Светлой памяти моего учителя
Глеба Павловича Акилова посвящаю

УДК 519.86+51.330.115

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В ЛИНЕЙНО-ОДНОРОДНОЙ ЭКОНОМИКЕ

А.М.Рубинов

1. В теории экономического равновесия, как правило, рассматриваются статические модели, в которых вся прибыль производителей распределяется между потребителями. Тем самым там полностью игнорируется воспроизводственная (инвестиционная) деятельность производителей. Ее учет возможен только в динамических моделях. В данной работе определяется некоторая модель динамического равновесия, в которой воспроизводство играет весьма существенную роль. Кратко суть модели заключается в следующем: в каждый момент t участники (потребители и производители) находят равновесие некоторой статической модели равновесия с фиксированными бюджетами (по поводу этих моделей см.[1,2]). Динамический аспект проявляется при формировании бюджетов в этой модели. Предполагается, что участники могут перераспределять имеющиеся у них де-

нежные средства между собой (давать друг другу ссуду под определенный процент). При этом они учитывают не столько состояние системы в данный момент, как это происходит в статике, сколько свое положение в будущем. Ключевую роль для производителей здесь играет не прибыль, а норма прибыли, которая требует рассмотрения однородных первой степени объектов. Подобная модель, в которой не учитывались потребители, рассматривалась ранее автором [3,4]. Основная сложность, которую пришлось преодолеть в данной работе, - включение потребителей в схему, предложенную в [3,4]. Близкий подход, основанный на использовании нормы прибыли, содержится в [5].

2. Рассматривается развитие во времени экономической системы, состоящей из m производителей и l потребителей. Время в модели дискретно и принимает значения $t = 0,1,2,\ldots$ Участники оперируют с n продуктами. Дадим описание сначала потребителя, а затем производителя. Состояние потребителя j в некоторый момент t представляет собой пару (c,r). Здесь $c \geqslant 0$ есть n-мерный вектор благ, находящийся в распоряжении этого потребителя, r - число, характеризующее накопленную им к моменту t полезность. Потребитель j в момент t обладает функцией полезности V^j_t. Предполагаем, что числовые характеристики полезности рассматриваются лишь в некоторые моменты времени, в то время как векторы благ предназначены для потребления в течение целого периода (от одного момента до следующего). При этом эффект от потребления этих векторов проявляется в начале периода. Из сказанного следует, что величину $\tilde{V}^j_t(c,r) = r + V^j_t(c)$ можно рассматривать как суммарную полезность в момент t. Предполагается также, что накопленная полезность r^j_+ в момент $t+1$ возникает в результате пересчета суммарной полезности в момент t:

$$r^j_+ = \theta^j_t \tilde{V}^j_t(c,r). \tag{1}$$

Здесь θ^j_t - заданный коэффициент пересчета полезности.

Всюду ниже считается, что V^j_t - суперлинейные (вогнутые, однородные первой степени) функции, определенные на конусе R^n_+ векторов пространства R^n с неотрицательными компонентами.

Предполагается, что каждому потребителю соответствует некоторый вид рабочей силы (потребитель j обладает рабочей силой j-го вида), причем ее объем $\tilde{w}^j$ пропорционален в момент t накопленной полезности r^j с некоторым коэффициентом ξ_t^j:

$$\tilde{w}^j = \xi_t^j r^j.$$

Формула (1) показывает, что объем рабочей силы в момент t, предназначенной для использования в период $[t,t+1]$, пропорционален суммарной полезности в момент $t-1$ (эта полезность позволяет в период $[t-1,t]$ накапливать и готовить рабочую силу к моменту t).

Сделанные предположения достаточно жестки. Они выглядят немного более естественными, если под потребителем понимать некоторую группу индивидуумов (совокупного потребителя); представители данной группы имеют одинаковые предпочтения и обладают рабочей силой одного вида; при этом считается, что все численные характеристики, относящиеся к потребителю, пропорциональны численности соответствующей группы.

Состояние производителя i (в некоторый момент t) описывается парой векторов $(x,w) \in R_+^n \times R_+^l$; здесь x – вектор материальных ресурсов, w – вектор трудовых ресурсов. Деятельность этого производителя в период $[t,t+1]$ описывается многозначным отображением a_t^i, действующим из $R_+^n \times R_+^l$ в совокупность непустых подмножеств конуса R_+^n. Множество $a_t^i(x,w) \subset R_+^n$ состоит из всех векторов, которые i-й производитель может произвести в момент $t+1$ при затратах (x,w) в момент t. Предполагается, что отображение a_t^i суперлинейно и замкнуто (т.е. имеет графиком выпуклый замкнутый конус), а также нормально (соотношения $y \in a_t^i(x,w)$, $0 \leqslant y' \leqslant y$, влекут $y' \in a_t^i(x,w)$). Кроме того, $a_t^i(0,w) = a_t^i(x,0) = \{0\}$ $\forall x \in R_+^n$, $\forall w \in R_+^l$.

Состояние всей системы в целом складывается из состояний участников. Оно представляет собой вектор $X \in (R_+^n \times R_+^1)^l \times (R_+^n \times R_+^l)^m$:

$$X = (c^1, r^1, \ldots, c^l, r^l, x^1, w^1, \ldots, x^m, \omega^m). \qquad (2)$$

Опишем динамику системы. Пусть в момен t задано формулой (2) состояние X. В момент $t+1$ производиель i получает некоторый вектор $y^i \in a_t^i(x^i, w^i)$ $(i=1,\ldots,m)$. Все произведенные продукты каким-то образом распределяются между участниками. Иными словами, рассматриваются произвольные наборы векторов $x_+^i \in R_+^n$ $(i=1,\ldots,m)$ и $c_+^j \in R_+^n$ $(j = 1,\ldots,l)$, удовлетворяющие лишь условию

$$\sum_{i=1}^{m} x_+^i + \sum_{j=1}^{l} c_+^j = y^*,$$

где $y^* = \sum_{i=1}^{m} y^i$ - вектор всех произведенных продуктов. Зная вектор c^j, потребитель j пересчитывает свою накопленную полезность:

$$r_+^j = \theta_t^j(r^j + V_t(c^j)). \qquad (3)$$

Тем самым определяется его состояние (c_+^j, r_+^j) в момент $t+1$ $(j=1,\ldots,l)$. Перейдем к производителям. Прежде всего отметим, что по вектору $r^* = (r_+^1, \ldots, r_+^m)$ накопленных полезностей определяется вектор

$$w^* = (\xi_{t+1}^1 r_+^1, \ldots, \xi_{t+1}^l r_+^l)$$

рабочей силы. Этот вектор каким-то образом распределяется между производителями:

$$w^* = \sum w_+^i, \quad w_+^i \geqslant 0.$$

В результате определяются состояния (x_+^i, w_+^i) производителей и тем самым состояние X_+ всей системы. Обозначим через $a_t(X)$ множество всех векторов X_+, в которые система может перейти в момент $t+1$, если в момент t она находилась в состоянии X. Итак,

$$a_t(X) = \{X_+ = (c_+^1, r_+^1, \ldots, c_+^l, r_+^l, x_+^1, w_+^1, \ldots, x_+^m, w_+^m) \geqslant 0,$$

$$\sum x_+^i + \sum c_+^j = y^*,$$

$$y^* = \sum y^i, \; y^i \in a_t^i(x^i, w^i) \quad (i=1,\ldots,m);$$

где

$$\sum w_+^i = w^*, \quad w^* = (\xi_{t+1}^1 r_+^1, \ldots, \xi_{t+1}^l r_+^l),$$

$$r_+^j = \theta_t^j(r + V_t^j(c^j)) \quad (j=1,\ldots,l).$$

Рассматриваемую модель обозначим через $\mathfrak{M}$. T-шаговой траекторией этой модели назовем такую последовательность $X_0,\ldots,X_t$, что $X_{t+1} \in a_t(X_t)$ $(t=0,1,\ldots,T-1)$.

3. Опишем цели участников. Остановимся сначала на потребителях. Предполагается, что потребитель j имеет в момент t некоторую сумму денег (бюджет) α_t^j. Формирование бюджета обсуждается ниже. Предположим далее, что на рынке материальных ресурсов в момент t действуют цены q_t. Тогда потребитель j решает в этот момент задачу

$$V_t^j(c) \longrightarrow \max, \tag{4}$$

$$c \geqslant 0, \ [q_t, c] = \alpha_t^j. \tag{4'}$$

Наряду с максимизацией "мгновенной" полезности $V_t^j(c)$ потребитель может поставить задачу о максимизации своей суммарной полезности в этот момент, т.е. о поиске состояния (c,r), которое доставляет наибольшее значение величине $\tilde{V}_t^j(c,r) = r + V_t^j(c)$ при некотором бюджетном ограничении. Чтобы выписать его, надо прежде всего указать цену накопленной полезности (зависящую от заданных цен q_t). С этой целью рассмотрим величину

$$\mu_t^j = \max\{V_t^j(c)\colon c \geqslant 0, \ [q_t, c] = 1\}. \tag{5}$$

Эта величина может рассматриваться как (максимальная) полезность, приобретенная на единицу денег, поэтому число $1/\mu_t^j$ выступает как стоимость полезности. Пусть α_t^j – фигурирующий в (4′) бюджет, отпущенный в момент t на приобретение вектора благ c, т.е. на мгновенную полезность, ρ^j – накопленная к моменту t полезность. Тогда бюджет, соответствующий суммарной полезности, совпадает с числом

$$\tilde{\alpha}_t^j = \alpha_t^j + \frac{\rho_t^j}{\mu_t^j}, \tag{6}$$

а приобретается она по ценам (q_t, $(\mu_t^j)^{-1}$). Итак, наряду с задачей (4)-(4′) имеет смысл рассмотреть задачу о максимизации суммарной полезности

$$r + V_t^j(c) \longrightarrow \max, \tag{7}$$

$$[q_t, c] + \frac{r}{\mu_t^j} = \tilde{\alpha}_t^j, \; c \geqslant 0, \; r \geqslant 0, \tag{7'}$$

где $\tilde{\alpha}_t^j$ определено формулой (6). Легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть ρ_t^j – накопленная потребителем j к моменту t полезность. Тогда вектор c_t^j является решением задачи (4)-(4′) в том и только том случае, когда пара (c_t^j, ρ_t^j) – решение задачи (7)-(7′).*

Лемма позволяет считать, что потребитель j вместо задачи (4)-(4′) решает задачу (7)-(7′) при дополнительном предположении, что накопленная полезность ρ_t^j и коэффициент μ_t^j ему известны.

4. Цели производителя описываются несколько сложнее. Прежде всего он должен знать не только цены q_t, но и цены q_{t+1}, кроме того, ему потребуется знать цены h_t на рабочую силу. Пусть все указанные цены известны. Считаем, что производитель максимизирует темп роста своего совокупного богатства (это равносильно максимизации нормы прибыли):

$$\frac{[q_{t+1}, y]}{[q_t, x] + [h_t, w]} \longrightarrow \max, \tag{9}$$

$$y \in a_t^i(x, w), \quad x \geqslant 0, \; w \geqslant 0. \tag{9'}$$

Из линейной однородности отображений a_t^i следует, что решение задачи (9)-(9′) определено с точностью до множителя. Чтобы однозначно его зафиксировать, предположим, что производитель i имеет некоторый бюджет β_t^i (выбор его обсуждается ниже) и вместо (9)-(9′) рассмотрим задачу

$$\frac{[q_{t+1},t]}{[q_t,x]+[h_t,w]} \longrightarrow \max, \tag{10}$$

$$y \in a_t^{l}(x,w),\ x \geqslant 0,\ w \geqslant 0,\ [q_t,x] + [h_t,w] = \beta_t^{l}. \tag{10$'$}$$

Пусть набор $(\bar{x},\bar{w},\bar{y})$ - решение этой задачи. Тогда этот набор является решением задачи (9)-(9$'$). Кроме того, набор максимизирует прибыль (а не только норму прибыли) среди всех наборов, удовлетворяющих соотношениям (10$'$). Задачу (10)-(10$'$) удобно записать в виде, аналогичном (4)-(4$'$):

$$U_t^{l}(q_{t+1};x,w) \longrightarrow \max, \tag{11}$$

$$[q_t,x] + [h_t,w] = \beta_t^{l},\ x \geqslant 0,\ w \geqslant 0, \tag{11$'$}$$

где

$$U_t^{l}(q_{t+1};x,w) = \max_{y\in a_t^{l}(x.w)} [q_{t+1},y]. \tag{12}$$

Связь между решениями задач (10)-(10$'$) и (11)-(11$'$) очевидна.

5. Перейдем к определению состояния равновесия в модели $\mathfrak{N}$. Предположим, что в результате предшествующей деятельности система имеет в момент t вектор материальных ресурсов y_t и трудовых ресурсов w_t. Обозначим $J = \{1,\ldots,l\}$, $I = \{1,\ldots,m\}$ и выделим некоторое подмножество J_t множества J. (По причинам, ясным из дальнейшего, некоторых потребителей следует исключить из рассмотрения.) Пусть как-то заданы бюджеты $\alpha_t^{j} > 0$ $(j \in J_t)$ и $\beta_t^{l} \geqslant 0$ $(l \in I)$ и цены q_{t+1}. Рассмотрим модель $\mathcal{E}_t$ с фиксированными бюджетами, участниками которой являются потребители $j \in J_t$ и потребители $l \in I$; они распределяют между собой вектор (y_t,w_t). Функции полезности потребителей совпадают с V_t^{j}, функции полезности производителей $U_t^{l}(q_{t+1},\cdot)$ определены по формуле (12) с помощью данного вектора q_{t+1}. Модель $\mathcal{E}_t$ записывается ниже в виде

$$\varepsilon_t=\{(y_t,w_t);(V_t^{j})_{j\in J_t},(U_t^{l}(q_{t+1},\cdot))_{l\in I}(\alpha_t^{j})_{j\in J_t},(\beta_t^{l})_{l\in I}\}.$$

Напомним, что набор

$$((q_t,h_t);\ c'_t,\dots,c^l_t;\ x^1_t,w^1_t,\dots,x^m_t,w^m_t)$$

называется равновесием модели $\mathcal{E}_t$, если вектор c^j_t есть решение задачи (4)-(4′), вектор (x^i_t,w^i_t) - решение задачи (11)-(11′) и, кроме того, выполнены балансовые равенства

$$\sum_j c^j_t + \sum_i x^i_t = y_t, \quad \sum_i w^i_t = w_t.$$

Векторы q_t,h_t, участвующие в определении равновесия, называются равновесными ценами.

Считая, что потребителю j известны числа μ^j_t, определенные формулой (5), можно, если понадобится, считать, что вместо задачи (4)-(4′) он решает задачу (7)-(7′) при известной накопленной полезности ρ^j_t и бюджете $\tilde{\alpha}^j_t = \alpha^j_t + \dfrac{\rho^j_t}{\mu^j_t}$. В силу леммы 1 решения этих задач совпадают.

Пусть (q_t,h_t) - равновесные цены модели $\mathcal{E}_t$. С их помощью определим темп роста γ^i_t производителя i:

$$\gamma^i_t = \max_{(x,w):\ y\in a^j_t(x,w)} \frac{[q_{t+1},y]}{[q_t,x] + [h_t,w]}. \qquad (13)$$

Заметим, что как цены, так и темпы роста существенно зависят от выбора бюджетов. Можно показать, что увеличение бюджета производителя i приводит к такому изменению равновесных цен, которое вызывает уменьшение темпа роста этого производителя. Легко понять, исходя из этого утверждения, что производителям выгодно так перераспределить между собой бюджеты, чтобы темпы роста их совпали между собой. При этом может случиться, что некоторые производители полностью передадут свои бюджеты другим и тем самым их темпы роста учитываться не будут. Производители могут также передавать часть своих бюджетов потребителям или, наоборот, получить некоторые средства от них.

Допустим, что такое перераспределение бюджетов совершено и в системе установился общий темп роста γ_t. Обсудим вопрос о бюджете потребителя $j \in J_t$. Поскольку далее речь идет по существу об изменении суммарной полезности, то будем считать, что потребитель решает задачу (7) - (7′). При этом предполагается, что накопленная полезность ρ^j_t и удельная полезность μ^j_t известны.

Допустим, что потребитель j приобрел единицу денег и цены q_t, q_{t+1}, h_t не изменились. Далее он может поступить двумя способами. Во-первых, пустить эти деньги в рост, тогда в году $t+1$ он получит γ_t единиц денег и на них сможет приобрести $\gamma_t\mu^j_{t+1}$ единиц полезности; во-вторых, получить в году t μ^j_t единиц полезности, которые в году $t+1$ перейдут в $Q^j_t\mu^j_t$ единиц. Эти единицы позволят получить дополнительно $\theta^j_t\mu^j_t\xi^j_{t+1}$ единиц рабочей силы, которая позволит выручить $\theta^j_t\mu^j_t\xi^j_{t+1}h^j_{t+1}$ денег. На эти деньги дополнительно приобретутся $\theta^j_t\mu^j_t\xi^j_{t+1}h^j_{t+1}\mu^j_{t+1}$ единиц полезности. Итого, суммарная дополнительная полезность, полученная по второму способу, совпадает с величиной

$$\theta^j_t\mu^j_t(1 + \mu^j_{t+1}h^j_{t+1}\xi^j_{t+1}).$$

На самом деле, изменяя бюджет, потребитель изменяет и равновесные цены, а вместе с ними величину μ^j_t и темпы роста производителей γ^j_t. Считая, что эти темпы все же совпадают между собой и равны некоторому γ_t, естественно говорить о равновесном выборе бюджетов, если

$$\gamma_t\mu^j_{t+1} = \theta^j_t\mu^j_t(1 + \mu^j_{t+1}\xi^j_{t+1}h^j_{t+1}) \qquad (j \in J).$$

Разумеется, перераспределение бюджетов происходит между всеми участниками (и потребителями, и производителями). При этом может случиться так, что некоторому потребителю j в момент t выгодно отдать весь свой бюджет и довольствоваться в данный момент лишь накопленной полезностью.

Заметим, что за счет изменения масштаба цен всегда можно считать, что $\gamma_t = 1$.

Дадим определение равновесия. Ограничимся лишь случаем конечного горизонта планирования. Пусть дана траектория $(X_t)^T_{t=0}$ модели $\mathfrak{M}$ и конечная последовательность векторов цен

$((q_t,h_t))_{t=0}^T$. Здесь

$$X_t = (c_t^1,r_t^1,\ldots,c_t^l,r_t^l,x_t^1,w_t^1,\ldots,x_t^m,w_t^m).$$

Положим

$$J_t^1 = \{j \in J : c_t^j = 0\}, \quad J_t^2 = J \setminus J_t^1.$$

Потребители с номерами из J_t^1 фактически не участвуют в распределении ресурсов в момент t и поэтому их можно в этот момент не рассматривать.

По состоянию X_{t-1} $(t\geqslant 1)$ данной траектории определим векторы r_t^*,y_t^*,w_t^*. Здесь $y_t^* = \sum_{i=1}^m y_t^i$, где $y_t^i \in a_{t-1}^i(x_{t-1}^i,w_{t-1}^i)$, причем

$$[q_t,y_t^i] = \max\{[q_t,y] : y \in a_{t-1}^i(x_{t-1}^i,w_{t-1}^i)\};$$

$$r_t^* = (r_t^1,\ldots,r_t^l),$$

где

$$r_t^j = \theta_{t-1}^j(r_{t-1}^j + V^j(c_{t-1}^j)), \quad j \in J,$$

$$w_t^* = (\xi_t^1 r_t^1,\ldots,\xi_t^l r_t^l).$$

Считаем, что в момент $t = 0$ независимо от состояния X_0 заданы векторы y_0^*, w_0^*, r_0^*, кроме того, в момент $T + 1$ задан вектор $q_{T+1} \in R_+^n \setminus \{0\}$.

Будем говорить, что конечные последовательности $(X_t)_{t=0}^T$ и $(q_t,h_t)_{t=0}^T$ образуют состояние равновесия модели $\mathfrak{M}$ при заданных начальных условиях r_0^*, y_0^*, w_0^* и конечном векторе цен q_{T+1}, если

1) $V_t^j(c_t^j) > 0$ при $j \in J_t^2$, $t = 0,\ldots,T$;

2) найдутся такие бюджеты $\alpha_t^j > 0$ $(j \in J_t^2)$, $\beta_t^i \geqslant 0$ $(i \in I)$, что модель с фиксированными бюджетами

$$\mathcal{E}_t=\{(y_t^*,w_t^*),(V_t^j)_{j\in J_t^2}, (U_t^i(q_{t+1},\cdot))_{i\in I},(\alpha_t^j)_{j\in J_t^2},(\beta_t^i)_{i\in J}\}$$

имеет равновесием набор

$$((q_t,h_t);\ c_t^1,\dots,c_t^l,\ x_t^1,w_t^1,\dots,x_t^m,w_t^m);$$

3) при всех $i \in I$ выполняются неравенства $\gamma_t^i \leqslant 1$, при этом $\gamma_t^i = 1$, если $\beta_t^i > 0$;

4) при всех $j \in J_t^2$ выполняются равенства

$$\mu_{t+1}^j = \theta_t^j \mu_t^j (1 + \xi_{t+1}^j h_{t+1}^j \mu_{t+1}^j).$$

Теорема 1. *Пусть даны произвольное натуральное число T, строго положительный вектор $(r_0^*,y_0^*,w_0^*) \in R_+^l \times R_+^n \times R_+^l$ и ненулевой вектор $q_{t+1} \in R_+^n$. Тогда найдутся последовательности $(X_t)_{t=0}^T$ и $(q_t,h_t)_{t=0}^T$, образующие равновесие модели $\mathfrak{M}$ при начальном условии (r_0^*,y_0^*,w_0^*) и конечном векторе цен q_{T+1}.*

6. Известное автору доказательство теоремы 1 достаточно сложно и здесь не приводится. Это доказательство опирается на теорию моделей воспроизводства [3,4], представляющих собой специальные модели экономической динамики неймановского типа. Эффективные траектории в моделях воспроизводства строятся с помощью моделей равновесия с фиксированными бюджетами. Для доказательства теоремы 1 следует построить некоторую вспомогательную модель $\mathscr{M}$, близкую к модели воспроизводства, описать эффективные траектории и их характеристики в модели $\mathscr{M}$, проверить, что по траектории с характеристикой модели $\mathscr{M}$ строится равновесие в модели $\mathfrak{M}$, и затем воспользоваться теоремой о существовании характеристики в моделях неймановского типа [6].

Подчеркнем, что доказательство существования равновесия не связано с теоремами о неподвижной точке, а использует по существу технику выпуклого анализа. Это вызвано тем обстоятельством (см.[1,2]), что исследование модели равновесия с фиксированными бюджетами, имеющей суперлинейные функции полезности, сводится к исследованию некоторой задачи выпуклого программирования.

Переход от модели $\mathfrak{M}$ к модели $\mathscr{M}$ заключается по сути дела в преобразовании потребителей в производители. К имеющимся n продуктам и l видам рабочей силы добавляется еще l видов полезности; при этом считается, что потребитель производит полезность, потребляя материальные ресурсы. Такой подход последовательно проводился еще в [6] для исследования несколько иных моделей.

Литература

1. **Полтерович В.М.** Об устойчивости некоторых процессов распределения фондов и регулирования цен // Математическая экономика и функциональный анализ. - М.: Наука, 1974. - С.203-220.

2. **Тимохов А.В.** Математические модели экономического воспроизводства. - М.: Изд-во МГУ, 1982.

3. **Рубинов А.М.** Равновесные механизмы эффективного и асимптотически эффективного развития в динамических моделях производства // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. - 1988. - №1. - С.36-45.

4. **Рубинов А.М.** Модели равновесного типа как инструмент построения эффективных траекторий в моделях воспроизводства // Математические модели экономической динамики. - Вильнюс, 1988. - С.131-150.

Борисов К.Ю. Модель равновесия с производителем, максимизирующим норму прибыли // Математические модели экономической динамики. - Вильнюс, 1989. - С.6-20.

6. **Макаров В.Л., Рубинов А.М.** Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.; Наука, 1973.

Поступила в редакцию
10 сентября 1990 г.