УДК 512. 25/26

# ОДИН СПЕЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.А.Булавский

В статье рассматривается алгорифм для отыскания точки многогранного множества, ближайшей к данной точке $x_0$ в евклидовой метрике. Такая задача возникает, например, при реализации методов последовательного проектирования. Особенностью алгорифма является отсутствие отдельной процедуры начала счета и нечувствительность к вырождению. Во второй части статьи изложена вычислительная схема метода для случая, когда часть ограничений является ограничениями сверху и снизу на отдельные переменные. Общий случай метода кратко был ранее изложен автором [I].

## § I. Общее описание метода

Будем рассматривать следующую задачу. Требуется минимизировать величину

$$\frac{1}{2}(x-x_0)'(x-x_0)$$

при ограничениях

$$a_i'x \geqslant b_i \;, \quad i\in I. \tag{I.I}$$

Здесь $x_0$ , $a_i$, $i\in I$, - заданные вещественные столбцы длины $n$, $x$ - искомый столбец той же длины, $b_i$ , $i\in I$, - вещественные числа. Известно, что допустимый $x$ является решением задачи (оптимальным) в том и только в том случае, если сущест-

вуют неотрицательные числа $y_i$, $i\in I$, для которых $x-x_0=\sum_{i\in I} y_i a_i$ и $y_i=0$, если $a_i'x>b_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что множество $S\subset I$ и набор чисел $y_i$, $i\in S$, образуют базисную пару для столбца $x_0$, если выполнены условия:

1) $a_i'(x_0+\sum_{s\in S} y_s a_s)=b_i$, $i\in S$;

2) $y_i>0$, $i\in S$;

3) система столбцов $a_i$, $i\in S$ линейно независима.

Если множество $S$ и набор $y_i$, $i\in S$, образуют базисную пару для $x_0$ и при этом столбец

$$x=x_0+\sum_{s\in S} y_s a_s \qquad (1.2)$$

удовлетворяет всей системе (1.1), то он является оптимальным столбцом. Если же столбец (1.2) не удовлетворяет какому-нибудь из ограничений системы (1.1), то может быть построена другая базисная пара с таким расчетом, чтобы это ограничение выполнялось. Излагаемый ниже метод, каждый шаг которого состоит из некоторого числа промежуточных шагов, заключается в последовательном переходе от одной базисной пары к другой и дает решение в конечное число шагов. В качестве начальной может быть взята, например, "нулевая" базисная пара: $S=\varnothing$.

Опишем один шаг метода. Пусть для столбца $x_0$ имеется некоторая базисная пара $S$, $y_i$, $i\in S$, и пусть в (1.1) для столбца (1.2) нарушено ограничение при $i=i_0$:

$$a_{i_0}'(x_0+\sum_{s\in S} y_s a_s)<b_{i_0}.$$

Положим $S^{(0)}=S$, $y_i^{(0)}=y_i$, $i\in S$, $y_{i_0}^{(0)}=0$ и будем совершать промежуточные шаги, на которых последовательно построим $S^{(k)}$, $y_i^{(k)}$, $i\in S^{k}\cup\{i_0\}$, $k=1,2,\dots,p$, обладающие следующими свойствами:

а) при всех $k$ пары $S^{(k)}$, $y_i^{(k)}$, $i\in S^{(k)}$, являются базисными для столбцов $x_0+y_{i_0}^{(k)}a_{i_0}$;

б) пара $S^{(p)}\cup\{i_0\}$, $y_i^{(p)}$, $i\in S^{(p)}\cup\{i_0\}$ является базисной для столбца $x_0$.

Для описания одного промежуточного шага предположим, что уже найдены множество $S^{(k-1)}$ и числа $y_i^{(k-1)}$, $i\in S^{(k-1)}\cup\{i_0\}$.

Определим числа $t_s^{(k-1)}$, $s \in S^{(k-1)}$ из системы

$$\sum_{s\in S^{(k-1)}} (a_i' a_s)\, t_s^{(k-1)} = (a_i' a_{i_0}), \quad i \in S^{(k-1)} \tag{I.3}$$

и найдем число $\varepsilon_1^{(k)}$ из соотношения:

$$\varepsilon_1^{(k)} = \frac{b_{i_0} + a_{i_0}'(x_0 + y_{i_0}^{(k-1)} a_{i_0} + \sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k-1)} a_s)}{a_{i_0}'(a_{i_0} - \sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} a_s)}, \tag{I.4}$$

а числа $\varepsilon_2^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}$ определим по формулам

$$\varepsilon_2^{(k)} = \min_{\substack{i\in S^{(k-1)} \\ t_i^{(k-1)}>0}} \left\{ \frac{y_i^{(k-1)}}{t_i^{(k-1)}} \right\}, \qquad \varepsilon^{(k)} = \min\{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}\}.$$

При этом если знаменатель в (I.4) равен нулю, то положим $\varepsilon_1^{(k)} = +\infty$ (числитель в (I.4), как будет видно из дальнейшего, всегда положителен). Если $\varepsilon^{(k)} = +\infty$, то это свидетельствует о несовместности системы (I.I), и решение следует прекратить. В противном случае положим:

$$y_i^{(k)} = y_i^{(k-1)} - \varepsilon^{(k)} t_i^{(k-1)}, \quad i \in S^{(k-1)}, \quad y_{i_0}^{(k)} = y_{i_0}^{(k-1)} + \varepsilon^{(k)}$$

и образуем множество $S^{(k)}$, удалив из $S^{(k-1)}$ те элементы $i$, для которых оказалось $y_i^{(k)}=0$. На этом заканчивается промежуточный шаг. Очередной шаг метода заканчивается на том промежуточном шаге с номером $p$, на котором оказалось $\varepsilon^{(p)} = \varepsilon_1^{(p)}$. При этом для новой базисной пары $\bar{S}$, $\bar{y}_i$, $i\in\bar{S}$, следует взять $\bar{S} = S^{(p)} \cup \{i_0\}$, $\bar{y}_i = y_i^{(p)}$, $i \in \bar{S}$. Затем, если нужно, шаги повторяются.

Проведем теперь обоснование описанного метода.

ЛЕММА. Если множество $S^{(k-1)}$ и набор чисел $y_i^{(k-1)}$, $i \in S^{(k-1)}$, образуют базисную пару для столбца $x_0 + y_{i_0}^{(k-1)} a_{i_0}$, и если

$$b_{i_0} > a_{i_0}'(x_0 + y_{i_0}^{(k-1)} a_{i_0} + \sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k-1)} a_s); \qquad y_{i_0}^{(k-1)} \geqslant 0, \tag{I.5}$$

то

а) $\varepsilon^{(K)}>0$ и конечно, если система (I.I) совместна;

б) $S^{(K)}$ и $y_i^{(K)}$, $i\in S^{(K)}$, образуют базисную пару для столбца $x_0+y_{i_0}^{(K)}a_{i_0}$, причем $y_{i_0}^{(K)}>0$;

в) если $\varepsilon^{(K)}=\varepsilon_1^{(K)}$, то

$$a_{i_0}'(x_0+y_{i_0}^{(K)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(K)}}y_s^{(K)}a_s)=b_{i_0}, \tag{I.6}$$

а если $\varepsilon^{(K)}=\varepsilon_2^{(K)}<\varepsilon_1^{(K)}$, то

$$a_i'(x_0+y_{i_0}^{(K)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(K)}}y_s^{(K)}a_s)<b_{i_0}, \tag{I.7}$$

и множество $S^{(K)}$ содержит меньше элементов, чем $S^{(K-1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По определению базисной пары при $i\in S^{(K-1)}$ имеют место неравенства $y_i^{(K-1)}>0$ и, следовательно, $\varepsilon_2^{(K)}>0$. По (I.5) $\varepsilon_1^{(K)}$ также больше нуля, и нужно лишь показать, что $\varepsilon_1^{(K)}$ и $\varepsilon_2^{(K)}$ в случае совместной системы (I.I) не могут одновременно обращаться в бесконечность, то есть не может быть одновременно

$$a_{i_0}'(a_{i_0}-\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s)=0,$$

$$t_i^{(K-1)}\le 0\quad,\quad i\in S^{(K-1)}.$$

Действительно, первое равенство в силу (I.3) дает

$$(a_{i_0}-\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s)'(a_{i_0}-\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s)=0,$$

то есть $a_{i_0}=\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s$. Если теперь $\tilde{x}$ - некоторое решение системы (I.I), то $a_i'\tilde{x}\ge b_i$, $i\in S^{(K-1)}$, $a_{i_0}'\tilde{x}\ge b_{i_0}$. Отсюда получим:

$$b_{i_0}\le a_{i_0}'\tilde{x}=(\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s)'\tilde{x}=\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}a_s'\tilde{x}\le$$

$$\le\sum_{s\in S^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}b_s.$$

С другой стороны, из (I.5) и определения базисной пары имеем:

$$b_{i_0}>a_{i_0}'(x_0+y_{i_0}^{(K-1)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(K-1)}}y_s^{(K-1)}a_s)=$$

$$=\Big(\sum_{i\in S^{(k-1)}} t_i^{(k-1)} a_i\Big)'\Big(x_0+y_{i_0}^{(k-1)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k-1)}a_s\Big)=$$

$$=\sum_{i\in S^{(k-1)}} t_i^{(k-1)} a_i'\Big(x_0+y_{i_0}^{(k-1)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k-1)}a_s\Big)=\sum_{i\in S^{(k-1)}} t_i^{(k-1)} b_i .$$

Полученное противоречие доказывает пункт а) леммы.

б) Так как $y_{i_0}^{(k-1)}\geqslant 0$ и $\varepsilon^{(k)}>0$, то $y_{i_0}^{(k)}>0$, и нужно лишь показать, что $S^{(k)}$ и $y_i^{(k)}$, $i\in S^{(k)}$, образуют базисную пару для столбца $x_0+y_{i_0}^{(k)}a_{i_0}$. Проверим выполнение условий I)-3) определения.

При $i\in S^{(k-1)}$ имеем:

$$a_i'\Big(x_0+y_{i_0}^{(k)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(k)}} y_s^{(k)}a_s\Big)=a_i'\Big(x_0+y_{i_0}^{(k)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k)}a_s\Big)=$$

$$=a_i'\Big(x_0+y_{i_0}^{(k-1)}a_{i_0}+\sum_{s\in S^{(k-1)}} y_s^{(k-1)}a_s\Big)+\varepsilon^{(k)}a_i'\Big(a_{i_0}-$$

$$-\sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)}a_s\Big)=b_i+\varepsilon^{(k)}\Big(a_i'a_{i_0}-\sum_{s\in S^{(k-1)}}(a_i'a_s)\,t_s^{(k-1)}\Big)=b_i .$$

Так как $S^{(k)}\subset S^{(k-1)}$, то условие I) выполнено. В силу выбора $\varepsilon^{(k)}$ при $i\in S^{(k-1)}$ оказывается $v_i^{(k)}\geqslant 0$, и по способу образования множества $S^{(k)}$ выполнено условие 2). Условие же 3) непосредственно следует из того, что $S^{(k)}\subset S^{(k-1)}$.

Пункт в) формулировки леммы является следствием способа выбора $\varepsilon^{(k)}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. а) *Шаг метода содержит конечное число промежуточных шагов.*

б) *Пара* $\bar S$, $\bar v_i$, $i\in\bar S$, *базисная для столбца* $x_0$.

в) *Число шагов конечно, и если задача разрешима, на последнем шаге получается ее решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из конечности множества $S$ и пункта в) леммы. Выполнение условий I) и 2) определения базисной пары для множества $\bar S$ и набора чисел $\bar y_i$, $i\in\bar S$, следует непосредственно из пунктов б) и в) леммы при $k=p$. Чтобы проверить выполнение условия 3) определения, заметим, что

$$a_{i_0}=\sum_{i\in S^{(p-1)}} t_i^{(p)} a_i + q_p ,$$

причем для невязки $q_p$ в силу (I.3) оказывается: $a_i' q_p = 0$ при $i\in S^{(p-1)}$. Поэтому столбец $a_{i_0}$ не выражается линейно через столбцы $a_i$, $i\in S^{(p-1)}$. Но $S^{(p)}\subset S^{(p-1)}$ и система столбцов $a_i$, $i\in S^{(p)}$, линейно независима. Поэтому линейно независима и система $a_i$, $i\in S^{(p)}\cup\{i_0\}$. Тем самым доказано утверждение б) теоремы.

Пусть теперь ни на одном шаге не обнаружилась несовместность системы ограничений (I.I). Заметим, что шаг оказывается возможным всегда, когда столбец (I.2) не удовлетворяет какому-нибудь ограничению в (I.I). Обозначим для краткости:

$$z^{(k)} = x_0 + y_{i_0}^{(k)} a_{i_0} + \sum_{s\in S^{(k)}} y_s^{(k)} a_s ,$$

$$\bar{x} = z^{(p)}, \quad q_k = a_{i_0} - \sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} a_s .$$

Поскольку $a_s' q_k = 0$ при $s\in S^{(k-1)}$ и $a_{i_0}' q_k = q_k' q_k$, то

$$(z^{(k)}-x_0)'(z^{(k)}-x_0) = (z^{(k-1)}-x_0)'(z^{(k-1)}-x_0) +$$
$$+ 2\varepsilon^{(k)}(z^{(k-1)}-x_0)' q_k + \varepsilon^{(k)2} q_k' q_k =$$
$$= (z^{(k-1)}-x_0)'(z^{(k-1)}-x_0) + \varepsilon^{(k)}(\varepsilon^{(k)} + 2 y_{i_0}^{(k-1)}) q_k' q_k .$$

Применив эти равенства для $k=1,2,\dots,p$, получим

$$(\bar{x}-x_0)'(\bar{x}-x_0) = (x-x_0)'(x-x_0) + \sum_{k=1}^{p} \varepsilon^{(k)}(\varepsilon^{(k)} + 2 y_{i_0}^{(k-1)}) q_k' q_k .$$

Так как $\varepsilon^{(k)}>0$ и $y_{i_0}^{(k-1)}\geqslant 0$ при всех $k$, а $q_p' q_p > 0$, то $(\bar{x}-x_0)'(\bar{x}-x_0) > (x-x_0)'(x-x_0)$. Таким образом, значение минимизируемой функции строго возрастает на каждом шаге, и поскольку оно однозначно определяется базисной парой, то в силу конечности числа базисных пар число шагов в алгорифме также может быть лишь конечным. Так как на последнем шаге получается допустимый вектор (I.2), то, как было отмечено ранее, он является решением задачи. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в системе ограничений (I.I) наряду с неравенствами часть ограничений имеет вид строгих равенств (скажем, при $i\in I_=$ ), то снимается условие неотрицательности на соответствующие $y_i$. В алгорифме это найдет отражение в том, что при выборе $\varepsilon_2^{(k)}$ на индексы $i$, по которым берется минимум, будет наложено ещё условие: $i\in I\setminus I_=$. Кроме того, при

проверке на допустимость очередного вектора (I.2) может встретиться невязка обоих знаков. Дело, однако, сводится к рассмотренному случаю, если соответствующее уравнение в (I.I) при необходимости умножить на $-1$. Если такое изменение исходной информации почему-либо окажется неудобным, можно вместо этого при выборе $\mathcal{E}_2^{(K)}$ условие $t_i^{(K-1)}>0$ заменить на $t_i^{(K-1)}<0$ и оба минимума (при нахождении $\mathcal{E}_2^{(K)}$ и $\mathcal{E}^{(K)}$) заменить на максимумы, поскольку мы будем в этом случае работать с отрицательными $\mathcal{E}$.

## § 2. Вычислительная схема

При реализации метода основную трудность представляет решение системы управлений (I.3), матрицей которой является матрица Грамма системы столбцов $a_i$, $i\in S^{(K-1)}$. При переходе от множества $S^{(K-1)}$ к множеству $S^{(K)}$ в этой матрице Грамма вычеркиваются строки и столбцы, соответствующие номерам из множества $S^{(K-1)}\setminus S^{(K)}$, а при переходе от множества $S^{(P)}$ к $\bar{S}=S^{(P)}\cup\{i_0\}$ добавляются строка и столбец, соответствующие номеру $i_0$. Если хранить на каждом шаге матрицу, обратную к матрице системы (I.3), то необходимые подправки этой обратной матрицы можно делать по известным формулам метода окаймления [2].

Мы, однако, рассмотрим случай, когда среди ограничений системы (I.I) имеются ограничения простейшего вида: заданы границы сверху и снизу для значений отдельных компонент столбца $x$. В соответствии с этим пусть множество индексов $I$ разбито на три непересекающиеся части: $I=I_0\cup I_-\cup I_+$. При $i\in I_-\cup I_+$ столбец $a_i$ имеет лишь одну отличную от нуля компоненту с номером $\tau(i)$, причем при $i\in I_-$ эта компонента равна $-1$, а при $i\in I_+$ равна $+1$. Аналогично разобьются фигурирующие в описании алгорифма множества $S$, $\bar{S}$ и $S^{(K)}$: $S_0=S\cap I_0$, $S_-=S\cap I_-$, $S_+=S\cap I_+$, $\bar{S}_0=\bar{S}\cap I_0$ и т.д. Заметим, что, хотя $\tau(I_-)$ и $\tau(I_+)$ могут иметь непустое пересечение (то-есть компоненты столбца $x$ могут быть ограничены одновременно и сверху и снизу), в силу условия 3) определения базисной пары оказывается, что $\tau(S_-)\cap\tau(S_+)=\tau(\bar{S}_-)\cap\tau(\bar{S}_+)=$ $=\tau(S_-^{(K)})\cap\tau(S_+^{(K)})=\varnothing$. Мы предполагаем, что границы

сверху и снизу для отдельных компонент искомого столбца $x$ непротиворечивы и каждая задана лишь одним ограничением. Поэтому если $i_0 \in I_- \cup I_+$ , то $\tau(i_0)$ не может принадлежать множеству $\tau(S_- \cup S_+)$ . Это будет использовано ниже при построении формул вычислительной системы.

В силу определения коэффициентов $t_s^{(k-1)}$ при всех $i \in S^{(k-1)}$ имеем:

$$a_i'\Big(a_{i_0} - \sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} a_s\Big) = 0 .$$

Так что в столбце

$$\Delta = a_{i_0} - \sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} a_s$$

компоненты с номерами из множества $\tau(S_-^{(k-1)} \cup S_+^{(k-1)})$ равны нулю. Введем в рассмотрение множество $R = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \tau(S_-^{(k-1)} \cup S_+^{(k-1)})$ и обозначим через $\alpha_{ij}$ компоненту столбца $a_i$ с номером $j$ . Учитывая сказанное, знаменатель $\mathcal{D} = a_{i_0}' \Delta$ в (I.4) можно вычислить по формуле:

$$\mathcal{D} = \sum_{j\in R} \alpha_{i_0 j} \Big(\alpha_{i_0 j} - \sum_{s\in S^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} \alpha_{sj}\Big). \tag{2.I}$$

Но поскольку $\alpha_{sj} = 0$ при $j \in R$ и $s \in S_-^{(k-1)} \cup S_+^{(k-1)}$ , то окончательно получим:

$$\mathcal{D} = \sum_{j\in R} \alpha_{i_0 j} \Big(\alpha_{i_0 j} - \sum_{s\in S_0^{(k-1)}} t_s^{(k-1)} \alpha_{sj}\Big). \tag{2.2}$$

Если при всех $k$ положить

$$x^{(k-1)} = \begin{cases} x_0 + y_{i_0}^{(k-1)} a_{i_0} + \sum\limits_{s\in S_0^{(k-1)}} y_s^{(k-1)} a_s , & i \in I_0 , \\ x_0 + \sum\limits_{s\in S_0^{(k-1)}} y_s^{(k-1)} a_s , & i \bar{\in} I_0 , \end{cases} \tag{2.3}$$

то в силу условия I) определения базисной пары $y_i^{(k-1)} = b_i + \xi_{\tau(i)}^{(k-1)}$ при $i \in S_-^{(k-1)}$ и $y_i^{(k-1)} = b_i - \xi_{\tau(i)}^{(k-1)}$ при $i \in S_+^{(k-1)}$ . Здесь нижний индекс при $\xi$ обозначает номер компоненты столбца $x^{(k)}$. Положим

$$M^{(K-1)}=\begin{cases} a_{i_0}-\sum_{s\in S_0^{(K-1)}} t_s^{(K-1)} a_s\ ,\ \ i_0\in I_0\ , \\ -\sum_{s\in S_0^{(K-1)}} t_s^{(K-1)} a_s\ ,\ \ i\bar{\in} I_0 . \end{cases} \tag{2.4}$$

Тогда для столбцов (2.3) получим соотношение:

$$x^{(K)}=x^{(K-1)}+\varepsilon^{(K)}M^{(K-1)}. \tag{2.5}$$

Мы можем, таким образом, не хранить числа $y_s^{(K)}$ при $s\in S_-^{(K)}\cup S_+^{(K)}$, а при необходимости находить их при помощи компонент $x^{(K)}$.

Рассмотрим теперь систему (I.3), которую можно переписать в виде:

$$\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{sj}\Big)t_s^{(K-1)}+\sum_{s\in S_+^{(K-1)}}\alpha_{i,\tau(s)}\,t_s^{(K-1)}-\sum_{s\in S_-^{(K-1)}}\alpha_{i,\tau(s)}\,t_s^{(K-1)}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{i_0j}\ ,\qquad i\in S_0^{(K-1)},$$
$$\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\alpha_{s,\tau(i)}\,t_s^{(K-1)}+t_i^{(K-1)}=\alpha_{i_0,\tau(i)}\qquad ,\quad i\in S_+^{(K-1)},$$
$$-\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\alpha_{s,\tau(i)}\,t_s^{(K-1)}+t_i^{(K-1)}=-\alpha_{i_0,\tau(i)}\qquad ,\quad i\in S_-^{(K-1)}.$$

Выразив часть неизвестных из последних двух групп уравнений и подставив их в первую группу, получим:

$$t_i^{(K-1)}=\begin{cases} \alpha_{i_0,\tau(i)}-\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\alpha_{s,\tau(i)}\,t_s^{(K-1)},\ \ i\in S_+^{(K-1)}, \\ -\alpha_{i_0,\tau(i)}+\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\alpha_{s,\tau(i)}\,t_s^{(K-1)},\ \ i\in S_-^{(K-1)}, \end{cases} \tag{2.6}$$

а также

$$\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\Big(\sum_{j\in R}\alpha_{ij}\,\alpha_{sj}\Big)t_s^{(K-1)}=\sum_{j\in R}\alpha_{ij}\,\alpha_{i_0j}\ ,\ \ i\in S_0^{(K-1)} \tag{2.7}$$

Таким образом, дело сводится к решению лишь системы (2.7) и вычислению остальных неизвестных по формулам (2.6). Заметим, что правые части (2.6) с точностью до знака совпадают с соответствующими компонентами столбца (2.4).

Введем обозначение для элементов матрицы системы (2.7):

$$\beta_{is}=\sum_{j\in R}\alpha_{ij}\,\alpha_{sj}\quad ,\quad i,s\in S_0^{(K-1)};$$

и пусть известна обратная матрица $\Gamma$ с элементами $\gamma_{si}$.

$S, i \in S_0^{(K-1)}$. Мы должны выяснить, как меняется обратная матрица, когда множество $S^{(K-1)}$ увеличивается или уменьшается на один элемент. При этом возникают различные случаи в зависимости от того, какому из множеств $I_0$, $I_-$ или $I_+$ принадлежит этот элемент.

Рассмотрим сначала случай, когда из множества $S^{(K-1)}$ исключается элемент $i'$.

Если $i' \in S_0^{(K-1)}$, то в интересующей нас прямой матрице вычеркиваются соответствующие строка и столбец. Надлежащий пересчет обратной матрицы может быть сделан на основе обратных формул метода окаймления.

Изобразим условно прямую и обратную матрицы следующим образом (они в нашем случае симметричны):

$$B = \begin{pmatrix} \bar{B} & u \\ u' & \beta \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & v \\ v' & \gamma \end{pmatrix}.$$

По определению обратной матрицы $\bar{B}\Gamma_0 + uv' = E$, $\bar{B}v + \gamma u = 0$. Отсюда интересующая нас матрица $\bar{B}^{-1}$ получается по формуле: $\bar{B}^{-1} = \Gamma_0 - \frac{vv'}{\gamma}$. Таким образом, если $S_0^{(K)} = S_0^{(K-1)} \setminus \{i'\}$, а элементы новой обратной матрицы обозначить через $\bar{\gamma}_{si}$, то

$$\bar{\gamma}_{si} = \gamma_{si} - \frac{\gamma_{si'}\gamma_{i'i}}{\gamma_{i'i'}}, \qquad i, s \in S_0^{(K)}. \tag{2.8}$$

Если выбывающий номер $i' \in S_-^{(K-1)} \cup S_+^{(K-1)}$, то порядок матрицы не меняется, а новые значения элементов прямой матрицы получаются по формулам: $\bar{\beta}_{is} = \beta_{is} + \alpha_{i,\tau(i')}\alpha_{s,\tau(i')}$. Поэтому обратная матрица может быть подправлена по методу пополнения [2]:

$$z_s = \sum_{i \in S_0^{(K-1)}} \gamma_{si}\alpha_{i,\tau(i')}, \quad s \in S_0^{(K-1)},$$

$$w = 1 + \sum_{s \in S_0^{(K-1)}} z_s \alpha_{s,\tau(i')}, \tag{2.9}$$

$$\bar{\gamma}_{si} = \gamma_{si} - \frac{z_s z_i}{w}, \qquad s, i \in S_0^{(K)} \left(= S_0^{(K-1)}\right).$$

Отметим, что при исключении $i'$ можно подправить не только обратную матрицу, но и решение системы (2.7). Действительно, в

обоих случаях

$$t_s^{(K-1)}=\sum_{i\in S_0^{(K-1)}} \gamma_{si}\,\beta_{ii_0}\quad,\quad t_s^{(K)}=\sum_{i\in S_0^{(K)}} \bar{\gamma}_{si}\,\bar{\beta}_{ii_0}\,.$$

В первом рассмотренном случае, когда $S_0^{(K)}=S_0^{(K-1)}\setminus\{i'\}$, а $\bar{\beta}_{ii_0}=\beta_{ii_0}$, имеем

$$t_s^{(K)}=\sum_{i\in S_0^{(K)}}\left(\gamma_{si}-\frac{\gamma_{si'}\gamma_{i'i}}{\gamma_{i'i'}}\right)\beta_{ii_0}=t_s^{(K-1)}-\gamma_{si'}\beta_{i'i_0}-\frac{\gamma_{si'}}{\gamma_{i'i'}}\sum_{i\in S_0^{(K)}}\gamma_{i'i}\beta_{ii_0},$$

откуда получим

$$t_s^{(K)}=t_s^{(K-1)}-\frac{t_{i'}^{(K-1)}}{\gamma_{i'i'}}\gamma_{si'}. \tag{2.10}$$

Во втором рассмотренном случае $S_0^{(K)}=S_0^{(K-1)}$, но $\bar{\beta}_{ii_0}=$
$=\beta_{ii_0}+\alpha_{i,\tau(i')}\,\alpha_{i_0,\tau(i')}$.
Поэтому

$$t_s^{(K)}=\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}\left(\gamma_{si}-\frac{z_s z_i}{w}\right)\left(\beta_{ii_0}+\alpha_{i,\tau(i')}\,\alpha_{i_0,\tau(i')}\right)=$$

$$=t_s^{(K-1)}+z_s\,\alpha_{i_0,\tau(i')}-\frac{z_s}{w}\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}z_i\beta_{ii_0}-\frac{z_s}{w}\alpha_{i_0,\tau(i')}(w-1)=$$

$$=t_s^{(K-1)}+\frac{z_s}{w}\left(\alpha_{i_0,\tau(i')}-\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}z_i\beta_{ii_0}\right).$$

Преобразуем несколько второе слагаемое.

$$\alpha_{i_0,\tau(i')}-\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}z_i\beta_{ii_0}=\alpha_{i_0,\tau(i')}-\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}\left(\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\gamma_{is}\,\alpha_{s,\tau(i')}\right)\beta_{ii_0}=$$

$$=\alpha_{i_0,\tau(i')}-\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}\left(\sum_{i\in S_0^{(K-1)}}\gamma_{is}\,\beta_{ii_0}\right)\alpha_{s,\tau(i')}=\alpha_{i_0,\tau(i')}-\sum_{s\in S_0^{(K-1)}}t_s^{(K-1)}\alpha_{s,\tau(i')}.$$

Таким образом, вычисленная величина совпадает с компонентой столбца $M^{(K-1)}$ с номером $\tau(i')$. Если эту компоненту обозначить через $M_{\tau(i')}^{(K-1)}$, то окончательно получим при $i'\in S_-^{(K-1)}\cup S_+^{(K-1)}$

$$t_s^{(K)}=t_s^{(K-1)}+\frac{z_s\,M_{\tau(i')}^{(K-1)}}{w}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в множестве $S^{(P)}$ добавляется номер $i_0$.

Если $i_0\in I_0$ и, следовательно, $\bar{S}_0=S_0^{(P)}\cup\{i_0\}$, то матрица $B$ системы (2.7) приобретает дополнительные строку и столбец. Условно ситуацию можно изобразить графически так :

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} B & u \\ u' & \beta_{i_0 i_0}\end{pmatrix}, \qquad \overline{\Gamma}=\begin{pmatrix} \overline{\Gamma}_0 & v \\ v' & \overline{\gamma}_{i_0 i_0}\end{pmatrix},$$

причем элементами столбца и являются правые части системы (2.7), а элементами $\overline{\Gamma}_0$ и $v$ - соответствующие элементы искомой обратной матрицы $\overline{\Gamma}$. По определению обратной матрицы

$$B\overline{\Gamma}_0 + u v' = E, \qquad B v + \overline{\gamma}_{i_0 i_0} u = 0,$$

$$u'\overline{\Gamma}_0 + \beta_{i_0 i_0} v' = 0, \qquad u' v + \beta_{i_0 i_0}\overline{\gamma}_{i_0 i_0} = 1.$$

Отсюда находим, что $v = -\overline{\gamma}_{i_0 i_0} B^{-1} u$ и $\overline{\gamma}_{i_0 i_0}(\beta_{i_0 i_0} - u' B^{-1} u) = 1$. Но, как нетрудно заметить из (2.I), $\beta_{i_0 i_0} - u' B^{-1} u = \mathcal{D}$. Таким образом,

$$\overline{\gamma}_{i_0 i_0} = \frac{1}{\mathcal{D}}, \quad \overline{\gamma}_{i i_0'} = \overline{\gamma}_{i_0 i} = -t_i^{(p-1)}/\mathcal{D}, \quad i \in S_0^{(p-1)}. \tag{2.I2}$$

Далее, находим $\overline{\Gamma}_0 = B^{-1} - B^{-1} u v'$, или

$$\overline{\gamma}_{si} = \gamma_{si} + \frac{t_s^{(p-1)} t_i^{(p-1)}}{\mathcal{D}}, \quad s, i \in S_0^{(p-1)}. \tag{2.I3}$$

Если же $i_0 \bar{\in} I_0$, то новые элементы прямой матрицы получаются по формулам: $\bar{\beta}_{is} = \beta_{is} - \alpha_{i,\tau(i_0)} \alpha_{s,\tau(i_0)}$, а порядок матрицы остается неизменным. Поэтому новую обратную матрицу можно снова получить по методу пополнения:

$$h_s = \sum_{i \in S_0^{(p-1)}} \gamma_{si} \alpha_{i,\tau(i_0)}, \quad s \in S_0^{(p-1)},$$

$$\tau = 1 - \sum_{s \in S_0^{(p-1)}} h_s \alpha_{s,\tau(i_0)},$$

$$\overline{\gamma}_{si} = \gamma_{si} + \frac{h_s h_i}{\tau}, \quad s, i \in \overline{S}_0 (= S_0^{(p)}).$$

Если учесть, что при $i \in I_0$ правая часть системы (2.7) с точностью до знака совпадает с соответствующими коэффициентами $\alpha_{i,\tau(i_0)}$, то получим, что

$$h_s = \begin{cases} t_s^{(p-1)}, & i_0 \in I_+, \\ -t_s^{(p-1)}, & i_0 \in I_-. \end{cases}$$

Поэтому из (2.2) находим, что $\tau = \mathcal{D}$, и для элементов новой

обратной матрицы снова получаем формулу (2.13).

Мы получили, таким образом, следующую вычислительную схему метода. К началу очередного шага имеются множества $S_0, S_-, S_+$, числа $y_s$, $s \in S_0$, и столбец $\tilde{x} = x_0 + \sum_{s \in S_0} y_s a_s$, компоненты которого мы обозначим через $\xi_j$. Имеется также матрица $\Gamma$, обратная к матрице с элементами

$$\beta_{is} = \sum_{j \in R} \alpha_{ij} \alpha_{sj}, \quad i, s \in S_0.$$

При этом предполагается, что

а) $\xi_{\tau(i)} < b_i$, $i \in S_+$,

б) $\xi_{\tau(i)} > -b_i$, $i \in S_-$,

в) $\sum_{j \in R} \alpha_{ij} \xi_j + \sum_{s \in S_+} \alpha_{i,\tau(s)} b_s - \sum_{s \in S_-} \alpha_{i,\tau(s)} b_s = b_i$, $i \in S_0$.

Кроме того, числа $y_s$, $s \in S_0$, должны быть положительными (смотри замечание в конце первого параграфа).

Проверяем выполнение условий (I.I). Если оказалось

$$\sum_{j \in R} \alpha_{i_0 j} \xi_j + \sum_{s \in S_+} \alpha_{i_0,\tau(s)} b_s - \sum_{s \in S_-} \alpha_{i_0,\tau(s)} b_s < b_{i_0},$$

то начинаем шаг. Для этого вычисляем правые части системы (2.7) ( $K=1$, $S^{(0)} = S$ ) и, пользуясь матрицей $\Gamma$, находим неизвестные $t_s^{(0)}$, $s \in S_0^{(0)}$. Затем полагаем $x^{(0)} = \tilde{x}$, $y_i^{(0)} = 0$ и переходим к выполнению промежуточных шагов.

Промежуточный шаг с номером $K$ состоит в следующем. Вычисляем столбец $M^{(K-1)}$ по формуле (2.4), находим $\mathcal{D}$ по формуле (2.2) или, что то же, по формуле:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \sum_{j \in R} \alpha_{i_0 j} M_j^{(K-1)}, & i_0 \in I_0, \\ 1 + \sum_{j \in R} \alpha_{i_0 j} M_j^{(K-1)}, & i_0 \bar{\in} I_0, \end{cases}$$

и определяем $\varepsilon^{(K)}$ и $i'$ (если обращаются в ноль несколько $y_s^{(K)}$, то, как это обычно делается, они исключаются за несколько промежуточных шагов). При этом нужно вспомнить, что

$$y_i^{(K-1)} = b_i - \xi_{\tau(i)}^{(K-1)}, \quad t_i^{(K-1)} = M_{\tau(i)}^{(K-1)}, \quad i \in S_+^{(K-1)},$$

$$y_i^{(k-1)}=b_i+\xi_{\tau(i)}^{(k-1)}, \quad t_i^{(k-1)}=-M_{\tau(i)}^{(k-1)}, \quad i\in S_-^{(k-1)}.$$

После нахождения $\varepsilon^{(k)}$ и $i'$ нужно по формуле (2.5) вычислить столбец $x^{(k)}$ и подправить обратную матрицу и решение системы (2.7). Для этого нужно воспользоваться формулами (2.8) и (2.10) при $i'\in S_0^{(k-1)}$ и формулами (2.9) и (2.II) при $i'\bar{\in} S_0^{(k-1)}$. Затем, если нужно, перейти к следующему промежуточному шагу. Когда промежуточные шаги завершены, перед переходом к следующему шагу нужно подправить обратную матрицу по формулам (2.12) и (2.13) при $i_0\in I_0$ и по формулам (I.13), если $i_0\bar{\in} I_0$.

## Литература


I. Булавский В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования, Автореферат диссертации, Новосибирск, 1962.

2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз., М., 1960.



Поступила в редакцию
16.XI. 1971 г.