УДК 519.862.64; 512.86

ОБ АЛГОРИТМАХ ВЫБОРА НЕВЫРОЖДЕННОГО БЛОКА В МАТРИЦАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

В.А.Булавский, Р.А.Звягина, М.А.Яковлева

Задача о выборе квадратной достаточно хорошо обусловленной подматрицы в прямоугольной матрице произвольного ранга возникает, например, в линейном программировании, когда матрица системы ограничений имеет разветвленную блочную структуру [1,2]. Процесс преобразования базисной матрицы в блочно-треугольную учитывает блочность значительно эффективнее, если в концевых блоках разветвления выбирать невырожденные подблоки заранее [3]. Такой подход можно было бы распространить на обработку не только концевых блоков. Однако слишком большая трудоемкость решения этой задачи в общем виде [4] заставляет ограничиться рассмотрением лишь концевых блоков, причем специального типа: узкоблочного, транспортного и двухкомпонентного. При этом именно последний требует привлечения ряда Штурма [5-8] для оценки наибольшего сингулярного числа очередной окаймляемой матрицы. Тем не менее во всех трех случаях трудоемкость метода сравнима с вычислительными затратами при выборе невырожденной подматрицы в прямоугольной матрице полного ранга стандартными методами линейной алгебры.

1. Окаймление невырожденной матрицы при некоторых ограничениях на обусловленность

Пусть $A[M,N]$ - прямоугольная матрица произвольного ранга с множествами M и N номеров строк и столбцов соответственно. Матрицу $A[M,N]$ назовем двухкомпонентной, если в каждом ее столбце $A[M,j]$, $j \in N$ (или в каждой ее строке $A[i,N]$, $i \in M$) не более двух компонент, отличных от нуля. В классе двухкомпонентных матриц особо выделим два подкласса: узкоблочные матрицы, когда все столбцы (или все строки) однокомпонентные, и транспортные матрицы, когда каждый столбец (или каждую строку) можно представить как разность двух столбцов матрицы $E[M,M\cup\{0\}]$ (или двух строк матрицы $E[N\cup\{0\},N]$), где $E[M,M]$, $E[N,N]$ - единичные матрицы, а столбец $E[M,0]$ и строка $E[0,N]$ нулевые ($0 \notin M \cup N$).

Далее рассматривается алгоритм выбора в матрице $A[M,N]$ подматрицы $A[I,J]$ как можно большего размера и в достаточной степени невырожденной. Компромисс между этими условиями устанавливается введением барьера $\Delta \in (0,1)$, от которого зависит оценка числа обусловленности матрицы $A[I,J]$. Для определенности будем предполагать, что специфика матрицы $A[M,N]$ определяется строением ее столбцов $A[M,j]$, $j \in N$, поскольку получаемые ниже результаты применимы к $A^T[N,M]$ в случае, когда специфика определяется строением строк $A[i,N]$, $i \in M$. Здесь $A^T[N,M]$ - результат транспонирования матрицы $A[M,N]$.

Предположим, что в выбранных множествах $I \subset M$, $J \subset N$, определяющих невырожденную матрицу $A[I,J]$ размерности $m \times m$, введено правильное упорядочение их элементов [1]. Это значит, что двухкомпонентная (транспортная, узкоблочная) матрица $A[I,J]$ становится блочно-диагональной (треугольной, диагональной). При этом каждый из блоков на диагонали в двухкомпонентной матрице, в свою очередь, является блочно-треугольной матрицей с одним или двумя блоками на диагонали: треугольным и (или) циклическим. Последний можно схематично представлять как

$$
\begin{bmatrix}
a_{i'} & & & & & b_p \\
b_{i'} & a_{i'+1} & & & & \\
& b_{i'+1} & \ddots & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \\
& & & \ddots & a_{p-1} & \\
& & & & b_{p-1} & a_p
\end{bmatrix}
\quad \text{или} \quad
\begin{bmatrix}
a_p & b_{p+1} & & & & \\
& a_{p+1} & b_{p+2} & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \\
& & & \ddots & \ddots & \\
& & & & a_{i'-1} & b_{i'} \\
b_p & & & & & a_{i'}
\end{bmatrix}
\qquad (1)
$$

где $1 \leqslant i' < p \leqslant m$ (или $1 \leqslant p < i' \leqslant m$), т.е. как матрицу, отличающуюся от нижней (или верхней) двухдиагональной лишь единственным ненулевым элементом b_p в правом верхнем (или в левом нижнем) углу. При отсутствии циклической части условимся считать $i' = p$, $b_p = 0$.

Как известно [1], для любого $r \in M \setminus I$ и любого $l \in N \setminus J$ матрицы

$$
\left[\begin{array}{c|c} A[I,J] & A[I,l] \\ \hline A[r,J] & A[r,l] \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c} A[I,J] & 0 \\ \hline 0 & a(r,l) \end{array}\right] \qquad (2)
$$

одновременно невырожденные, если величина

$$
a(r,l) = A[r,l] - \{A[r,J] \cdot A^{-1}[J,I]\} \cdot A[I,l] \qquad (3)
$$

отлична от нуля. Фактически же нужно, чтобы число $a(r,l)$ было отделено от нуля достаточно хорошо.

Если $A[M,N]$ – матрица транспортного типа, то величина (3) целая, а $|\det A[I,J]| = 1$ при любой невырожденной матрице $A[I,J]$ $(I \subset M, J \subset N)$. Следовательно, окаймление (2) допустимо, если $|a(r,l)| > \Delta$. Кроме того, в качестве начальных множеств I,J можно взять $I = J = \varnothing$.

В двух других случаях перед началом итерационного процесса найдем $i_0 \in M$, $j_0 \in N$ при условии

$$
|A[i_0,j_0]| = \max_{i \in M,\, j \in N} |A[i,j]| > \Delta.
$$

Если это условие выполнено, то в качестве начальных базисных

множеств возьмем $I = \{i_0\}$, $J = \{j_0\}$. Исходя из любого $r \in M \setminus I$, выбор l подчиним условию

$$|a(r,l)| = \max_{j \in N \setminus J} |a(r,j)|, \tag{4}$$

а допустимость окаймления (2) - условию $|a(r,l)| > \Delta\sigma_{max}$, где $\sigma_{max} > 0$ - наибольшее сингулярное число матрицы $A[I,J]$, или, что то же самое [5], наибольшее собственное число $\lambda_{2m}^{(m)}$ симметрической матрицы

$$B[J \cup I,\ J \cup I] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A^T[J,I] \\ \hline A[I,J] & 0 \end{array}\right] \tag{5}$$

Здесь естественно считать, что нумерация строк и столбцов различна, т.е. что $I \cap J = \emptyset$. При этом собственные значения $\lambda_i^{(m)}$, $i = 1,2,\ldots,2m$, матрицы (5), упорядоченные по неубыванию, по крайней мере нестрого разделяют [8] собственные значения матрицы $B[I \cup J \cup \{r\}, I \cup J \cup \{r\}]$, которые так же разделяют собственные значения $\lambda_i^{(m+1)}$, $i = 1,2,\ldots,2m+2$, матрицы $B[I \cup J \cup \{r,l\}, I \cup J \cup \{r,l\}]$, откуда следует, что

$$\lambda_{2m+2}^{(m+1)} \geqslant \lambda_{2m}^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_2^{(1)} = |A[i_0,j_0]| > \Delta.$$

Если $A[M,N]$ - узкоблочная матрица, то σ_{max} - наибольшая абсолютная величина элементов на диагонали в $A[I,J]$, т.е. $\sigma_{max} = |A[i_0,j_0]|$. По определению [5] число обусловленности невырожденной матрицы равно отношению наибольшего сингулярного числа к наименьшему. Из неравенства $|a(r,l)|/\sigma_{max} > \Delta$ очевидным образом следует, что число обусловленности совпадающих в этом случае матриц (2) ограничено сверху величиной $1/\Delta$.

Если $A[M,N]$ - двухкомпонентная матрица и $\sigma_{max} < \lambda = |a(r,l)| / \Delta$, то число обусловленности μ_{m+1} правой (блочно-диагональной) из матриц (2) либо равно числу обусловленности $\sigma_{max} / \sigma_{min}$ матрицы $A[I,J]$ в случае $\sigma_{max} \geqslant |a(r,l)| \geqslant \sigma_{min}$, либо также ограничено сверху числом $1/\Delta$, если

$$|a(r,l)| \leqslant \sigma_{min} \quad \text{или} \quad \sigma_{max} < |a(r,l)| \leqslant \sigma_{min}/\Delta.$$

Нарушение последнего неравенства означает, что

$$\max\left\{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}, \frac{1}{\Lambda}\right\} < \mu_{m+1} = \frac{|a(r,l)|}{\sigma_{min}},$$

но величина (3) достаточно хорошо отделена от нуля, поскольку $|a(r,l)| > \lambda_{2m}^{(m)} \geqslant |A[i_o,J_o]|$.

Проверка неравенства $\sigma_{max} < \lambda$ есть ни что иное, как однократное вычисление обобщенной последовательности Штурма $f_s(\lambda)$, $s = 1,2,\ldots,2m$, в точке λ для характеристического полинома $f_{2m}(x)$ матрицы (5), которая перестановками строк и столбцов может быть превращена в обобщенную трехдиагональную [6,7]. Свойства ряда Штурма, определяемого для этого случая в следующем параграфе, позволяют проверить неравенство $\sigma_{max} < \lambda$, не вычисляя σ_{max}, поскольку число перемен знака, определяемое [6] для обобщенной последовательности $f_s(\lambda)$, $s = 1,2,\ldots,2m$, совпадает с числом корней полинома $f_{2m}(x)$, лежащих левее точки λ. Так как интересующий нас корень σ_{max} является наибольшим, то это число должно быть равным $2m$. В противном случае следует отказаться от окаймления (2), т.е. отбросить строку $A[r,N]$ как непригодную для окаймления.

Общее число операций при проверке условия (4) в худшем случае оценивается сверху линейной функцией двух переменных $m,n-m$, где $m \times n$ – размерность матрицы $A[I,N]$, так как вычисление строки $y[I] = A[r,J]\cdot A^{-1}[J,I]$ заменяется решением системы $y[I] \cdot A[I,J] = A[r,J]$, требующим порядка m операций при правильном упорядочении множеств I,J. Вычисление строки $-y[I \cup \{r\}] \cdot A[I \cup \{r\},N \setminus J]$ при $y[r] = -1$ с учетом формулы (4) или без нее требует порядка $n - m$ операций, поскольку в матрице $A[I \cup \{r\},N \setminus J]$ не более $2(n-m)$ ненулевых элементов. Заметим, что в узкоблочной матрице строка $A[r,J]$ и столбец $A[I,l]$ нулевые. Как будет видно из дальнейшего, число операций при вычислении ряда Штурма для обобщенной трехдиагональной матрицы, подобной (5), также оценивается линейной функцией от m при условии правильного упорядочения множеств I,J.

Таким образом, если пара r,l допустима для окаймления (2), то правильный порядок в множествах $I \cup \{r\}$, $J \cup \{l\}$ должен

поддерживаться перестановками, число которых по доказанному [1] является линейной функцией от m, кроме узкоблочной матрицы, которая вообще не нуждается в таких перестановках. Процесс заканчивается, когда в матрице $A[M\setminus I,N]$ останутся разве лишь строки, непригодные для окаймления, в частности при $J = N$.

Замечание. Если матрица $A[M,N]$ имеет полный ранг, например [3], состоит из строк или столбцов другой, гарантированно невырожденной, матрицы, то описанным выше алгоритмом можно выбрать невырожденную подматрицу $A[M,J']$ или $A[I',N]$, опираясь лишь на условие (4) или

$$|a(r,l)| = \max_{i \in M\setminus I} |a(i,l)| \quad (l \in N \setminus J)$$

соответственно при линейной независимости строк или столбцов.

2. Определение ряда Штурма для обобщенной трехдиагональной матрицы

Предположим, что квадратная невырожденная подматрица $A[I,J]$ двухкомпонентной матрицы $A[M,N]$ не распадается на независимые блоки и что известно правильное упорядочение множеств

$$I = \{1,2,\ldots,i',\ldots,m\}, \quad J = \{j_1,j_2,\ldots,j_{i'},\ldots,j_m\}. \qquad (6)$$

Обозначим через $a_k = A[k,j_k]$, $1 \leqslant k \leqslant m$, элементы главной диагонали, а через t_k – номер внедиагональной компоненты $b_k = A[t_k,j_k]$, отличной от нуля в столбце $A[I\setminus\{k\},j_k]$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и предположим, что матрица $A[I\setminus\{m\},J\setminus\{j_m\}]$ – нижняя треугольная, т.е. $t_k > k$, $1 \leqslant k < m$. Тогда если $A[i',j_m] \neq 0$ для некоторого $i' < m$, то $t_k = k+1$, $i' \leqslant k < m$, $t_m = i'$ и циклическая часть матрицы $A[I,J]$ совпадает с левой из матриц (1) при $p = m$. В противном случае ($i' = m$, $b_m = 0$) вся матрица $A[I,J]$ – нижняя треугольная.

Для любого $k \in I$ обозначим через $S(k)$ множество тех номеров $i < k$, для которых $t_i = k$, т.е. множество номеров строк, отвечающих ненулевым компонентам $A[k,j_i] = b_i$ в строке $A[k,J]$ слева от главной диагонали. Заметим, что $m \notin S(i')$, хотя $A[i',j_m] \neq 0$ при $i' < m$. Для каждого $k \in I$ обозначим через I_k объединение множеств

$$I_k(0) = \{k\}, \quad I_k(s) = \bigcup_{t \in I_k(s-1)} S(t), \quad s = 1,2,\ldots,s_k,$$

где s_k - наибольший из номеров $s \geqslant 0$, при котором $I_k(s) \neq \emptyset$. Положим $J_k = \{j_t:\ t \in I_k\}$ и заметим, что $I = I_m$, $J = J_m$ по причине двухкомпонентности столбцов $A[I,j_k]$, $1 \leqslant k < m$.

Построение обобщенного ряда Штурма для матрицы, подобной (5), проведем в условиях так называемого усиленно-правильного [1] упорядочения множеств (6), которое состоит в следующем: для любого $k \in I$ элементы множеств $I_k \subset I$, $J_k \subset J$ в множествах (6) располагаются подряд, номера k, j_k являются последними соответственно в I_k, J_k, а матрица $A[I_k,J_k]$ $(1 \leqslant k < m)$ - нижняя треугольная. В строении матрицы $A[I,J]$ усиленно-правильное упорядочение (6) рекурсивно проявляется в том, что для любого $k \in I$, начиная с $k = m$, матрица $A[I_k\setminus\{k\},J_k\setminus\{j_k\}]$ - блочно-диагональная с независимыми треугольными блоками $A[I_t,J_t]$, $t \in S(k)$, которые можно расположить на диагонали по возрастанию $t \in S(k)$. Отсюда ясно, что простое и усиленное правильные упорядочения отличаются порядком разве лишь первых $t'-1$ номеров в множествах I,J. Заметим, что усиленный порядок в множествах (6) нужен лишь для наглядности выводимых ниже формул. Их вычислительная реализация может быть проведена в условиях простого правильного упорядочения, обеспечивающего треугольность матрицы $A[I \setminus \{m\},J \setminus \{j_m\}]$.

Перестановка строк и столбцов матрицы (5) в соответствии с упорядочением

$$L = I \cup J = \{1,j_1,2,j_2,\ldots,m,j_m\} \qquad (7)$$

является преобразованием подобия [5], и, следовательно, матрицы (5) и $B[L,L]$ имеют одинаковые спектры. Если $A[I,J]$ - двухдиагональная матрица, т.е. $b_m = 0$ и $t_t = t+1$ для всех $t \in I\setminus\{m\}$, то матрица (5) с упорядочением (7) становится обычной трехдиагональной [5]: в ней главная диагональ нулевая, а каждая из побочных диагоналей состоит из чередующихся элементов $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,b_{m-1},a_m$. Матрица $B[L,L]$ является некоторым обобщением [6,7] трехдиагональной, если $t_t > t+1$ для некоторых t в пределах $1 \leqslant t < t' \leqslant m$. В этом случае $(t_t > t+1)$ элемент b_t из позиций $B[t+1,j_t]$ и $B[j_t,t+1]$ побочных диагоналей "сдви-

гается" соответственно вниз и вправо в позиции $B[t_i, j_i]$ и $B[j_i, t_i]$. Кроме того, $B[i', j_m] = B[j_m, i'] = b_m$, если $i' < m$.

Обозначим через $E[L,L]$ единичную матрицу и положим

$$D_\lambda[L,L] = B[L,L] - \lambda\cdot E[L,L]. \tag{8}$$

Как следует из доказанных ранее формул [6,7], обобщенной последовательностью Штурма в точке λ для характеристического полинома матрицы $B[L,L]$, или для определителя матрицы (8), является семейство

$$\begin{aligned} f_{2k-1}(\lambda) &= \det D_\lambda[L_k\setminus\{j_k\},\ L_k\setminus\{j_k\}],\\ f_{2k}(\lambda) &= \det D_\lambda[L_k, L_k],\ k = 1,2,\ldots,m, \end{aligned} \tag{9}$$

где упорядочение в $L_k = I_k \cup J_k$ индуцируется порядком в множестве (7). Структура матрицы $D_\lambda[L_k, L_k]$ $(k \in I)$, распадающейся после вычеркивания двух последних строк и столбцов на независимые блоки $D_\lambda[L_i, L_i]$, $i \in S(k)$, изображена на рис.1 для любого $k = 1,2,\ldots,m-1$, а также для $k = m$, если $i' = m$, $b_m = 0$, или на рис.2 для $k = m$, если $i' < m$.

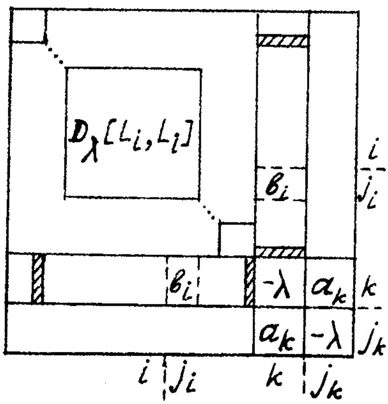

Рис.1

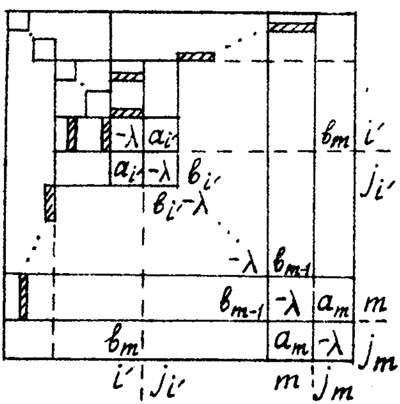

Рис.2

В семействе (9) найдем рекуррентные соотношения на основе структуры матрицы $D_\lambda[L_k, L_k]$ в порядке возрастания $k = 1,2,\dots,m$, что соответствует следующему, вообще говоря, частичному упорядочению [6] множества индексов $\{1,2,\dots,2m\}$ этого семейства: для любого $k \in I$ элементу $2k$, начиная с $2m$ (максимального), непосредственно предшествует единственный элемент $2k-1$, которому, в свою очередь, непосредственно предшествуют несравнимые элементы $2l$, $l \in S(k)$. Элемент $2k-1$ будем называть минимальным, если $S(k) = \emptyset$.

Таким образом, полагая

$$G_{2k-1}(\lambda) = \prod_{l \in S(k)} f_{2l}(\lambda), \quad G_{2k}(\lambda) = f_{2k-1}(\lambda), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \qquad (10)$$

где $G_{2k-1}(\lambda) = 1$, если $2k-1$ – минимальный элемент, определим последовательность

$$f_{2k-1}(\lambda) = -G_{2k-1}(\lambda)\cdot\left\{\lambda + \sum_{l \in S(k)} b_l^2 \cdot \frac{G_{2l}(\lambda)}{f_{2l}(\lambda)}\right\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \qquad (11)$$

$$f_{2k}(\lambda) = -\lambda \cdot G_{2k}(\lambda) - a_k^2 \cdot G_{2k-1}(\lambda), \quad 1 \leqslant k < m, \qquad (12)$$

$$f_{2m}(\lambda) = -\lambda \cdot G_{2m}(\lambda) - a_m^2 \cdot G_{2m-1}(\lambda) - b_m^2 \cdot \varphi(\lambda) -$$

$$- 2a_m b_m \cdot h(\lambda) \qquad (13)$$

в порядке возрастания $k = 1,2,\dots,m$, которая с точностью до обозначений совпадает с полученной ранее [7]. Ясно, что нижняя треугольность матрицы $A[I\setminus\{m\}, J\setminus\{j_m\}]$ и определение множеств $S(k)$, $k \in I$, обеспечивают вычисляемость выражений (11), (12) в указанном порядке. Если $b_m = 0$, то формулы (12) при $k = m$ и (13) совпадают. В противном случае разложение определителя матрицы (8) (рис.2) приводит к формуле (13), где

$$\varphi(\lambda) = \det D_\lambda[L \setminus \{l', j_m\}, L \setminus \{l', j_m\}],$$

$$h(\lambda) = \det D_\lambda[L \setminus \{l', j_m\}, L \setminus \{m, j_m\}] =$$

$$= \det D_\lambda[L \setminus \{m, j_m\}, L \setminus \{l', j_m\}]. \qquad (14)$$

Матрица, получаемая из (8) вычеркиванием строк и столбцов с номерами l', J_m, распадается на независимые блоки

$$D_\lambda[L_l, L_l], \quad l \in S(l'),$$

$$D_\lambda[(L\setminus\{J_m\})\setminus(L_{l'}\setminus\{J_{l'}\}),\ (L\setminus\{J_m\})\setminus(L_{l'}\setminus\{J_{l'}\})] \tag{15}$$

(рис.2). Следовательно, $\varphi(\lambda) = G_{2l'-1}(\lambda)\cdot\varphi_{2m-1}(\lambda)$, где $\varphi_{2m-1}(\lambda)$ - определитель матрицы (15). Поэтому его можно вычислить по аналогии с $f_{2m-1}(\lambda)$, начиная с $\varphi_{2l'}(\lambda) = -\lambda$ и учитывая, что $\varphi_s(\lambda)$ совпадает с $f_s(\lambda)$ для всех s в пределах $1 \leqslant s \leqslant 2(l'-1)$. Тогда очевидно, что

$$\varphi_{2k-1}(\lambda) = -g_{2k-1}(\lambda)\cdot\left\{\lambda + \sum_{l\in S(k)\setminus\{k-1\}} b_l^2\cdot\frac{G_{2l}(\lambda)}{f_{2l}(\lambda)} + b_{k-1}^2\cdot\frac{g_{2k-2}(\lambda)}{\varphi_{2k-2}(\lambda)}\right\},$$

$$k = l'+1,\ l'+2, \dots, m,$$

$$\varphi_{2k}(\lambda) = -\lambda\cdot g_{2k}(\lambda) - a_k^2\cdot g_{2k-1}(\lambda),\quad k = l'+1, l'+2, \dots, m-1,$$

где по аналогии с формулами (10) имеем

$$g_{2l'}(\lambda) = 1,\quad g_{2k}(\lambda) = \varphi_{2k-1}(\lambda),\quad l' < k < m,$$

$$g_{2k-1}(\lambda) = \frac{G_{2k-1}(\lambda)\cdot\varphi_{2k-2}(\lambda)}{f_{2k-2}(\lambda)},\quad l' < k \leqslant m. \tag{16}$$

Прежде чем приводить определитель (14) к виду, удобному для вычислений, заметим, что матрица (8) после вычеркивания строк и столбцов с номерами l, J_l, $l = m, m-1, \dots, l'$, распадается на независимые блоки

$$D_\lambda[L_l, L_l],\quad l \in S(l') \cup \left\{\bigcup_{l'<k\leqslant m} (S(k)\setminus\{k-1\})\right\}$$

(рис.2). Следовательно, ее определитель, обозначаемый через $h_{l'}(\lambda)$, можно вычислить по формуле

$$h_{l'}(\lambda) = G_{2m-1}(\lambda)\cdot\prod_{l'\leqslant k<m}\frac{G_{2k-1}(\lambda)}{f_{2k}(\lambda)}. \tag{17}$$

Если теперь, используя первое из равенств (14), определитель $h(\lambda)$ разлагать по ненулевым элементам столбцов с номерами l, J_l по возрастанию $l = l', l'+1, \ldots, m-1$ и учитывать, что вычеркивание столбца и строки, пересекающихся вне его главной диагонали, дает нулевой определитель (рис.2), то на основании (17) получаем

$$h(\lambda) = h_{l'}(\lambda) \cdot \prod_{l' \leqslant k < m} a_k b_k. \tag{18}$$

По определению [6] числом перемен знака в последовательности (9) является число отрицательных значений в семействе

$$Q_s(\lambda) = f_s(\lambda)/G_s(\lambda), \quad s = 1,2,\ldots,2m, \tag{19}$$

откуда и из формул (10)-(12) следуют рекуррентные соотношения

$$Q_{2k-1}(\lambda) = -\lambda - \sum_{l \in S(k)} \frac{b_l^2}{Q_{2l}(\lambda)}, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{20}$$

$$Q_{2k}(\lambda) = -\lambda - \frac{a_k^2}{Q_{2k-1}(\lambda)}, \quad k = 1,2,\ldots,m-1. \tag{21}$$

Аналогичное выражение для $Q_{2m}(\lambda)$ в случае $b_m = 0$ совпадает с (21) при $k = m(=l')$. В случае $l' < m$ положим

$$q_s(\lambda) = \varphi_s(\lambda)/g_s(\lambda), \quad s = 2l', 2l'+1, \ldots, 2m-1, \tag{22}$$

и найдем выражения для $\varphi(\lambda)/G_{2m}(\lambda)$ и $h(\lambda)/G_{2m}(\lambda)$ через элементы семейств (19),(22). Умножение и деление $\varphi_{2m-1}(\lambda)$ сначала на $g_{2m-1}(\lambda)$, а затем на $g_{2m-2}(\lambda)$ с учетом (16),(22) влечет выражения

$$\varphi_{2m-1}(\lambda) = q_{2m-1}(\lambda) \cdot \frac{G_{2m-1}(\lambda) \cdot \varphi_{2m-2}(\lambda)}{f_{2m-2}(\lambda)} =$$

$$= q_{2m-1}(\lambda) \cdot q_{2m-2}(\lambda) \cdot \frac{G_{2m-1}(\lambda) \cdot \varphi_{2m-3}(\lambda)}{f_{2m-2}(\lambda)}. \tag{23}$$

Преобразуя $\varphi_{2m-3}(\lambda)$ аналогичным образом, цепочку равенств (23) можно продолжить вплоть до появления в числителе множителя

$\varphi_{2l'}(\lambda) = q_{2l'}(\lambda)$ (при $l' = m-1$ достаточно первого равенства), откуда и из (17) следует представление

$$\varphi(\lambda) = h_{l'}(\lambda) \cdot \prod_{2l' \leqslant s < 2m} q_s(\lambda). \tag{24}$$

Умножение правой части (17) на $G_{2k}(\lambda)/f_{2k-1}(\lambda) = 1$, $l' \leqslant k < m$, и деление обеих частей равенства (17) на $G_{2m}(\lambda) = f_{2m-1}(\lambda)$ приводит к формуле

$$\frac{h_{l'}(\lambda)}{G_{2m}(\lambda)} = \frac{1}{Q_{2m-1}(\lambda)} \cdot \prod_{l' \leqslant k < m} \frac{1}{Q_{2k-1}(\lambda) \cdot Q_{2k}(\lambda)} .$$

Отсюда и из (18),(24) следует представление

$$Q_{2m}(\lambda) = -\lambda - \frac{1}{Q_{2m-1}(\lambda)} \cdot \left\{ a_m^2 + b_m^2 \cdot \prod_{2l' \leqslant s < 2m} \frac{q_s(\lambda)}{Q_{s-1}(\lambda)} + \right.$$

$$\left. + 2a_m b_m \cdot \prod_{l' \leqslant k < m} \left[\frac{a_k b_k}{Q_{2k-1}(\lambda)} \cdot \frac{1}{Q_{2k}(\lambda)} \right] \right\}. \tag{25}$$

При этом последовательность (22) вычисляется также по рекуррентным формулам

$$q_{2k-1}(\lambda) = -\lambda - \sum_{l \in S(k) \setminus \{k-1\}} \frac{b_l^2}{Q_{2l}(\lambda)} - \frac{b_{k-1}^2}{q_{2k-2}(\lambda)},$$

$$l' < k \leqslant m, \tag{26}$$

$$q_{2k}(\lambda) = -\lambda - \frac{a_k^2}{q_{2k-1}(\lambda)}, \quad l' < k < m, \tag{27}$$

начиная с $q_{2l'}(\lambda) = -\lambda$, в порядке возрастания $k > l'$.

Заметим, что в процессе вывода рекуррентных соотношений в семействах (9) и (19) неявно предполагались ненулевыми все элементы семейства (10). В нашем случае это не ограничивает общности, поскольку близость к нулю некоторого элемента $Q_s(\lambda)$ при условиях $Q_l(\lambda) < 0$, $1 \leqslant l \leqslant s < 2m$, приводит, как будет показано ниже, к отказу от окаймления (2). Заметим также, что

при условиях $Q_l(\lambda) < 0$, $1 \leqslant l \leqslant s$, неравенства

$$q_s(\lambda) \leqslant Q_s(\lambda), \quad 2l' \leqslant s < 2m, \tag{28}$$

начиная с очевидного для $s = 2l'$, легко доказываются по индукции сравнением определений (20),(26) и (21),(27).

3. Вычислительная реализация

Вычисление семейства (19), улавливающего перемены знака в семействе (9), проведем в условиях простого правильного упорядочения множеств (6), гарантирующего нижнюю треугольность всей матрицы $A[I,J]$ в случае $l' = m$, $b_m = 0$ или ее части $A[I\setminus\{m\},J\setminus\{J_m\}]$ в случае $l' < m$. Кроме того, здесь допускается, что некоторые столбцы $A[I,J_l]$ при $1 \leqslant l < l' < m$, как и в случае $l = l' = m$, могут быть однокомпонентными ($t_l = l$, $b_l = 0$), что автоматически учитывается алгоритмом.

Для обеспечения безаварийности нижеследующего процесса введем некоторые необременительные ограничения на нормировку матрицы $A[M,N]$. Пусть $\varepsilon_2 > 0$ - характеристика разрядности вычислительной машины [5], не допускающей операций с числами, большими $1/\varepsilon_2$ по абсолютной величине. Тогда при естественном требовании $\bar{a} = |A[l_0,J_0]| \leqslant 1/\varepsilon_2$ будем предполагать, что $\bar{a} \leqslant 1/(2\sqrt{\varepsilon_2})$. В противном случае ($\bar{a}\sqrt{\varepsilon_2} > 1/2$) выражение (3) и числа a_k,b_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, можно умножать на $\delta_0 = (1/2)/(\bar{a}\sqrt{\varepsilon_2})$, что по результату совпадает с умножением всех элементов матрицы $A[M,N]$ на нормирующий множитель $\delta_0 < 1$. Кроме того, предположим, что $\lambda = |a(r,l)|/\Delta \leqslant 1/\varepsilon_2$. В противном случае ($\varepsilon_2 \cdot |a(r,l)| > \Delta$) можно положить $\lambda = 1/\varepsilon_2$, умножая числа a_k,b_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, на нормирующий множитель $\delta_r = \Delta/(\varepsilon_2 \cdot |a(r,l)|) < 1$. Заметим, что обусловленность матрицы $A[I,J]$ не зависит от ее нормировки [5].

На первом шаге ($k = 1$) положим $U_1(l) = -\lambda$, $l = 1,2,\ldots,m$, и предположим, что для некоторого k в пределах $1 \leqslant k < m$ вычислено семейство $U_k(l)$, $l = 1,2,\ldots,m$, такое, что

$$Q_{2k}(\lambda) = -\lambda + \frac{-a_k^2}{U_k(k)}, \quad 1 \leqslant k < m. \tag{29}$$

Для $k = 1$ это справедливо, поскольку $Q_1(\lambda) = U_1(1) = -\lambda$ и, следовательно, формулы (21),(29) совпадают. Для того чтобы выполнялись равенства $Q_{2l-1}(\lambda) = U_l(l)$, $1 < l \leqslant m$, очевидно, достаточно полагать $U_{k+1}(l) = U_k(l)$ для всех $l = 1,2,\dots,m$, если столбец $A[I,J_k]$ однокомпонентный. В противном случае правильное упорядочение множеств (6) предполагает доступным номер $t_k > k$ такой, что $A[t_k,J_k] = b_k$, т.е. $k \in S(t_k)$. Это значит, что в семействе $U_{k+1}(l)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, следует пересчитывать единственный элемент

$$U_{k+1}(t_k) = U_k(t_k) + \frac{-b_k^2}{Q_{2k}(\lambda)} \quad (1 \leqslant k < m), \tag{30}$$

что согласуется с формулой (20). Если $A[I,J]$ – треугольная матрица ($b_m = 0$), то равенство (29) верно и при $k = m$.

В случае $l' < m$ правильное упорядочение множеств (6) предполагает известными границы l' и m цикла. Безаварийность вычисления правой части (25) при $Q_s(\lambda) < 0$, $1 \leqslant s < 2m$, обеспечивается, в частности, тем, что вместо величин $q_s(\lambda)/Q_s(\lambda) \geqslant 1$, $2l' \leqslant s \leqslant 2(m-1)$, используются обратные к ним на основе неравенств (28). Кроме того, полагая

$$p_{2k-1} = \frac{a_k b_k}{Q_{2k-1}(\lambda)}, \quad p_{2k} = \frac{1}{Q_{2k}(\lambda)}, \quad l' \leqslant k < m,$$

выделим в множестве $R = \{2l'-1, 2l', \dots, 2(m-1)\}$ подмножество

$$R_0 = \{2k-1 \in R\colon |a_k b_k| \leqslant |Q_{2k-1}(\lambda)|\} \cup \{2k \in R\colon |Q_{2k}(\lambda)| \geqslant 1\},$$

чтобы вычислять отдельно произведения d_m и z_m чисел p_s, $s \in R_0$, и чисел $1/p_s$, $s \in R \setminus R_0$, соответственно.

Итак, на шаге с номером $k = l'$ положим $u_{l'} = -1$, $v_{l'} = z_{l'} = d_{l'} = 1$ и предположим, что для некоторого k в пределах $l' \leqslant k < m$ вычислена величина $u_k < 0$ такая, что

$$q_{2k}(\lambda) = -\lambda - \frac{\alpha_k^2}{u_k}, \quad l' \leqslant k < m, \tag{31}$$

где $\alpha_{l'} = 0$, $\alpha_k = a_k$, $l' < k < m$. Для $k = l'$ формулы (27), (31) совпадают, поскольку $q_{2l'}(\lambda) = -\lambda$. При условиях $U_k(k) < 0$,

$Q_{2k}(k) < 0$ и определениях величин

$$\beta_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in R\backslash R_0, \\ p_s, & \text{если } s \in R_0, \end{cases} \qquad \gamma_s = \begin{cases} 1/p_s, & \text{если } s \in R\backslash R_0, \\ 1, & \text{если } s \in R_0, \end{cases}$$

продолжение процесса в порядке возрастания $k = l', l'+1, \ldots, m-1$ обеспечивается пересчетом параметров

$$v_{k+1} = v_k \cdot \frac{U_k(k)}{u_k} \cdot \frac{Q_{2k}(\lambda)}{q_{2k}(\lambda)},$$

$$d_{k+1} = d_k \cdot \beta_{2k-1} \cdot \beta_{2k}, \quad z_{k+1} = z_k \cdot \gamma_{2k-1} \cdot \gamma_{2k},$$

$$u_{k+1} = U_k(k+1) - \frac{b_k^2}{q_{2k}(\lambda)} \tag{32}$$

и параметра (30), где $t_k = k+1$. При этом очевидно, что

$$0 < v_{k+1} \leqslant |U_{l'}(l')| \leqslant \lambda, \quad |d_{k+1}| \leqslant 1, \quad |z_{k+1}| \leqslant 1,$$

а вычисление u_{k+1} согласовано с формулой (26). Тогда при

$$\bar{a}_m = (a_m^2 \cdot |z_m| + 2a_m b_m d_m \cdot \operatorname{sing} z_m) \cdot \frac{v_m}{\alpha} + b_m^2 \cdot |z_m| \cdot \frac{-u_m}{\alpha},$$

где $\alpha = -u_m$, если $v_m < |u_m|$, или $\alpha = v_m$, если $v_m \geqslant |u_m|$, в соответствии с формулой (25) можно положить

$$Q_{2m}(\lambda) = -\lambda + \frac{-\bar{a}_m}{U_m(m) \cdot |z_m| \cdot (v_m/\alpha)}. \tag{33}$$

Таким образом, реализация процесса (29)-(33) по возрастанию $k = 1, 2, \ldots, m$ должна сопровождаться проверкой неравенств

$$U_k(k) < 0, \quad Q_{2k}(\lambda) < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{34}$$

Если столбец $A[I, J_k]$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ однокомпонентный, то достаточно проверять неравенство $Q_{2k}(\lambda) < 0$. В остальных случаях нарушение одного из неравенств (34) следует из недопустимости деления в формулах (29),(30),(33). Действительно, процесс продолжается лишь до первого нарушения хотя бы одного из неравенств (34). Однако близость к нулю отрицательного делителя в

формулах (29),(30) делает второе слагаемое слишком большим положительным числом. Поэтому проверка конца процесса при некотором k в пределах $1 \leqslant k < m$ сводится к проверке неравенств

$$a_k^2\varepsilon_2 + U_k(k) \leqslant 0, \quad b_k^2\varepsilon_2 + Q_{2k}(\lambda) \leqslant 0. \qquad (35)$$

Нарушение первого из них означает, что либо $U_k(k) \geqslant 0$, либо при $U_k(k) < 0$ второе слагаемое в выражении (29) стало бы больше $1/\varepsilon_2$, откуда следует, что $Q_{2k}(\lambda) > 0$, поскольку $\lambda \leqslant 1/\varepsilon_2$. Нарушение второго из неравенств (35) влечет либо $Q_{2k}(\lambda) \geqslant 0$, либо $U_{t_k}(t_k) \geqslant U_{k+1}(t_k) > 0$, поскольку элементы $U_l(t_k)$ не убывают с возрастанием l в пределах $k < l \leqslant t_k$ при $Q_{2j}(\lambda) < 0$, $j \in S(t_k)$. Легко видеть, что допустимость деления в формулах (31),(32) следует из неравенств (28).

Выражение (33), в котором $|\bar{a}_m| \leqslant (|a_m|+|b_m|)^2 \leqslant 1/\varepsilon_2$, имеет смысл вычислять разве лишь при выполнении условий $U_m(m) < 0$, $\bar{a}_m > 0$, так как в других случаях либо процесс обрывается ($U_m(m) \geqslant 0$), либо можно заключить, что $Q_{2m}(\lambda) < 0$, не вычисляя (33) при $\bar{a}_m \leqslant 0$ ($u_m \leqslant U_m(m) < 0$). Нарушение условия

$$\varepsilon_2\bar{a}_m + U_m(m)\cdot|z_m| \cdot (v_m/\alpha) \leqslant 0,$$

аналогичного первому из неравенств (35), ведет к окончанию процесса ($Q_{2m}(\lambda) > 0$), а из выполнения этого условия следует безаварийность вычислений в правой части (33) с последующей проверкой неравенства $Q_{2m}(\lambda) < 0$.

В заключение отметим, что предположение о нераспадении матрицы $A[I,J]$ на независимые блоки частично было снято в начале параграфа, так как столбцы вне цикла могли быть однокомпонентными, т.е. допускалось распадение матрицы $A[I,J]$ на блоки, разве лишь один из которых с циклом, а остальные – треугольные. Легко видеть, что блочная диагональность матрицы $A[I,J]$ при наличии цикла более чем в одном блоке на диагонали также может быть автоматически учтена предложенным алгоритмом.

Литература

1. **Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А.** Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977.

2. **Булавский В.А., Звягина Р.А.** Обобщение понятия блочности в линейном программировании // Докл.АН СССР. - 1977. - Т.235, № 5. - С.993-996.

3. **Звягина Р.А.** Об алгоритмах решения блочных задач линейного программирования применительно к пакету реализующих их программ // Оптимизация. - 1989. - Вып.46(63). - С.14-34.

4. **Звягина Р.А.** Выявление хорошо обусловленного блока в прямоугольной матрице // Оптимизация. - 1983. - Вып.31(48). - С.48-61.

5. **Годунов С.К.** Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980.

6. **Булавский В.А., Яковлева М.А.** Обобщенные трехдиагональные матрицы и теорема Штурма // Докл.АН СССР. - 1984. - Т.275, № 2. - С.277-280.

7. **Яковлева М.А.** Вычисление сингулярных чисел базисной матрицы в двухкомпонентных задачах линейного программирования // Оптимизация. - 1983. - Вып.31(48). - С.74-89.

8. **Уилкинсон Дж.Х.** Алгебраическая проблема собственных значений. - М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию
23.03.1991 г.