УДК 330.115

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НАУЧНЫХ КАДРОВ (на примере Сибирского отделения АН СССР)

А.И.Терехов

Формирование банков данных, охватывающих крупные кадровые контингенты (например, научных работников АН СССР, ее региональных и специализированных отделений; информационный банк ВАК СССР и т.д.), создает предпосылки для более широкого исследования состояния, подготовки и движения научных кадров, в том числе с применением статистических методов и математического моделирования. Математическое моделирование как инструмент исследования, прогноза и регулирования кадровых систем превратилось за последнее время в достаточно хорошо развитую прикладную ветвь исследований [1]. В настоящей статье приведена математическая модель движения научных кадров, сформулирована и исследована задача оптимизации возрастной структуры кадрового состава. Численный эксперимент выполнен на основе данных о движении научных кадров в СО АН СССР.

1. Математическая модель движения научных кадров (имитационный вариант)

Приведем сначала общее построение математической модели движения кадров в иерархически открытой кадровой системе, а затем рассмотрим ее возможности для описания, прогноза и регулирования движения научных кадров на примере СО АН СССР.

Основными характеристиками, которые будут интересовать нас в дальнейшем с точки зрения их динамической взаимосвязи, являются численность и возрастная структура персонала, интенсивность выбытия и возрастное распределение вновь принимаемых, общая доля лиц и доля лиц каждого возраста на различных уровнях существующей иерархической структуры. Выделение возрастного фактора здесь объясняется его предикаторными свойствами по отношению к квалификационно-должностным перемещениям сотрудников, а также их выбытию из организации, большей доступностью возрастных данных на практике. Кроме того, возрастной срез кадрового контингента позволяет в известной степени судить о его качественном составе. (Так, возрастная зависимость продуктивности труда ученых подтверждается в ряде наукометрических исследований; см., например, [2].)

Рассмотрим организацию, функционирующую на достаточно большом промежутке времени. Выделим совокупность рабочих мест, сгруппированных в соответствии с существующей в организации должностной иерархией, относительно которой исследуемый кадровый контингент является однородным. (Это исключает смешение различных иерархий, например научной и административной.) Будем считать, что в своем большинстве сотрудники остаются в организации в течение длительного времени, при этом организация осуществляет их продвижение, не испытывая недостатка в кандидатах на каждую освобождающуюся вакансию. Обозначим непрерывные переменные времени и возраста через t и a соответственно. Для описания основных кадровых процессов примем следующие предположения.

1. Пусть $N(t)$ - общая численность моделируемого кадрового контингента в момент времени t. Будем считать, что $N(t)$ изменяется по экспоненциальному закону: $N(t) = N_0 e^{\rho t}$, где $N_0 = N(0) > 0$, ρ - интенсивность прироста общей численности, которая может принимать положительное, нулевое или отрицательное значения. Сделанное предположение обладает тем преимуществом, что, с одной стороны, позволяет внести необходимые упрощения в последующие рассуждения, с другой - не противоречит распространенному на практике способу предсказания долговременного изменения численности кадров в процентном отношении к исходной. Кроме того, в силу простоты не представит большого труда исследовать чувствительность других факторов модели к величине ρ.

2. Известно, что выбытие индивидуума из организации зависит от целого ряда факторов, как внутренних, так и внешних, однако в роли наиболее сильного предикатора выступает, как правило, возраст. Введем возрастную интенсивность выбытия сотрудников $w(a,t)$, определяемую таким образом, что $w(a,t)\Delta t$ - доля сотрудников, имеющих в момент времени t возраст a, которые покинут организацию за малый интервал времени $(t, t+\Delta t)$.

3. Пусть $v(t)$ - интенсивность потока лиц, входящих в моделируемый кадровый контингент в момент времени t; $r(a,t)$ - плотность возрастного распределения вновь принимаемых. В дальнейшем будем предполагать, что лица возраста a, вновь принимаемые в организацию и уже проработавшие в ней в течение какого-либо времени, имеют одинаковую схему распределения по уровням должностной иерархии. Это предположение вполне допустимо, если прием имеет место в достаточно узком возрастном диапазоне. В противном случае пришлось бы проводить отдельное рассмотрение для различных возрастных групп приема.

Обозначим через $n(a,t)$ плотность численности сотрудников, имеющих возраст a в момент времени t. По определению, $n(a,t)\cdot\Delta a$ является численностью сотрудников в момент времени t, возраст которых находится в малом возрастном интервале $(a, a + \Delta a)$. Опуская подробности вывода (который в слегка моди-

фицированном варианте можно найти в [1, гл.Ш, §2]), запишем дифференциальное уравнение возрастной динамики относительно функции $n(a,t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial t}\right]n(a,t) = -w(a,t)n(a,t) + r(a,t)v(t), \qquad (1)$$

где

$$v(t) = \rho N(t) + \int_{a_0}^{\omega} w(a,t)n(a,t)da, \quad a_0 \leqslant a < \omega, \quad t \geqslant 0.$$

Добавив начальное условие

$$n(a,0) = n^0(a), \quad a_0 \leqslant a < \omega, \qquad (2)$$

где $n^0(a)$ - известная неотрицательная функция $(\int_{a_0}^{\omega} n^0(a)da = N_0)$, и граничное условие

$$n(a_0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \qquad (3)$$

получаем математическую модель для описания движения численности и возрастной структуры кадрового контингента. Входными данными модели являются величина ρ, функции $v(a,t)$, $r(a,t)$, $n^0(a)$, искомой - функция $n(a,t)$. Здесь через a_0 и ω обозначены соответственно нижняя и верхняя возрастные границы для членов моделируемого кадрового контингента. Характер верхней границы определяется соотношением

$$\lim_{a \to \omega^-} \int_{a_0}^{a} w(\tau,\tau + t)d\tau = +\infty \quad \forall t,$$

согласно которому накопленная интенсивность выбытия каждого входящего индивидуума приближается к бесконечности по мере достижения им возраста ω.

4. Введем теперь модель для описания должностного продвижения индивидуумов. Без потери общности будем считать, что имеется два должностных состояния: первое - нижнее и второе -

верхнее. Обозначим: $\pi(a,t)$ - доля лиц в возрасте a, которые в момент времени t достигли 2-го состояния; $p(t)$ - общая доля лиц, находящихся в момент времени t во 2-м состоянии. Очевидно, имеет место следующее соотношение:

$$p(t) = \int_{a_0}^{\omega} n(a,t)\pi(a,t)da \Big/ \int_{a_0}^{\omega} n(a,t)da. \qquad (4)$$

Сделаем предположение относительно функции $\pi(a,t)$. Рассмотрим когорту лиц, вошедших в организацию в момент времени t, не превосходящий t. Обозначим через $q(t')$ долю тех из них, кто до достижения предельного возраста будет продвинут по 2-е состояние, $\bar{\pi}(a)$ - плотность вероятности того, что продвижение произойдет в возрасте a (в силу предположения из 3-го пункта, лица, вошедшие в организацию в возрасте, не превосходящем a, имеют одинаковую схему должностного распределения по достижению этого возраста). В действительности кадровый контингент в произвольный момент времени t представляет собой смесь когорт, поэтому величина $q(t')$ может иметь случайные флуктуации. Обозначим ее осредненное значение через q и положим

$$\pi(a,t) \equiv \pi(a) = q \int_{a_0}^{a} \bar{\pi}(\tau)d\tau.$$

Средний возраст перехода индивидуума во 2-е состояние

$$A_{ср} = \int_{a_0}^{\omega} a\bar{\pi}(a)da.$$

С помощью метода интегрирования вдоль характеристик система уравнений (1)-(3) сводится к интегральному уравнению Вольтерра типа свертки относительно функции $v(t)$, для которого существование единственного решения имеет место при достаточно общих условиях, заведомо выполнимых в нашем случае [1]. Неотрицательность этого решения гарантируется физическим смыслом входных данных модели. Таким образом, сформулированная динамическая модель может применяться для прогноза и вариантных рас-

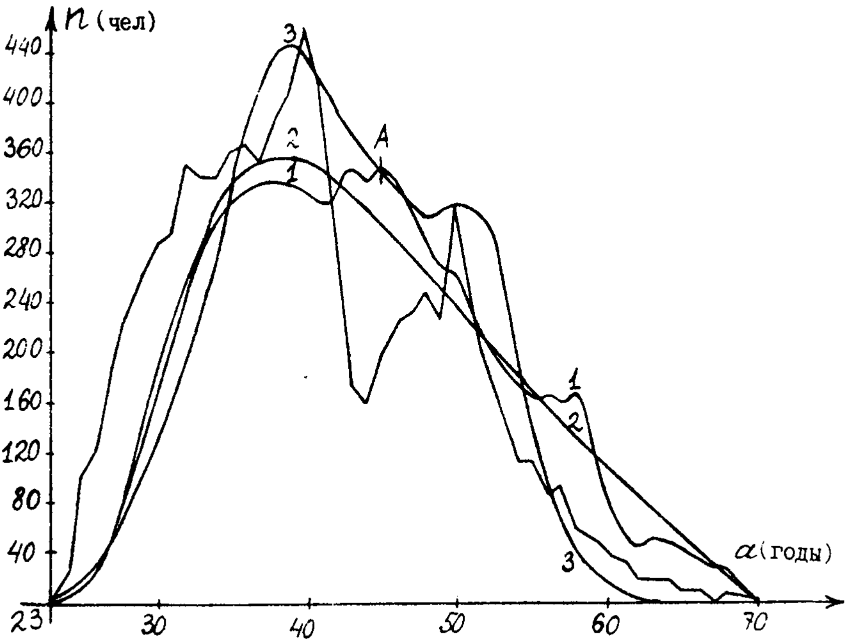
четов изменения численности, возрастного распределения и должностной структуры кадров на перспективу.

В качестве моделируемого рассмотрим контингент научных сотрудников СО АН СССР, охватывающий пять должностных категорий: младший научный сотрудник (м.н.с.); научный сотрудник (н.с.); старший научный сотрудник (с.н.с.); ведущий научный сотрудник (вед.н.с.); главный научный сотрудник (гл.н.с.). На рис.1 ломаной линией показано возрастное распределение данного контингента (общей численностью 8534 чел.) на начало 1987 года. Кривые должностные карьеры $\pi_i(a)$ $(i = \overline{1,4})$ построены, исходя из одномоментных статистических данных с помощью гипотезы осреднения по времени. Здесь i – индекс должности, из которой совершается продвижение: $i = 1$ соответствует должности м.н.с., далее в порядке возрастания иерархии. В качестве подгоняемой использована кривая $\pi(a) = qF(a)$, где

$$f(a) = 1 - \exp\{-\lambda(a-\Delta)\} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[\lambda(a-\Delta)]^j}{j!}$$

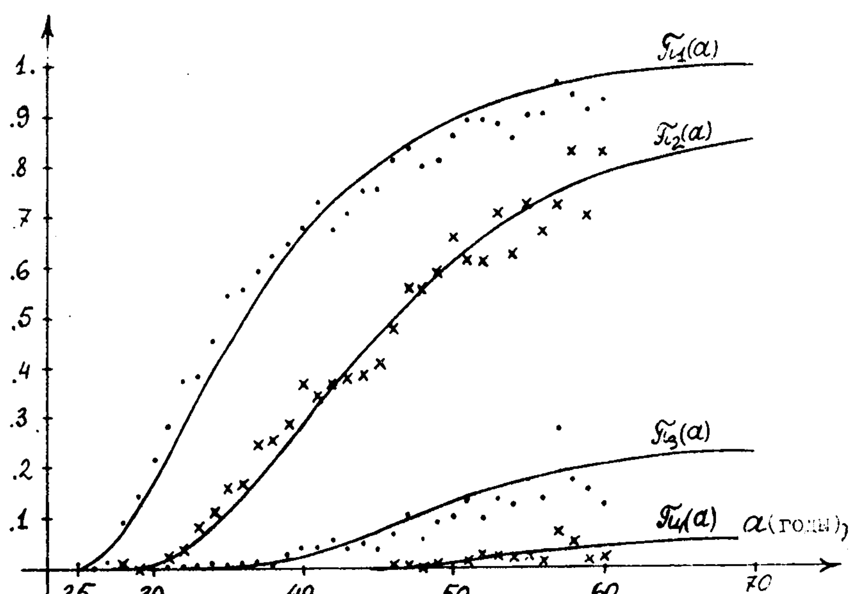
– функция распределения Эрланга с параметрами: сдвига – Δ, формы – n, масштаба – λ. На рис.2 приведено сопоставление построенных кривых $\pi_i(a)$ с фактическими данными по Сибирскому отделению (обозначены точками и крестиками).

Рассмотрим один из вариантов численного эксперимента на основе модели (1)-(4). На рис.3 показаны возрастная интенсивность выбытия и возрастное распределение вновь поступающих, использованные для гипотетического расчета изменения численности, возрастной и должностной структур рассматриваемого контингента на 18-летний период (до 2005 года). Кривая 1 на рис.1 представляет возрастное распределение сотрудников в момент времени t=18 при интенсивности прироста общей численности $\rho = 0,01$. На рис.4 приведено изменение удельного веса лиц в возрастных интервалах от 38 до 42 лет и от 50 до 54 лет (благоприятных для наиболее высокой продуктивности ученого согласно данным Д.Пельца и Ф.Эндрюса [2]). Как видим, при заложенном темпе роста общей численности и возрастном профиле вновь при-



n (чел)
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
23
30
40
50
60
70
A
1
2
3
α (годы)

Рис.I



1.
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
25
30
40
50
60
70
π₁(α)
π₂(α)
π₃(α)
π₄(α)
α (годы)

Рис.2

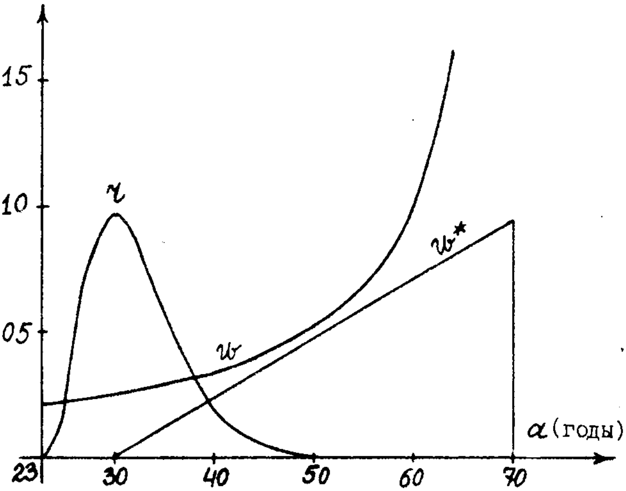


Рис.3

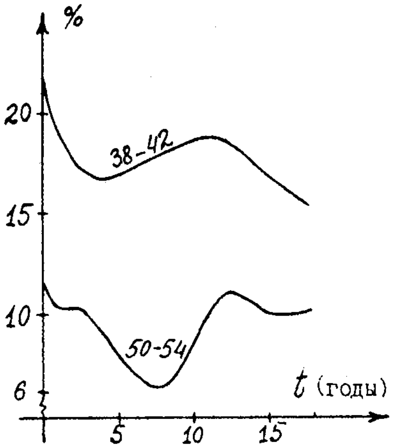


Рис.4

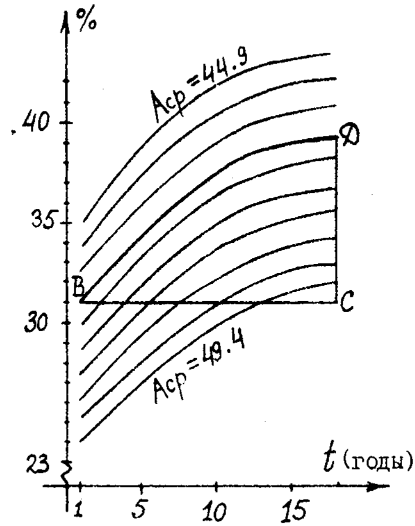


Рис.5

нимаемых происходит ухудшение возрастного распределения сотрудников по "критерию продуктивности".

Перейдем к рассмотрению должностной структуры кадрового контингента. На рис.5 жирной кривой показано изменение доли лиц, находящихся в должности с.н.с. и выше за 18-летний период (расчет произведен по формуле (4) при подстановке в нее подогнанной кривой $\pi_2(a)$). Другие кривые на этом рисунке соответствуют различным значениям среднего возраста продвижения сотрудника на должность с.н.с., которое получалось за счет сдвига кривой $\pi_2(a)$ при сохранении ее формы. В 1987 году в должности с.н.с. и выше находилось около 31% научных сотрудников СО АН СССР. Желанию сохранять такое соотношение и в дальнейшем соответствовало бы перемещение по отрезку *BC* на рис.5. При этом средний возраст продвижения увеличился бы с 46,4 лет в 1987 году до 49,7 лет в 2005 году. Наоборот, при желании сохранять средний возраст продвижения перемещение произошло бы из точки *B* в точку *D*. *BCD* представляет область, в которой ЛПР пришлось бы делать свой выбор, стремясь, с одной стороны, уложиться в существующие финансовые ограничения, с другой - иметь возможность вовремя продвигать квалифицированных сотрудников. Аналогичные "картинки" (удобные для визуального восприятия) легко строятся и для других должностей. Таким образом, приведенная технология позволяет сформировать область допустимого выбора параметров продвижения сотрудников.

Многим организациям присуще стремление к приемлемому стабильному возрастному распределению персонала, которое характеризовалось бы: устойчивыми перспективами служебного продвижения для вновь принимаемых, возможностью для организации продвигать сотрудников лишь по мере приобретения ими достаточной квалификации и опыта работы, учетом возрастных особенностей, продуктивности сотрудников и т.д. Расхождение между реальной и "идеальной" возрастными структурами в этом случае создает исходный момент для анализа ситуации и принятия управляющих решений. Учитывая сказанное, целесообразно охарактеризовать множество достижимых стабильных возрастных структур, вытекающих из нашей модели. Пусть функции r и w не зависят от време-

ни. Обозначим через $\bar{n}(a,t)$ плотность возрастного распределения сотрудников: $\bar{n}(a,t) = n(a,t)/N(t)$. Систему уравнений относительно функции $\bar{n}$ легко получить из системы (1)-(3). Осуществляя затем переход к интегральному уравнению восстановления для плотности входного потока и применяя основную теорему теории восстановления, можно путем несложных выкладок [3] показать, что при $t \to \infty$ плотность возрастного распределения будет иметь следующее предельное выражение:

$$\bar{n}(a) = \mu^{-1} \int_{a_0}^{a} \frac{r(y)}{\bar{l}(y)} \bar{l}(a) dy, \quad a_0 \leqslant a < \omega,$$

где μ - средняя продолжительность пребывания индивидуума в организации;

$$\bar{l}(a) = \exp \{-\int_{a_0}^{a} (w(\tau) + \rho) d\tau\}.$$

При этом множества достижимых в пределе и стабильных возрастных структур совпадают. Если считать, что все управление кадровой системой реализуется через функцию $r(a)$, то для поддержания определенной возрастной структуры $\bar{n}^*(a)$ необходимо выполнение условия:

$$(\ln \bar{n}^*(a))' \geqslant -(w(a) + \rho), \quad a_0 \leqslant a < \omega. \qquad (5)$$

Очевидно, что переход к такой стабильной структуре может быть ускорен за счет временного управления функцией r.

Вернемся к нашему примеру. Из рис.1 видно, что предельная возрастная структура (кривая 2) достаточно отличается как от начальной, так и от структуры, гипотетически принятой нами в качестве "идеальной" (кривая 3). Вопрос о возможности выхода на "идеальную" возрастную структуру через выбор функции r решается отрицательно, поскольку в окрестности точки A имеет место нарушение критерия (5). Отсюда следует, что для достижения цели объектом регулирования должна стать возрастная интенсивность выбытия. Дальнейшее исследование проведем в рамках теории оптимального управления.

2. Динамическая задача оптимизации возрастной структуры научных кадров

При моделировании кадровых систем в науке важное значение приобретает оптимизация условий, способствующих высокой продуктивности научных коллективов, к числу которых относится их возрастная структура. Рассмотрим один из возможных подходов к оптимизации возрастной структуры научных кадров на основе сформулированной динамической модели путем введения фактора продуктивности. Будем считать, что функция $w(a,t)$ в уравнении (1) включает две составляющие: $w_1(a,t)$ - относящуюся к выбытию сотрудников по причине смерти, выхода на пенсию, текучести и т.д.; $w_2(a,t)$ - относящуюся к регулируемому оттоку сотрудников. Обозначим через $\xi(a)$ показатель продуктивности, характеризующий среднюю величину "продукта", производимого научным сотрудником возраста a в единицу времени (методы измерения продуктивности труда ученых, а также установление ее возрастной зависимости являются предметом исследования в социологии и наукометрии [2]). Введем следующий критерий оптимизации:

$$S = \int_0^T \int_{a_0}^{\omega} \xi(a) n(a,t) da dt \longrightarrow \max, \qquad (6)$$

т.е. на фиксированном промежутке времени будем стремиться максимизировать интегральную продуктивность моделируемого кадрового контингента, управляя функцией $w_2(a,t)$. Уравнения (1)-(3) вместе с условием (6) образуют задачу оптимального управления для системы с распределенными параметрами [4]. Сделаем обычные для теории оптимального управления предположения: будем считать управление $w_2(a,t)$ кусочно-непрерывной и ограниченной функцией, определенной в области D $(0 \leqslant t \leqslant T;\ a_0 \leqslant a \leqslant \omega)$ со значениями в некоторой выпуклой замкнутой области W пространства R. Такое управление назовем допустимым. В дальнейшем предполагаем, что множеству допустимых управлений ставится в соответствие класс функций, в котором задача (1)-(3) однозначно разрешима (см. [1]).

Используя метод приращения функционала [4], получим необходимые условия оптимальности управления в форме принципа максимума. Приведем здесь лишь окончательный результат (подробности вывода можно найти в [3]). Положим

$$H = \Phi_0 \xi n - \Phi_1 \left\{ \frac{\partial n}{\partial a} + (w_1 + w_2)n - \right.$$

$$\left. - r \left[\int_{a_0}^{\omega} (w_1 + w_2) n da + M(t) \right] \right\} + \Phi_2 (w_1 + w_2) n \equiv$$

$$\equiv H(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2;\ n,\ \frac{\partial n}{\partial a};\ w_2),$$

где $\Phi_i(a,t)$ $(i=0,1,2)$ – множители Лагранжа, или сопряженные переменные (для получения результата функцию приростного потока $M(t)$[1] достаточно считать произвольно заданной неотрицательной функцией). Сформулируем принцип максимума. Будем говорить, что допустимое управление $w_2(a,t)$ удовлетворяет условию максимума, если почти для всех точек $(a,t) \in D$ выполнено соотношение

$$H(\Phi_0(a,t),\ \Phi_1(a,t), \Phi_2(a,t);\ n(a,t),\ \frac{\partial n(a,t)}{\partial a};\ w_2(a,t)) =$$

$$= \max_{\tilde{w}_2 \in \tilde{W}} H(\Phi_0(a,t),\ \Phi_1(a,t),\ \Phi_2(a,t);\ n(a,t),\ \frac{\partial n(a,t)}{\partial a};\ w_2),$$

где $n(a,t)$ – решение задачи (1)–(3), соответствующее управлению $w_2(a,t)$, $\Phi_i(a,t)$ $(i=0,1,2)$ удовлетворяют при том же управлении $w_2(a,t)$ системам уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial a \partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(\omega,t) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial a}(a,T) = 0;$$

---

[1] В уравнении (1) $M(t) = \rho N(t)$.

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial a} \pm \Phi_0\xi - \Phi_1(w_1 + w_2) + \Phi_2(w_1 + w_2) = 0,$$

$$\Phi_1(a,T) = \Phi_1(\omega,t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial a\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial a}(a,T) = 0,\ \Phi_2(\omega,t) = \int\limits_{a_0}^{\omega} r(a,t)\Phi_1(a,t)da$$

и условию $\Phi_0(\omega,T) = 1$. Тогда справедлива

Теорема *(принцип максимума). Для того чтобы допустимое управление $w_2(a,t)$ было оптимальным, необходимо, чтобы оно удовлетворяло условию максимума.*

Пусть максимальная интенсивность регулируемого оттока сотрудников возраста a равна $w^*(a)$. Введем единичную функцию

$$U_+(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Тогда легко установить, что максимум H достигается при

$$w_2(a,t) = U_+\left\{\int\limits_{a_0}^{\omega} r(a,t)\Phi_1(a,t)da - \Phi_1(a,t)\right\}w^*(a),$$

поскольку $n(a,t) \geqslant 0$, т.е. управление w_2 может только "переключаться" с одного граничного положения на другое в зависимости от знака разности $\int\limits_{a_0}^{\omega} r\Phi_1 da$ и Φ_1. Здесь функция $\Phi_1(a,t)$ определяется из уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial t}\right]\Phi_1(a,t) + \xi(a) + [w_1(a,t) + w_2(a,t)] \times$$

$$\times\left[\int_{a_0}^{\omega} r(a,t)\Phi_1(a,t)da - \Phi_1(a,t)\right] = 0$$

и граничных условий

$$\Phi_1(a,t) = 0, \quad \Phi_1(\omega,t) = 0.$$

Для решения прямой и сопряженной задач в данном случае разработан численный алгоритм.

В качестве примера приведем условный расчет "оптимальной программы" для кадрового контингента СО АН СССР при горизонте управления T = 30 (лет). Для расчета использована эмпирически установленная в [2] зависимость продуктивности ученого от возраста (см. нормированную соответствующим образом ломаную на рис.7). На рис.3 показана область допустимых значений функции управления $w_2(a,t)$, на рис.6 - возрастной "профиль" оптимального управления, на рис.8 - распределение моделируемого контингента в момент времени t = T. Характерно, что в соответствии с "оптимальной программой" регулируемому оттоку подлежат в основном лица в возрастном интервале от 48 до 70 лет. Это имело место и в других вариантах расчета с той же кривой возрастной продуктивности.

Следует отметить, что традиционные для теории оптимального управления предположения (в частности, о кусочной непрерывности функции управления) накладывают ограничения на практическую применимость получаемых решений. Тем не менее расчет максимального значения функционала S будет полезен, например, для оценки вариантов динамики кадровой системы при использовании модели в имитационном режиме. Кроме того, существуют методы, позволяющие ценой определенных жертв достигать требуемой гладкости оптимального управления. Более широкий эксперимент показал, что предложенная математическая модель и сформулированная на ее основе задача оптимизации могут оказаться полезным средством выработки стратегии обновления научных коллективов в достаточно крупных организациях.

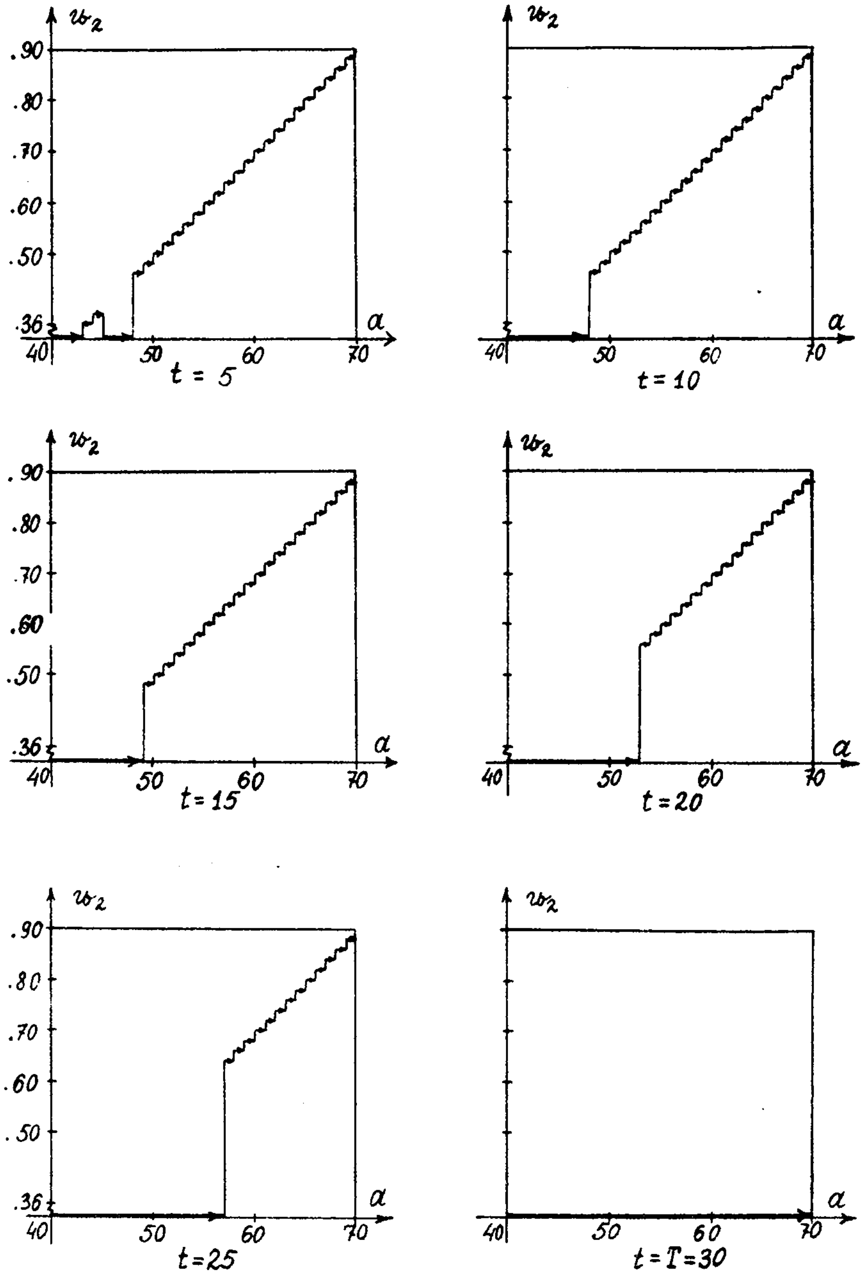

w_2
.90
.80
.70
.60
.50
.36
40
50
60
70
a
t = 5
w_2
40
50
60
70
a
t = 10
w_2
.90
.80
.70
.60
.50
.36
40
50
60
70
a
t = 15
w_2
40
50
60
70
a
t = 20
w_2
.90
.80
.70
.60
.50
.36
40
50
60
70
a
t = 25
w_2
40
50
60
70
a
t = T = 30

Рис.6

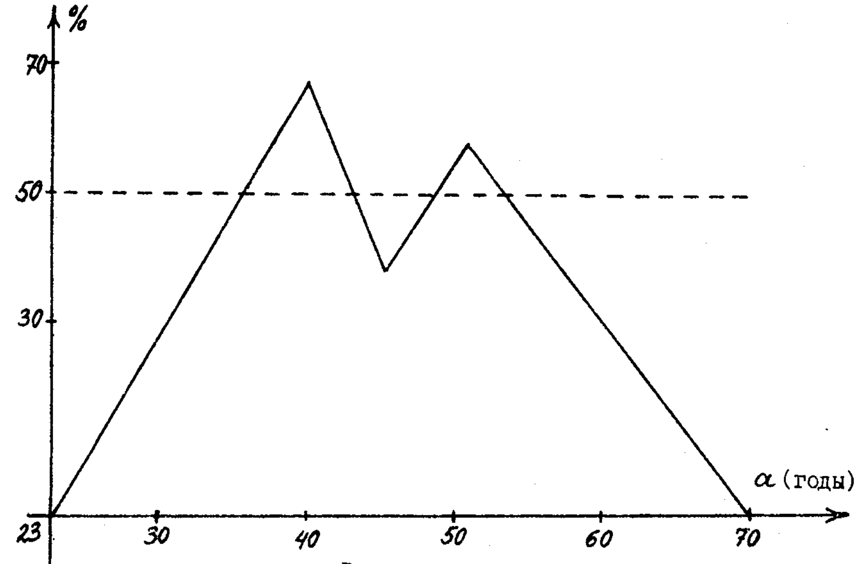

%
70
50
30
α (годы)
23
30
40
50
60
70

Рис.7

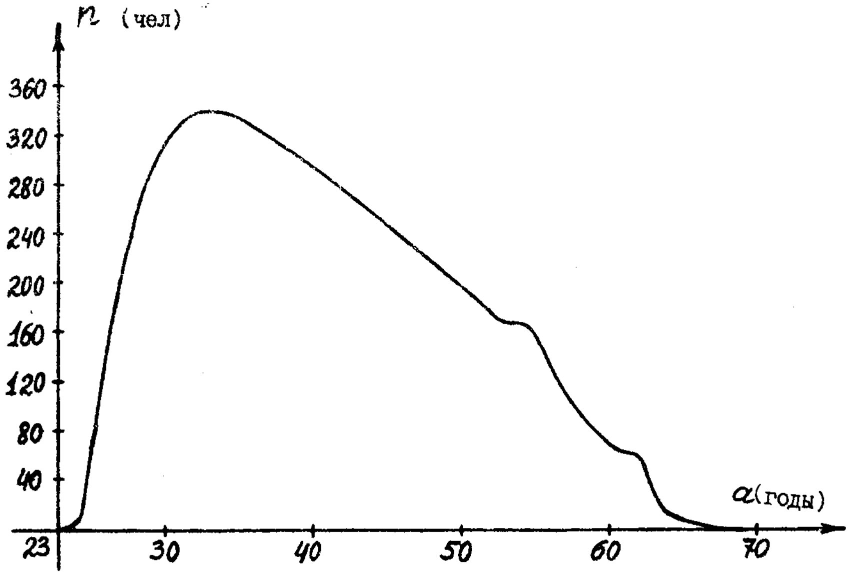

n (чел)
360
320
280
240
200
160
120
80
40
α(годы)
23
30
40
50
60
70

Рис.8

Литература

1. **Романов А.К., Терехов А.И.** Математическое моделирование движения кадров в организациях. – М.: Отдел вычисл. мат. АН СССР, 1986.

2. **Пельц Д., Эндрюс Ф.** Ученые в организациях. – М.: Прогресс, 1973.

3. **Спиридонова С.Л., Терехов А.И.** Об управлении возрастной структурой в непрерывной модели движения кадров. – М., 1989. – 22 с. (Препринт/ АН СССР. ЦЭМИ).

4. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию
I.06.1990 г.