta\lambda + d_k(\lambda)\sin k\beta\lambda]\cdot$$

$$\left[\{c_k\}_{k=1}^{n},\ \{d_k\}_{k=1}^{n} \subset P(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}\right]$$

и продолжающий оператор T, причем справедлива оценка

$$| T_\beta s| \leqslant \int_{\mathbb{R}} s d\nu \quad (s \in P_\beta(\mathbb{R}),\ \ s \geqslant 0).$$

Рассмотрим теперь при некотором $0 < \beta < \alpha$ последовательность $\beta_n = \beta/2^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Полагаем $T_n = T_{\beta_n}$, $P_n = P_{\beta_n}(\mathbb{R})$. Очевидно, что $P_n \subset P_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Можно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор T_{n+1} является продолжением оператора T_n.

Доказательство не приводим, так как в нем используется точно такая же техника. Существует единственный линейный оператор $T_\infty : P_\infty \longrightarrow Y$, определенный на пространстве $P_\infty = \bigcup_{n=1} P_n$, такой, что при любом $n \in \mathbb{N}$ ограничение T_∞ на P_n совпадает с T_n. Рассмотрим в P_∞ линейное подпространство P_0 всех тригонометрических полиномов вида

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cos\left[\frac{k\lambda}{2^{n-1}}\right] + d_k \sin\left[\frac{k\lambda}{2^{n-1}}\right]\right\};$$

$$\left[\{c_k\}_{k=1}^m,\ \{d_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R},\quad m,n \in \mathbb{N}\right].$$

Ограничение T_∞ на P_0 обозначим через T_0. По равномерной непрерывности оператор T_0 единственным образом продолжается до линейного оператора $\overline{T_0}:\overline{P_0} \longrightarrow Y$ на равномерное замыкание $\overline{P_0}$ пространства P_0. Очевидно, $\overline{P_0}$ содержит подпространство P_* всех непрерывных периодических функций, периодами которых являются числа $2^n\pi/\beta$ $(n \in \mathbb{N})$. Основной результат всех предыдущих длинных построений состоит в том, что P_* является векторной решеткой функций. Пусть T_* - ограничение $\overline{T_0}$ на подпространство P_*. Из оценки (7) сразу следует, что оператор T_* мажорируемый. Его секвенциальная o-непрерывность сразу следует из секвенциальной o-непрерывности мажоранты U. Существует единственная борелевская мера $\mu:B(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$ такая, что

$$T_*s = \int_{\mathbb{R}} s d\mu \quad (s \in P_*).$$

При этом векторная вариация $|\mu|$ не превосходит ν. Покажем, что для μ справедливы равенства (6). Для любого четного $k \in \mathbb{N}$ и любого натурального n полагаем

$$s_{k,n}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{\pi\cdot m\cdot 2^n}{\beta}\right)^k,$$

если

$$\left|\lambda - \frac{\pi\cdot 2^{n-1}}{\beta}\right| \leqslant \frac{\pi\cdot 2^{n-1}}{\beta} \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Для нечетного $k \in \mathbb{N}$ и натурального n положим

$$s_{k,n}(\lambda) = (-1)^m\left(\lambda - \frac{\pi\cdot m\cdot 2^n}{\beta}\right)^k$$

при λ, удовлетворяющих предыдущему неравенству. Все функции $s_{k,n}$ $(k,n \in \mathbb{N})$ непрерывные периодические с периодом $\pi\cdot 2^n/\beta$. Для любых $k,n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $t_{k,n} \in P_0$,

для которого

$$|s_{k,n}(\lambda) - t_{k,n}(\lambda)| < \varepsilon \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Это значит, что

$$|\lambda^k - t_{k,n}(\lambda)| \leqslant \varepsilon + \frac{\lambda^2\beta^2}{\pi^2\cdot 2^{2n}} \quad (\lambda^{2n}+1).$$

Отсюда следует неравенство

$$|T_\infty(f_k) - T_\infty(t_{k,n})| \leqslant 3\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) +$$

$$+ \frac{3\beta^2}{\pi^2\cdot 2^{2n-2}} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\lambda^{2k}+1)\nu(d\lambda),$$

где $f_k(\lambda) = \lambda^k$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Так как $T_\infty(f_k) = y_k$, то

$$\left|y_k - \int \lambda^k\mu(d\lambda)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| y_k - T_\infty(t_{k,n})\right| + \left| \int (t_{k,n} - f_k)d\nu\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon U(1) + \frac{4\beta^2}{\pi^2\cdot 2^{2n}} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\lambda^{2k}+1)\nu(d\lambda).$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ сразу следует формула (6). Доказательство единственности меры μ во многих деталях повторяет предыдущие построения, поэтому его опускаем. Теорема доказана.

Примерами решеточно нормированных пространств с неразложимой нормой являются счетно-нормированные пространства, а также произвольные локально-выпуклые векторные пространства. В качестве нормы векторов рассматриваются числовые семейства их полунорм. В этом случае o-сходимость будет эквивалентна топологической сходимости ограниченных направленностей. Еще одним примером может служить частично упорядоченное векторное пространство, имеющее сильную единицу. Здесь в качестве нормирующего K-пространства выступает его собственное дедекиндово пополнение.

Теорема 5. *Пусть Y — монотонно полное частично упорядоченное векторное пространство. Пусть дана позитивная последовательность*

$\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset Y$, *для которой при некотором* $\alpha > 0$ *сходится ряд* (5). *Тогда существует единственная положительная борелевская мера* $\nu : B(\mathbb{R}) \to F$ *такая, что*

$$s_k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k \nu(d\lambda) \quad (k = 0,1,2\ldots).$$

Доказательство. Пусть F - дедекиндово пополнение порядкового идеала $Y(s)$, где s является суммой ряда (5). Хорошо известно, что F является K-пространством. Существует единственная борелевская мера $\nu : B(\mathbb{R}) \to F$, решающая эту проблему моментов (здесь применяется теорема 2 в случае $Y = F$). Наша цель - показать, что $\nu[B(\mathbb{R})] \subset Y$. По условию, для любого $s \in P(\mathbb{R})$ будет

$$\int_{\mathbb{R}} s(\lambda)\nu(d\lambda) \in Y.$$

Покажем, что это включение сохраняется для любого тригонометрического полинома $s \in P_0$. Убедимся в этом на примере функции $\sin\beta\lambda$ $(0 < \beta < \alpha)$. Ряд Тейлора для $\cos(\beta\lambda/2)$ есть разность двух положительных рядов. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \sin\beta\lambda\nu(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ 2\cos^2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\beta\lambda}{2} \right] - 1 \right\} \nu(d\lambda) \in Y.$$

Так как любую непрерывную периодическую на $\mathbb{R}$ функцию можно представить монотонным равномерным пределом тригонометрических полиномов, требуемое включение сохраняется и для этого класса функций. Теперь, пользуясь только монотонными пределами, легко можно получить любую характеристическую функцию χ_B $(B \in B(\mathbb{R}))$. Поэтому $\nu(B) \in Y$ $(B \in B(\mathbb{R}))$. Теорема доказана.

Известно, что пространство всех ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве относительно естественного упорядочения монотонно полно. Поэтому мы получаем (см. [12])

Следствие 2. *Проблема моментов Гамбургера разрешима единственным образом для любой позитивной последовательности ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, для которой сходится ряд* (5) *(при некотором* $\alpha > 0$*) в слабой операторной топологии.*

Литература

1. **Кусраев А.Г., Малюгин С.А.** О векторной проблеме моментов // Оптимизация. - 1989. - Вып. 45(62). - С.99-107.

2. **Ахиезер Н.И.** Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.- М.: Физматгиз, 1961.

3. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.: Гостехиздат, 1950.

4. **Березанский Ю.М.** Обобщенная степенная проблема моментов // Тр. Моск. мат. об-ва. - 1970. - Т.21. - С.47-102.

5. **Schmüdgen K.** On a generalization of the classical moment problem // J. Math. Anal. Appl. - 1987. - V.125, № 2. - P.461-470.

6. **Sebestyen Z.** Moment theorems for operators on Hilbert space, II // Acta Sci. Math. Szeqel. - 1984. - V.74, № 1-2. - P.101-106.

7. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. - М.: Физматгиз, 1961.

8. **Кусраев А.Г.** Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.

9. **Кусраев А.Г., Стрижевский В.З.** Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. - 1987. - Т.7. : Исследования по геометрии и функциональному анализу. - С. 132-157.

10. **Кусраев А.Г., Малюгин С.А.** Некоторые вопросы теории векторных мер. - Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

11. **Кусраев А.Г., Малюгин С.А.** Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн. - 1989.- Т.30, № 5. - 101-110.

12. **Sz.-Nagy B.** A moment problem for self-adjoint operators // Acta Math. Acad. Sci. Hung. - 1952. - V.3. - P.285-293.

Поступила в редакцию
1 октября 1990 г.