**УДК 519.853**

# СХОДИМОСТЬ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

*В.В.Калашников, Н.И.Калашникова*

В работе приводятся условия, обеспечивающие существование решения нелинейной задачи о дополнительности для монотонного отображения $f : R^n \longrightarrow R^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, и сходимость метода Ньютона для решения этой задачи в случае строгой монотонности отображения $f$ и вогнутости каждой его компоненты $f_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Кроме того, монотонная сходимость последовательности приближений позволяет получить квадратичную скорость сходимости.

## 1. Существование решения для специального монотонного отображения

Рассмотрим нелинейную задачу о дополнительности: найти вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий условиям

$$x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad x^T f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f : R^n_+ \longrightarrow R^n$ - непрерывное отображение. Известно [1], что если $f$ - сильно монотонное отображение, т.е. выполнено

неравенство

$$(x - y)^T[f(x) - f(y)] \geqslant \mu\|x - y\|^2, \qquad (2)$$

где $\mu > 0$, а $x, y \in R^n_+$, то задача (1) имеет единственное решение. Если же отображение $f$ является лишь строго монотонным, т.е. для всяких $x, y \in R^n_+$, где $x \neq y$, имеет место неравенство

$$(x - y)^T[f(x) - f(y)] > 0,$$

то задача (1) может и не иметь решения.

Рассмотрим непрерывное монотонное отображение $f : R^n_+ \longrightarrow R^n$, т.е. такое, для которого выполнено неравенство

$$(x - y)^T[f(x) - f(y)] \geqslant 0$$

для любых $x$, $y \in R^n_+$. Предположим, кроме того, что имеет место соотношение

$$\lim_{\|x\| \to \infty,}\ \inf_{x \in R^n_+} x^T f(x) > 0. \qquad (3)$$

В частности, последним свойством обладает коэрцитивное по скалярному произведению отображение, т.е. удовлетворяющее условию

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in R^n_+}} x^T f(x) = +\infty.$$

**Лемма 1.** *Пусть непрерывное монотонное отображение обладает свойством* (3). *Тогда задача* (1) *имеет решение.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отображение $f^\varepsilon : R^n_+ \longrightarrow R^n$, определяемое формулой

$$f^\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x.$$

Легко видеть, что отображение $f^\varepsilon$ сильно монотонное: для него выполнено неравенство (2) с $\mu = \varepsilon$. Следовательно, существует единственное решение $x^\varepsilon$ задачи о дополнительности

$$x \geqslant 0, \quad f^\varepsilon(x) \geqslant 0, \quad x^T f^\varepsilon(x) = 0. \qquad (4)$$

Покажем, что множество точек $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ограничено. Предположим, напротив, что найдется последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $\|x^{\varepsilon_k}\| \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow \infty$. Для всякого $k \in N$ соотношения (4) можно переписать в виде

$$x^{\varepsilon_k} \geqslant 0, \quad f(x^{\varepsilon_k}) + \varepsilon_k x^{\varepsilon_k} \geqslant 0,$$

$$(x^{\varepsilon_k})^T f(x^{\varepsilon_k}) + \varepsilon_k |x^{\varepsilon_k}|^2 = 0. \tag{5}$$

Из них вытекает, что $(x^{\varepsilon_k})^T f(x^{\varepsilon_k}) = -\varepsilon_k |x^{\varepsilon_k}|^2 \leqslant 0$, но это противоречит условию (3). Таким образом, множество точек $\{x^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ ограничено. Следовательно, из него можно выбрать сходящуюся последовательность $\{x^{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$, для которой выполнено соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Тогда если $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{\varepsilon_k}$, то в силу непрерывности отображения $f$ можно совершить предельный переход в формулах (5) и получить соотношения

$$x^* \geqslant 0, \quad f(x^*) \geqslant 0, \quad (x^*)^T f(x^*) = 0,$$

которые доказывают лемму.

## 2. Сходимость метода Ньютона для строго монотонного вогнутого отображения

Рассмотрим теперь другой класс отображений. Именно, будем считать, что $f : R^n_+ \longrightarrow R^n$ – строго монотонное отображение из класса $C^1(R^n_+)$, и каждая его компонента $f_i$ является вогнутой функцией. Кроме того, пусть допустимое множество отображения $f$ не пусто, т.е. существует точка $\bar{x} \in R^n_+$ такая, что $f(\bar{x}) \geqslant 0$. Наконец, предположим, что матрица $f'(x)$ в каждой точке $x \in R^n_+$ является $Z$-матрицей ($f'_{ij}(x) \leqslant 0$ при $i \neq j$). Известно [2], что в сочетании со строгой монотонностью $f$ последнее свойство влечет неотрицательность всех элементов обратной матрицы

$$[f'(x)]^{-1} \geqslant 0$$

для всех $x \in R^n_+$.

Применим для нахождения приближенного решения задачи (1) метод Ньютона, начинающий работу с некоторой точки $x^0 \in R^n_+$. Если к началу $(k+1)$-го шага имеется точка $x^k$, определяем $x^{k+1}$ как решение линейной задачи о дополнительности

$$x \geqslant 0, \quad w = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) \geqslant 0, \; x^T w = 0 \tag{6}$$

(оно существует и единственно в силу строгой монотонности отображения $f$).

**Теорема 1.** *При произвольном начальном приближении* $x^0 \in R^n_+$ *последовательность* $\{x^k\}$ *сходится к* $x^* \in R^n_+$ *– решению задачи* (*I*).

**Доказательство.** Рассмотрим приближение $x^{k+1}$ при $k \geqslant 0$ и введем обозначения $J = J(x^{k+1}) = \{1 \leqslant j \leqslant n: x_j^{k+1} \geqslant 0\}$, $I = I(x^{k+1}) = \{1 \leqslant i \leqslant n: x_i^{k+1} > 0\}$. Для номеров $i \in I$ в силу формулировки задачи (6) имеют место равенства

$$f_i(x^k) + f'_i(x^k)(x^{x+1} - x^k) = 0;$$

их можно записать в векторной форме следующим образом:

$$f'_I(x^k) + f'_I(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0. \qquad (7)$$

Представим матрицу $f'_I(x^k)$ в блочном виде

$$f'_I(x^k) = \left[ f'_{II}(x^k) \ \vdots \ f'_{IJ}(x^k) \right]$$

и заметим, что $f'_{II}(x^k)$, как главная подматрица $Z$-матрицы $f'(x^k)$, также является $Z$-матрицей. Следовательно, в силу ее положительной определенности, она имеет обратную $[f'_{II}(x^k)]^{-1}$ с неотрицательными компонентами. Далее, выразим $x_I^{k+1}$ из равенства (7):

$$x_I^{k+1} = x_I^k - [f'_{II}(x^k)]^{-1} f_I(x^k) -$$

$$- [f'_{II}(x^k)]^{-1} f'_{IJ}(x^k)(x^{k+1} - x^k)_J. \qquad (8)$$

По условию теоремы, все функции $f_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, являются вогнутыми. Это означает, что справедливо неравенство

$$f_I(\bar{x}) \leqslant f_I(x^k) + f'_I(x^k)(\bar{x} - x^k),$$

которое удобно переписать в следующем виде:

$$f_I(x^k) \geqslant f_I(\bar{x}) - f'_{II}(x^k)(\bar{x} - x^k)_I - f'_{IJ}(x^k)(\bar{x} - x^k)_J;$$

здесь $\bar{x} \in R^n_+$ – допустимая точка для отображения $f$. Подставляя правую часть последнего неравенства в (8) вместо $f_I(x^k)$ и учитывая неотрицательность компонент матрицы $[f'_{II}(x^k)]^{-1}$,

получим соотношение

$$x_I^{k+1} \leqslant x_I^k - [f'_{II}(x^k)]^{-1} f_I(\bar{x}) + \bar{x}_I -$$
$$- x_I^k + [f'_{II}(x^k)]^{-1} f'_{IJ}(x^k)(\bar{x} - x^k)_J -$$
$$- [f'_{II}(x^k)]^{-1} f'_{IJ}(x^k)(x^{k+1} - x^k)_J.$$

Раскрывая здесь скобки и приводя подобные, получим, с учетом того, что $x_J^{k+1} = 0$, неравенство

$$x_I^{k+1} \leqslant \bar{x}_I - [f'_{II}(x^k)]^{-1} f_I(\bar{x}) +$$
$$+ [f'_{II}(x^k)]^{-1} f'_{IJ}(x^k)\bar{x}_J,$$

из которого вытекает оценка

$$x_I^{k+1} \leqslant \bar{x}_I$$

в силу свойств $f_I(\bar{x}) \geqslant 0$, $f'_{IJ}(x^k) \leqslant 0$ и $\bar{x}_J \geqslant 0$. Кроме того, понятно, что $(0=)x_J^{k+1} \leqslant \bar{x}_J$. Таким образом, мы показали, что для любого шага с номером $k \geqslant 1$ справедлива оценка

$$0 \leqslant x^k \leqslant \bar{x},$$

которая влечет ограниченность последовательности $\{x^k\}$.

Покажем теперь, что последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает. Для этого рассмотрим итерацию $x^k$ при некотором $k \geqslant 1$. Пусть теперь $J = J(x^k) = \{1 \leqslant j \leqslant n : x_j^k = 0\}$, $I = I(x^k) = \{1 \leqslant i \leqslant n : x_i^k > 0\}$. Ясно, что $x_j^{k+1} \geqslant x_j^k$ при $j \in J$. Отметим далее, что в силу вогнутости справедливы соотношения

$$f_i(x^k) \leqslant f_i(x^{k-1}) + f'_i(x^{k-1})(x^k - x^{k-1}) = 0, \quad i \in I.$$

Покажем теперь, что $x_i^{k+1} \geqslant x_i^k$ и при $i \in I$. В силу (6) имеет место неравенство

$$f_I(x^k) + f'_I(x^k)(x^{k+1} - x^k) \geqslant 0,$$

которое перепишем в форме

$$f_I(x^k) + f'_{II}(x^k)(x^{k+1} - x^k)_I + f'_{IJ}(x^k)(x^{k+1} - x^k)_J \geqslant 0.$$

Умножая обе его части слева на $[f'_{II}(x^k)]^{-1}$, получим соотноше-

ние

$$x_I^{k+1} \geqslant x_I^k - [f'_{II}(x^k)]^{-1} f_I(x^k) -$$
$$- [f'_{II}(x^k)]^{-1} f_{IJ}(x^k)(x^{k+1} - x^k)_J,$$

из которого вытекает требуемое неравенство $x_I^{k+1} \geqslant x_I^k$, в силу справедливости неравенств $f_I(x^k) \leqslant 0$, $(x^{k+1}-x^k)_J \geqslant 0$, $[f'_{II}(x^k)]^{-1} \geqslant 0$ и $f'_{IJ}(x^k) \leqslant 0$.

Таким образом, мы доказали, что последовательность $\{x^k\}$ не убывает: $x^{k+1} \geqslant x^k$, $k = 1,2,\ldots$, и ограничена: $0 \leqslant x^k \leqslant \bar{x}$, $k = 1,2,\ldots$ Следовательно, существует предел $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$. Тогда, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенствах и равенстве

$$x^{k+1} \geqslant 0,\ w = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k) \geqslant 0,\ (x^{k+1})^T w = 0,$$

с учетом непрерывности $f$ и $f'$ получим соотношения $x^* \geqslant 0$, $f(x^*) \geqslant 0$, $(x^*)^T f(x^*) = 0$. Из них вытекает, что $x^*$ - решение задачи (1). Теорема доказана.

Получим при некоторых дополнительных предположениях оценку скорости сходимости последовательности $\{x^k\}$. Для этого сначала установим почти очевидное свойство строго монотонного отображения.

**Лемма 2.** *Пусть $f$ - строго монотонное отображение из класса $C^1(R_+^n)$, а $K \subset R_+^n$ - выпуклое компактное множество. Тогда найдется положительное число $\mu = \mu(K)$ такое, что*

$$(x - y)^T [f(x) - f(y)] \geqslant \mu |x - y|^2$$

*для всех $x,y \in R_+^n$.*

**Доказательство.** Введем в рассмотрение параметр

$$\mu = \inf_{\substack{x,y\in K \\ x\neq y}} \frac{(x-y)^T [f(x) - f(y)]}{|x-y|^2} \quad (\geqslant 0).$$

Предположим, что $\mu = 0$. Тогда можно выделить последовательность пар $(x^k, y^k) \in K \times K$, $x^k \neq y^k$, таких, что верно равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(x^k-y^k)^T [f(x^k)-f(y^k)]}{|x^k-y^k|^2} = 0,$$

или

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(x^k-y^k)^T f'(\theta^k)(x^k-y^k)}{|x^k-y^k|^2} = 0,$$

где $\theta^k \in [x^k, y^k]$. Далее, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$(x^k-y^k)^T f'(\theta^k)(x^k-y^k) = {}^1/_2 (x^k-y^k)^T [f'(\theta^k) + f'^T(\theta^k)](x^k-y^k) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_k |x^k-y^k|^2,$$

где $\lambda_k = \lambda_{min}({}^1/_2 [f'(\theta^k) + f'^T(\theta^k)])$. Но тогда можно записать оценки

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{(x^k-y^k)^T f'(\theta^k)(x^k-y^k)}{|x^k-y^k|^2} \geqslant \limsup_{k\to\infty} \lambda_k \geqslant 0;$$

из которых вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. В силу выпуклости $K$ точки $\theta^k$ лежат в $K$, и ввиду компактности этого множества из последовательности $\{\theta^k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\theta^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, причем предел последней $\bar{\theta} = \lim\limits_{m\to\infty} \theta^{k_m}$ также лежит в $K$. Так как $f \in C^1(R^n_+)$, то ${}^1/_2 [f'(\theta^k) + f'^T(\theta^k)] \longrightarrow$ $\longrightarrow {}^1/_2 [f'(\bar{\theta}) + f'(\bar{\theta})]$ при $m \longrightarrow \infty$, а симметричность этих матриц обеспечивает равенство

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0 = \lambda_{min}({}^1/_2 [f'(\bar{\theta}) + f'^T(\bar{\theta})]).$$

Но последнее равенство противоречит положительной определенности матрицы $f'(\bar{\theta})$. Следовательно, случай $\mu = 0$ невозможен, что и требовалось доказать.

Теперь можно получить оценку скорости сходимости.

**Теорема 2.** *Пусть отображение $f : R^n_+ \longrightarrow R^n$ удовлетворяет условиям, сформулированным в начале п.2, и, кроме того, принадлежит классу $C^2(R^n_+)$. Тогда последовательность $\{x^k\}$ приближений, полученных методом Ньютона, сходится к $x^*$-решению задачи (1) с квадратичной скоростью.*

**Доказательство.** В процессе доказательства теоремы 1 установлено, что последовательность $\{x^k\}$ лежит в шаре $S_\rho(0)$ с центром в начале координат и радиусом $\rho = \max\{|x^*|, |x^0|\}$. По

лемме 2 для этого множества можно определить скаляр $\mu > 0$ такой, что выполнено неравенство:

$$(x - y)^T[f(x) - f(y)] \geqslant \mu|x - y|^2 \qquad (9)$$

для любых $x,\ y \in S_\rho(0)$.

Рассмотрим скалярное произведение $(x^{k+1} - x^*)^T(w^{k+1} - w^*) = -(x^{k+1})^T w^* - (x^*)^T w^{k+1} \leqslant 0$, где $w^* = f(x^*)$, а $w^{k+1} = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$ для некоторого $k \geqslant 0$. Это же произведение можно оценить по-другому, используя неравенство (9):

$$(x^{k+1}-x^*)^T(w^{k+1}-w^*) = (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^k)-f(x^*) +$$
$$+ f'(x^k)(x^{k-1}-x^k)] = (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^{k+1})-f(x^*)] -$$
$$- (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^{k+1}) - f(x^k) - f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)] \geqslant$$
$$\geqslant \mu|x^{k+1}-x^*|^2 - (x^{k+1}-x^*)^T[f(x^{k+1}) -$$
$$- f(x^k) - f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)].$$

Объединяя две полученные цепочки соотношений, получим неравенство

$$\mu|x^{k+1}-x^*|^2 \leqslant |x^{k+1}-x^*|\cdot|f(x^{k+1}) - f(x^k) - f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)|,$$

из которого следует оценка

$$|x^{k+1}-x^*| \leqslant \frac{1}{\mu}|f(x^{k+1})-f(x^k)-f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)|. \qquad (10)$$

Далее, так как $f \in C^2(R^n_+)$, то для ограниченного выпуклого множества $S_\rho(0)$ существует скаляр $r > 0$ такой, что для любых $x,y \in S_\rho(0)$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)| \leqslant r|x-y|^2.$$

Из него и из (10) вытекает оценка

$$|x^{k+1}-x^*| \leqslant \frac{r}{\mu}|x^{k+1}-x^k|^2, \quad k = 1,2,\ldots,$$

которая влечет требуемое неравенство

$$|x^{k+1}-x^*| \leqslant D|x^k-x^*|^2, \quad k = 1,2,\ldots,$$

с $D = r/\mu$, так как $|x^{k+1}-x^k| \leqslant |x^k-x^*|$ при $k = 1,2,\ldots$ в силу

монотонности последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

В заключение приведем примеры отображений $f$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

**Пример 1.** Пусть отображение $f : R_+^2 \longrightarrow R^2$ определено формулами

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x + \ln(1+x) - y + 1; \\ -x + 2y + \ln(1+y) - 2 - \ln 2 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что каждая компонента $f_i$, $i = 1,2$, - вогнутая функция на $R_+^2$. Далее, матрица производных

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{1+x} & -1 \\ -1 & 2 + \frac{1}{1+y} \end{bmatrix}$$

представляет собой $Z$-матрицу, положительно определенную на $R_+^2$. Наконец, отображение $f$ имеет, очевидно, непустое допустимое множество, а точка $z^* = (0,1)^T$ является (единственным) решением задачи (1). В соответствии с вышеизложенным можно заключить, что метод Ньютона, примененный к решению задачи (1) с данным отображением, будет сходиться к $z^*$ с квадратичной скоростью.

**Пример 2.** Пусть отображение $f : R_+^2 \longrightarrow R^2$ задано формулами

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x + \ln(1+x) - y - \frac{1}{1+y} - 1 - \ln 2 \\ -x - \frac{1}{1+x} + 2y + \ln(1+y) + 2 \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что $f_i$, $i=1,2$, - вогнутые функции на $R_+^2$. Матрица производных

$$A = f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{1+x} & -1 + \frac{1}{(1+y)^2} \\ -1 + \frac{1}{(1+x)^2} & 2 + \frac{1}{1+y} \end{bmatrix}$$

является $Z$-матрицей и положительно определена на $R_+^2$. В самом деле, ее симметричная часть имеет вид

$$\frac{1}{2}(A+A^T) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{x+1} & -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2}\right] \\ -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2}\right] & 2 + \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

и

$$\det\left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right] = 4 + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} +$$

$$+ \frac{1}{(1+x)(1+y)} - 1 + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} -$$

$$- \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x)^4} + \frac{2}{(1+x)^2(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^4}\right] \geqslant$$

$$3 + \frac{3}{(1+x)^2} + \frac{3}{(1+y)^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+y)^2}\right]^2 > 0$$

для любых $x,y \in R^2_+$.

Отображение $f$ обладает непустым допустимым множеством, а точка $z^* = (1,0)^T$ – единственное решение задачи (1), и к нему будет сходиться с квадратичной скоростью последовательность приближений, построенная методом Ньютона.

## Литература


1. **Karamardian S.** The nonlinear complementarity problem with applications. Part I // J. Optim. Theory and Appl. - 1969. - V.4, № 2. - P.87-92.

2. **Berman A., Plemmons R.L.** Nonnegativive matrices in the mathematical sciences. - N.Y. a.o.: Academic Press, 1979.



*Поступила в редакцию*
*18 декабря 1989 г.*