УДК 513.88

О ДВОЙСТВЕННЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

С.С. Кутателадзе

0^0. Настоящая работа содержит обсуждение и изложение ряда вопросов, связанных с изучением двойственных способов задания H -выпуклых функций [1], [2].

1^0. Напомним, прежде всего, некоторые определения.

Пусть Y – полная решетка с наименьшим элементом $-\infty$, а H – некоторое подмножество Y, причем такое, что элемент $-\infty$ не входит в H. Для элемента $y \in Y$ определим множество опорных $\mathcal{U}_y \triangleq \{h \in H : h \leq y\}$ (знак $\triangleq$ означает "по определению"). Элемент y из Y называется выпуклым относительно множества H (или H -выпуклым), если справедливо представление $y = \sup \mathcal{U}_y$. Через $P(H,Y)$ обозначают совокупность всех элементов множества Y, выпуклых относительно множества H. Совокупность всех H -выпуклых множеств, т.е. множеств, опорных к некоторым H -выпуклым элементам, обозначается через $W(H,Y)$. В дальнейшем считается, что $W(H,Y)$ наделено упорядоченностью по включению, а в $P(H,Y)$ структура порядка индуцирована из Y. Отображение $\varphi : P(H,Y) \to W(H,Y)$, действующее по формуле $\varphi : p \mapsto \mathcal{U}_p$, называется двойственностью Минковского и является изоморфизмом упорядоченных множеств $P(H,Y)$ и $W(H,Y)$. Как правило, в решетке Y выделяют некоторое подмножество X такое, что $H \subset X$, и рассматривают следующие множества

$$P(H,X,Y) \triangleq P(H,Y) \cap X ;$$

$$W(H,X,Y) \triangleq \varphi(P(H,X,Y)).$$

2°. Приведем несколько новых примеров H -выпуклых элементов. Необходимость этого объясняется, в частности, тем, что частные случаи двойственности Минковского и соответствующие теоремы двойственности систематически переоткрываются. Отметим, в частности, недавние работы [3], [4].

Пусть Q – компактное пространство, а H – конфинальный $C(Q)$ конус (= выпуклый конус) в $C(Q)$, где $C(Q)$ – пространство непрерывных на Q функций (используются также термины минорирующий или минорантный конус). Функция $f \in C(Q)$ называется выпуклой относительно конуса H в смысле Бобока–Корнеа [5], если для каждой точки $z \in Q$ и любой положительной меры μ такой, что $\mu(h) \geq h(z)$ для всех $h \in H$, следует, что $\mu(f) \geq f(z)$. Ниже мы установим, что функция f является выпуклой относительно конуса H в смысле Бобока-Корнеа в том и только том случае, если $f \in P(H, C(Q), \bar{R}^Q)$, где $\bar{R}$ – расширенная числовая прямая.

Следующий пример основан на понятии выпуклости относительно системы Чебышева. Это понятие восходит к Линделефу и Фрагмену (см. [6], [7], [8], а также соответствующие главы в [9], [10]).

Пусть u_0, u_1–расширенная полная система Чебышева на промежутке $[a,b]$ (см. [9], стр. 274). Функция $f \in C([a,b])$, определенная на $[a,b]$, называется выпуклой относительно (u_0, u_1), если

$$\begin{vmatrix} u_0(x_1) & u_0(x_2) & u_0(x_3) \\ u_1(x_1) & u_1(x_2) & u_1(x_3) \\ u_2(x_1) & u_2(x_2) & u_2(x_3) \end{vmatrix} \geq 0 \quad (a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b)$$

Нетрудно проверить, что элементы, выпуклые относительно подпространства H, натянутого на u_0, u_1, являются выпуклыми и в приведенном смысле. С другой стороны, как показано в [11], функции, являющиеся (u_0, u_1)-выпуклыми, выпуклы в смысле Бобока-Корнеа.

Пусть X – некоторое пространство Канторовича (= K -пространство) с единицей. Через K обозначим конус положительных элементов X, а через H коническую оболочку множества единичных элементов. Имеет место теорема Вулиха об аппроксимации ([12], стр. 97) – каждый положительный элемент X является

H -выпуклым, т.е. $K = P(H, X)$.

. Пусть теперь G – ограниченная область в R^n с компактной границей ∂G и H_G – пространство гармонических ограниченных функций в G. Так как H_G является нормальным подпространством пространства Канторовича, состоящего из функций, представимых в виде разности положительных гармонических функций (см. [13], стр. 36), то H_G – пространство Канторовича. Через Y обозначим полную решетку, получающуюся добавлением к H_G наибольшего и наименьшего элементов. Через $HC_{\bar G}$ обозначим подпространство H_G, состоящее из функций, являющихся решениями задачи Дирихле для непрерывных функций на ∂G. Можно показать, что для произвольной функции $f \in C(\partial G)$ отвечающее ей решение обобщенной задачи Дирихле является $HC_{\bar G}$ -выпуклым элементом, т.е. входит в $P(HC_{\bar G}, H_G, Y)$.

В заключении этого пункта остановимся на описании выпуклых множеств. Способ сведения исследования выпуклых множеств к исследованию сублинейных функционалов общеизвестен (см., в частности, [1], [2]). Возникает вопрос, нельзя ли извлечь новую информацию о выпуклых множествах, используя в качестве оценивающих объектов некоторые операторы, а не функционалы, как это обычно делается. Наиболее естественным классом такого сорта следует считать класс операторов с абстрактной нормой – аналогов ограниченных функционалов. Оказывается, что, вообще говоря, извлечь новую информацию таким способом нельзя. Вложим точный смысл в эту фразу.

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ – рефлексивное банахово пространство, $W_s(V)$ – совокупность выпуклых, ограниченных, содержащих нуль, замкнутых подмножеств V. Пусть Y некоторое пространство Канторовича и $H_{\ell_0}(V, Y)$ – класс всех операторов из V в Y, обладающих абстрактной нормой $|\cdot|$. Для $\mathcal{U} \in W_s(V)$ положим $P_{\mathcal{U}}(T) \triangleq \sup\{Tx : x \in \mathcal{U}\}$, где $T \in H_{\ell_0}(V, Y)$. Заметим, что оператор $P_{\mathcal{U}} : T \mapsto P_{\mathcal{U}}(T)$ является положительно однородным, субаддитивным, положительным и, кроме того, таким, что $P_{\mathcal{U}}(T) \leq c|T|$ для всех $T \in H_{\ell_0}(V, Y)$ при некотором $c > 0$. Пусть $sub_{\ell_0}(V, Y)$ – множество всех отображений V в Y, обладающих указанными свойствами. Для каждого $P \in sub_{\ell_0}(V, Y)$ положим

$$\mathcal{U}_P \triangleq \bigcap_{T \in H_{\ell_0}(V, Y)} \{x \in V : Tx \leq P(T)\}.$$

Ясно, что $\mathcal{U}_p \in W_s(V)$. Заметим, что $\mathcal{U}_{p_\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. В самом деле, $\mathcal{U} < \mathcal{U}_{p_\mathcal{U}}$. Если $z \in \mathcal{U}_{p_\mathcal{U}}$ и $z \notin \mathcal{U}$, то найдется функционал $f \in V'$ такой, что $f(z) > \sup f(\mathcal{U})$. Пусть $T \triangleq f \cdot y$, где $y \in Y$, $y > 0$. Тогда, очевидно, $Tz > \sup T(\mathcal{U}) = P_\mathcal{U}(T)$. Кроме того, поскольку $z \in \mathcal{U}_{p_\mathcal{U}}$, то $Tz \le P_\mathcal{U}(T)$. Получили противоречие.

Теперь уже нетрудно показать, что отображения $\mathcal{U} \mapsto P_\mathcal{U}$ и $P \mapsto \mathcal{U}_p$, т.е. аналоги двойственности Минковского, являются взаимнообратными биекциями. С другой стороны, для описания элементов $W_s(V)$ вполне достаточно рассмотреть непрерывные положительные сублинейные функционалы, определенные на V'.

3^0. Напомним, что центральным приемом двойственного описания выпуклых элементов является теорема декомпозиции из [I]. Эта теорема доказывается в следующей ситуации. Рассматривается решетка Канторовича (= K -линеал) X, являющаяся одновременно локально выпуклым пространством, и $H_1, \ldots, H_n$ - замкнутые конусы в X. При этом предполагается, что выполнены следующие условия: (а) конический отрезок $\{g \in X' : 0 \le g \le f\}$ является слабо компактным для любого положительного функционала $f \in X'$; (б) для каждого функционала $f > 0$ и элементов $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H_n$ найдется разбиение $\{f_1, \ldots, f_n\}$ функционала такое, что $\sum_{k=1}^{n} f_k(h_k) = f(h_1 \vee \ldots \vee h_n)$. Здесь и ниже под разбиением положительного оператора мы понимаем набор положительных операторов, сумма которых совпадает с исходным.

При применении теоремы декомпозиции следует иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, условие (а) выполняется в локально выпуклых решетках Канторовича, а, во-вторых, условие (б) выполнено в пространствах, "с функционалами типа меры", в частности, в пространстве функций непрерывных и определенных на локально компактном пространстве (с топологией компактной сходимости), а также в достаточно широких пространствах функций, наделенных топологией простой сходимости (см. [I4]).

Приведем несколько примеров применения теоремы декомпозиции.

Пусть P_+ - конус положительных выпуклых функций на локальном компакте Q. Из теоремы декомпозиции и сделанных замечаний следует разрешимость следующей задачи декомпозиции (ср. [I5]).

Пусть $\mu, \nu_1, \ldots, \nu_n$ - положительные меры с компактными носителями, причем

$$\int_Q f\,d\mu \geq \sum_{k=1}^{n}\int_Q f\,d\nu_k$$

для любой положительной выпуклой функции f. Найти разбиение $\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$ меры μ такое, что

$$\int_Q f\,d\mu_k \geq \int_Q f\,d\nu_k .$$

Из аналогичных соображений следует разрешимость задачи декомпозиции меры более диффузной (более сильной в упорядоченности Шоке [16]), чем сумма положительных мер, в сумму слагаемых, каждое из которых более диффузно соответствующего слагаемого из данной суммы.

Следующий пример рассмотрен без привлечения понятия декомпозиции в [17].

Пусть H – замкнутый конус в $C(Q)$, являющийся решеткой. Тогда каждую точку $z\in C(Q)\setminus H$ можно отделить от H мерой вида $\alpha\varepsilon_x-\beta\varepsilon_y$, где $\alpha,\beta\in R_+$, а $x,y\in Q$ (здесь и ниже $\varepsilon_z: f\mapsto f(z)$ – мера Дирака).

Нетрудно видеть, что дискретные меры (под дискретной мерой мы понимаем меру с конечным носителем) плотны в двойственном конусе H^*. Таким образом, достаточно показать, что мера вида $\mu \triangleq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\sum_{s=1}^{m}\beta_s\varepsilon_{y_s}$ из H^* представима в виде суммы мер вида $\bar\mu \triangleq \alpha\varepsilon_x-\beta\varepsilon_y$, где $\bar\mu\in H^*$.

Поскольку H является верхней решеткой, то найдутся числа $\gamma_s^k\geq 0$; $\sum_{s=1}^{m}\gamma_s^k=1$ такие, что $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^s\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\beta_s\varepsilon_{y_s}\in H^*$. Поскольку H является нижней решеткой, то $-H$ является верхней решеткой, т.е. найдутся числа $\delta_s^k\geq 0$, $\sum_{k=1}^{n}\delta_s^k=1$ такие, что $\gamma_k^s\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\delta_s^k\varepsilon_{y_k}\in H^*$ $(k=1,\ldots,n;\ s=1,\ldots,m)$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}(\gamma_k^s\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\delta_s^k\varepsilon_{y_s})=\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\sum_{s=1}^{m}\delta_s^k\varepsilon_{y_s}\Big)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\delta_s^k\varepsilon_{y_s}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\sum_{s=1}^{m}\beta_s\varepsilon_{y_s}.$$

В заключение этого пункта рассмотрим некоторые задачи декомпозиции в пространстве выпуклых множеств.

Прежде всего, не вдаваясь в технические детали, отметим, что из известных результатов Шепарда, приведенных, например,

в XV главе монографии [18], следует ряд важных контрпримеров, основанных на том, что компактные основания конуса W_n/R^n (где $W_n \triangleq (R^n, C(R^n), \bar{R}^{R^n})$ совпадают со своей шиловской границей. Это означает, в частности, что при характеризации большинства интересных классов выпуклых множеств даже для дискретных мер невозможно ограничиться декомпозицией в сумму заранее определенного числа слагаемых.

Приведем только одну теорему декомпозиции, появление которой связано с пробелом в теореме 2 из [19].

ТЕОРЕМА I. Пусть H — замкнутый конус, элементами которого служат шары Минковского в R^n, причем для всякого ненулевого y из R^n множество $S_y \triangleq \bigwedge_{\substack{S_0 \in H \\ S_0 \neq \{0\}}} S_0/S_0(y)$ телесно. Тогда пинскеровская оболочка $\mathcal{T}(H)$ множества H замкнута относительно операции пересечения $\wedge$, причем ненулевое множество S из конуса выпуклых компактов W_n входит в $\mathcal{T}(H)$ в том и только том случае, если

$$S = \bigwedge_{x \neq 0} S(x) \bigvee_{S_0 \in H} \frac{S_0}{S_0(x)} \qquad \text{(I)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что каждый элемент $S \in \mathcal{T}(H)$ допускает представление (I). Пусть S представлено в виде (I) и $\sum_{k=1}^{n} S_0(x_k) \geqslant S_0(y)$ для всех $S_0 \in H$. В силу теоремы декомпозиции, следует показать, что $\sum_{k=1}^{p} S(x_k) \geqslant S(y)$. Поскольку конус H замкнут относительно операции $\wedge$ и S_y — телесное множество, то по теореме I из [19] найдутся векторы $z_1, \ldots, z_p$, такие что $\sum_{k=1}^{p} z_p = y$ и $S_0(x_k) \geqslant S_0(z_k)$ для всех S_0 из H. Поскольку S допускает представление (I), то $S(x_k) \geqslant S(z_k)$, следовательно, $\sum_{k=1}^{p} S(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{p} S(z_k) \geqslant S(\sum_{k=1}^{p} z_k) = S(y)$. Итак, $S \in \mathcal{T}(H)$.

Докажем теперь, что $\mathcal{T}(H)$ замкнуто относительно $\wedge$.

Пусть $S_1, S_2 \in \mathcal{T}(H)$. По указанному выше $S \in \mathcal{T}(H)$, если и

только если $S(x) \geqslant S(y)$ для всех x, y таких, что $S_0(x) \geqslant S_0(y)$ для всех $S_0 \in H$. Рассмотрим $(S_1 \wedge S_2)(x)$. Нетрудно показать, что найдутся векторы $x_1, \ldots, x_p$ такие, что $\sum_{k=1}^{p} x_k = x$ и, кроме того, $(S_1 \wedge S_2)(x) = \sum_{k=1}^{t} S_1(x_k) + \sum_{k=t+1}^{p} S_2(x_k)$.

Для всякого S_0 из H имеем

$$\sum_{k=1}^{p} S_0(x_k) \geqslant S_0\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\Big) = S_0(x) \geqslant S_0(y).$$

Следовательно, найдутся $z_1, \ldots, z_p$ из R^n такие, что $\sum_{k=1}^{p} z_k = y$ и, кроме того, $S_0(x_k) \geqslant S_0(z_k)$ для S_0 из H и $k = 1, \ldots, p$. Имеем $S_1(x_k) \geqslant S_1(z_k)$ и $S_2(x_k) \geqslant S_2(z_k)$, следовательно,

$$(S_1 \wedge S_2)(x) = \sum_{k=1}^{t} S_1(x_k) + \sum_{k=t+1}^{p} S_2(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{t} S_1(z_k) + \sum_{k=t+1}^{p} S_2(z_k) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{p} (S_1 \wedge S_2)(z_k) \geqslant (S_1 \wedge S_2)\Big(\sum_{k=1}^{p} z_k\Big) = (S_1 \wedge S_2)(y).$$

Таким образом, $S_1 \wedge S_2$ входит в $\mathcal{T}(H)$. Теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть S_1, S_2 – шары Минковского из W_n, а $Q(S_1, S_2)$ – наименьший замкнутый конус в W_n, содержащий S_1 и S_2 и замкнутый относительно операции $\wedge$. Тогда наименьшей замкнутой подрешеткой $M(S_1, S_2)$ в W_n, содержащей S_1 и S_2, является множество $\mathcal{T}(Q(S_1, S_2))$. При этом ненулевое S входит в $M(S_1, S_2)$ в том и только том случае, если

$$S = \bigwedge_{x \neq 0} S(x) \bigvee_{S_0 \in Q(S_1, S_2)} \frac{S_0}{S_0(x)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что множество $S_y = \bigwedge_{S_0 \in M(S_1, S_2), S_0 \neq \{0\}} S_0 / S_0(y)$ телесно для всякого y, не равного нулю. Это рассуждение, фактически, приведено в [19].

4°. Перейдем теперь к операторному принципу сохранения неравенств.

Прежде всего, отметим, что из теоремы декомпозиции немед-

ленно вытекает, например, следующий факт: если H и $P(H, C(Q), \bar{R}^a)$ — замкнутые конусы в $C(Q)$, то функция $f \in C(Q)$ является H-выпуклой в том и только том случае, если для всякого оператора $T \in \mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$ и оператора $T' \in \mathcal{D}pz(T,H)$ имеет место неравенство $T'f \geq Tf$ (относительно использованных обозначений см. [20]).

В связи с этим утверждением представляет интерес сузить множество операторов, декомпозиционные ростки которых определяют выпуклость.

Обратимся к следующей ситуации. Пусть X — векторное подпространство пространства Канторовича Y и H — конус в X. Через $\bar{Y}$ обозначим полную решетку, получающуюся добавлением к Y наибольшего и наименьшего элементов.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть конус H конфинален X. Элемент $x \in X$ является H-выпуклым (т.е. входит в $P(H, X, \bar{Y})$) в том и только том случае, если $Tx \geq x$ для любого оператора T из положительного ростка оператора $E: X \mapsto Y$ (тождественного вложения X в Y) на конусе H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T \in Spz(E,H)$ и элемент x является H-выпуклым. Тогда для всякого h из $\mathcal{U}_x$ имеем $Tx \geq Th \geq h$. Следовательно, $Tx \geq \sup \mathcal{U}_x = x$.

Пусть теперь $Tx \geq x$ для всех $T \in Spz(E,H)$. Рассмотрим оператор замыкания

$$co_H : z \mapsto \sup_{h \leq z,\ h \in H} h .$$

Поскольку конус H конфинален X, то co_H действует в Y, при этом $co_H(z) \leq z$ для всех $z \in X$. Оператор $-co_H$ положительно однороден и субаддитивен, следовательно, имеет место представление: $(-co_H)(z) = \sup_{A \leq -co_H} Az$ для всех $z \in X$. Пусть $Az \leq (-co_H)(z)$ для всех $z \in X$. Если $z \geq 0$, то $co_H(z) \geq 0$ и $Az \leq 0$, следовательно, $-A \in \mathcal{L}^+(X,Y)$. Если $h \in H$, то $Ah \leq (-co_H)(h) = -h$. Итак, $-A \in Spz(E,H)$. Значит, $-Ax \geq x$, и потому $-co_H(x) = \sup_{A \leq -co_H} Ax \leq \sup_{A \leq co_H}(-x) = -x$, т.е. $co_H(x) \geq x$.

Таким образом, $co_H(x) = x$. Последнее как раз и означает, что

$x \in P(H, X, \overline{Y})$.

В качестве одного из следствий операторного принципа сохранений неравенств получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть H — конус в $C(Q)$, конфинальный $C(Q)$. Непрерывная функция f является выпуклой относительно конуса H в смысле Бобока-Корнеа в том и только том случае, если f допускает представление

$$f(x) = \sup_{h \leq f,\, h \in H} h(x) \qquad (x \in Q). \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f \in P(H, C(Q), \bar{R}^a)$ и μ положительная мера такая, что $\mu(h) \geq h(x)$ для всех $h \in H$, где x — некоторая точка Q. Поскольку, очевидно, мера μ больше ε_x в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H, то f выпукла в смысле Бобока-Корнеа.

Пусть, наоборот, известно, что f является выпуклой в смысле Бобока-Корнеа, а $T \in Spr(E, H)$, где E — тождественное вложение $C(Q)$ в $B(Q)$. Пусть T_x — мера Радона, определенная соотношением $T_x : f \mapsto Tf(x)$. Ясно, что $T_x \geq 0$ и, кроме того, $T_x(h) \geq h(x)$ для всех $h \in H$. Следовательно, $T_x(f) \geq f(x)$. Поскольку последнее неравенство имеет место при всех $x \in Q$, то $Tf \geq f$. По предыдущей теореме отсюда следует, что $f \in P(H, C(Q), \overline{B(Q)})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Говорят, что функция $f \in C(Q)$ выпукла относительно H в точке $x \in Q$, если в этой точке имеет место представление (2). Попутно мы установили, фактически,

ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ. Функция $f \in C(Q)$ выпукла относительно конуса H в точке $x \in Q$, где H конфинален $C(Q)$, в том и только том случае, если для любой положительной меры μ такой, что $\mu(h) \geq h(x) (h \in H)$, выполняется неравенство $\mu(f) \geq f(x)$.

Принцип сохранения неравенств восходит к Кейдисону (см. [21], где отмечено эквивалентное свойство крайних точек).

5^0. Выше мы видели, что свойства выпуклости связаны с некоторыми операторами (функционалами). В частности, если X — векторное подпространство пространства Канторовича Y и H — конфинальный X конус в X, то $Spr(E,H)=Spr(E,P(H,X,\overline{Y}))$, где E — тождественное вложение X в Y. Представляет интерес (в частности, в связи с теорией генераторов) описать все такие операторы.

Точнее, пусть Z — некоторая решетка Канторовича, X — пространство Крейна (= упорядоченное векторное пространство). Оператор $T\in\mathcal{L}^+(X,Z)$ называется сохраняющим неравенства выпуклости относительно конуса H в X, если

$$Spr(T,H)=Spr(T,P(H,X,\overline{Y})).$$

Заметим, прежде всего, что $Spr(T,P(H,X,\overline{Y}))\subset Spr(T,H)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть конус H конфинален X и T — оператор из $\mathcal{L}^+(X,Z)$. Оператор T сохраняет неравенства выпуклости относительно конуса H в том и только том случае, если для любого H-выпуклого элемента x имеет место представление

$$Tx=\sup_{h\leq x,\, h\in H} Th \tag{2}$$

<u>Достаточность</u>. Пусть имеет место представление (2) и $T'\in Spr(T,H)$. Следует показать, что $T'\in Spr(T,P(H,X,\overline{Y}))$. Возьмем $x\in P(H,X,\overline{Y})$. Тогда имеем

$$T'x\geq\sup_{h\in\mathcal{U}_x}T'h\geq\sup_{h\in\mathcal{U}_x}Th=Tx.$$

<u>Необходимость</u>. Допустим, что для $x_0\in P(H,X,\overline{Y})$ имеет место неравенство $Tx_0>\sup_{h\in\mathcal{U}_{x_0}}Th$. Для оператора замыкания $q:x\longmapsto\sup(T(\mathcal{U}_x))$, который является положительно однородным и супераддитивным, найдется, очевидно, оператор $A:X\to Z$ такой, что $Ax\geq q(x)$ для всех $x\in X$ и, кроме того, $Ax_0=q(x_0)$. Если $x\geq 0$, то $Ax\geq q(x)\geq 0$, т.е. $A\in\mathcal{L}^+(X,Z)$. При этом для $h\in H$ имеем $Ah\geq q(h)=Th$. Таким образом, $A\in Spr(T,H)$ и, следовательно, $A\in Spr(T,P(H,X,\overline{Y}))$, т.е., в частности,

$Ax_0 \geqslant Tx_0$. С другой стороны, $Ax_0 = q(x_0) < Tx_0$. Получили противоречие, завершающее доказательство.

В частности, если конус H конфинален пространству $C(Q)$, где Q – локально компактное пространство, то мера μ сохраняет неравенства выпуклости относительно конуса H в том и только том случае, если для любой функции $f \in P(H, C(Q), \bar{R}^a)$ имеет место представление

$$\mu(f) = \sup_{h \leqslant f,\ h \in H} \mu(h) . \tag{3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Освободиться от условия минорантности можно с помощью приема, предложенного в [22].

Пусть H – снова конус в $C(Q)$. Через $I_n(H)$ обозначим множество мер, сохраняющих неравенства выпуклости относительно конуса H, а через $\Phi(H)$ – совокупность отображений $\varphi : Q \to I_n(H)$, порождающих по формуле $(T_\varphi f)(x) \triangleq \varphi(x)(f)$ операторы, действующие в $B(Q)$. Справедливо простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор $T \in \mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$ сохраняет неравенства в том и только том случае, если T имеет вид T_φ для некоторого $\varphi \in \Phi(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $T = T_\varphi$ и $T' \in Spr(T, H)$. Пусть $T'_x : f \longmapsto T'f(x)$. Тогда $T'_x \in Spr(\varphi(x), H)$, т. е. $T'_x \in Spr(\varphi(x), P(H, C(Q), \bar{R}^a))$. Таким образом, для H-выпуклой функции f имеем: $T'f(x) = T'_x(f) \geqslant \varphi(x)(f) = (T_\varphi f)(x)$. Аналогичным способом проверяется и вторая часть утверждения.

Приведем два примера.

Пусть Q – выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве V и $A(Q)$–подпространство в $C(Q)$, состоящее из непрерывных аффинных функций. Опишем операторы $T \in \mathcal{L}^+(C(Q), B(Q))$, сохраняющие неравенства H-выпуклости (т.е. обычной выпуклости). Прежде всего, опишем $I_n(A(Q))$.

Пусть $\mu \in I_n(A(Q))$ и $\mu \neq 0$. Через x_μ обозначим барицентр меры $\mu(\mu(\mathbb{1}))$, т.е. $\mu(h) = \mu(\mathbb{1})\varepsilon_{x_\mu}(h)$ $(h \in H)$. Так как $\mu(\mathbb{1})\varepsilon_{x_\mu} \in Spr(\mu, A(Q))$, то $\mu(\mathbb{1})\varepsilon_{x_\mu}$ входит в $P(A(Q), C(Q), \bar{R}^a)$. Итак, $\mu(\mathbb{1})f(x_\mu) \geqslant \mu(f) \geqslant \mu(\mathbb{1})f(x_\mu)$. Таким образом, $\mu(f) = \mu(\mathbb{1})\varepsilon_{x_\mu}(f)$ для любой непрерывной выпуклой функции, т.е. $\mu = \mu(\mathbb{1})\varepsilon_{x_\mu}$. Очевидно, с другой стороны,

что мера $\alpha\varepsilon_x$, где $\alpha>0$, $x\in Q$, сохраняет неравенства выпуклости.

Таким образом, $I_n(A(Q))=\{\alpha\varepsilon_x : \alpha>0,\ x\in Q\}$. Следовательно, оператор $T\in\mathcal{L}^+(C(Q),B(Q))$ сохраняет неравенства выпуклости в том и только том случае, если найдутся ограниченная положительная функция $\alpha: Q\to R_+$ и отображение φ компакта Q в себя такие, что $Tf(x)=\alpha(x)f(\varphi(x))$ для всех $x\in Q$ и $f\in C(Q)$.

Пусть теперь R^n рассматривается как конус следов линейных над R^n функционалов на сферу направлений Z_n ; $Z_n \triangleq \{x\in R^n : |x|=1\}$, где $|x|$ – евклидова длина x . Пусть $\mu\in I_n(R^n)$. Если $\mu(z)=0$ для всех $z\in R^n$, то, как нетрудно проверить, $\mu=0$. Пусть теперь $\mu(z_0)\neq 0$ для некоторого $z_0\in R^n$. Отображение $z\mapsto\mu(z)$ – ненулевой линейный функционал, так что найдется ненулевой вектор $u\in R^n$, такой, что $\mu(z)=|u|\varepsilon_{\frac{u}{|u|}}(z)$. Поскольку $|u|\cdot\varepsilon_{\frac{u}{|u|}}\in Spr(\mu,R^n)$, то для $\varkappa\in W_n$ имеем $|u|\varkappa(\frac{u}{|u|})\geqslant \varkappa(u)\geqslant\mu(\varkappa)\geqslant\varkappa(u)$. Так как пространство выпуклых множеств $[W_n]$ плотно в $C(Z_n)$, то $\mu=|u|\varepsilon_{\frac{u}{|u|}}$, т.е. μ имеет вид $\alpha\varepsilon_x$, где $\alpha\geqslant 0$, $x\in Z_n$. С другой стороны, очевидно, каждая мера такого вида входит в $I_n(R^n)$. Ввиду предложения 2 получаем, что оператор $T\in\mathcal{L}^+(C(Z_n),B(Z_n))$ сохраняет неравенства R^n -выпуклости (т.е. неравенства сублинейности) в том и только том случае, если найдутся ограниченная положительная функция $\alpha: Z_n\to R_+$ и отображение φ сферы Z_n в себя такие, что $Tf(x)=\alpha(x)f(\varphi(x))$ для всех $x\in Z_n$ и $f\in C(Z_n)$.

6⁰. Для дальнейшего нам понадобится понятие максимального оператора. Напомним только простейшее определение максимальной меры. Пусть Q – компактное пространство, H - конус в $C(Q)$. Наделим конус положительных мер (пред) порядком $\gg_H$, положив $\mu\gg_H\nu \Leftrightarrow \mu-\nu\in H^*$. Максимальные элементы в этом упорядочении называются максимальными мерами относительно конуса H , или H -максимальными мерами. Поскольку положительный функционал на $C(Q)$ непрерывен, то мера μ является H -максимальной в том и только том случае, если положительный росток меры μ на конусе H совпадает с $\{\mu\}$ (в этом случае говорят также [20], что H является супремальным генератором $C(Q)$ относительно функционала μ).

Ясно, что H - максимальная мера μ характеризуется тем свойством, что представление (3) имеет место для любой функции f из $C(Q)$. Отметим еще, что на конусе H существуют H -максимальные меры в том и только том случае, если этот конус конфинален $C(Q)$, при этом для каждой положительной меры существует мажорирующая ее H -максимальная мера.

Нас будут интересовать в дальнейшем меры, максимальные относительно конуса $P(H, C(Q), \bar{R}^{Q})$, т.е. меры, максимальные в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H. Прежде всего, имеет место простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Мера μ является максимальной в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H, в том и только том случае, если $\mu(f)=\mu(co_H f)$ для любой непрерывной функции (где $co_H f(x) = \sup\{h(x): h \le f, h \in H\}$).*

Займемся теперь связью рассматриваемых конструкций с теорией Шоке.

Введем следующие определения. Будем говорить, что непрерывная функция f выделяет границу Шоке $Ch(H)$ конуса H, если f не является H -выпуклой функцией в точках дополнения границы Шоке. Иными словами, f выделяет границу, если $Ch(H) = \{x \in Q : f(x) = co_H f(x)\}$. Конус H в $C(Q)$ называют конусом Шоке, если его граница Шоке является бэровским множеством и, кроме того, существует выделяющая $Ch(H)$ функция. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть H — конус Шоке. Меры, максимальные в упорядоченности Шоке, порождаемой H, сосредоточены на $Ch(H)$. При этом для каждой точки $x \in Q$ найдется сосредоточенная на $Ch(H)$ мера μ_x такая, что $\mu_x(h) \geq h(x)$ для всех $h \in H$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — максимальная мера. Имеем, что $\mu(f)=\mu(co_H f)$, где f - выделяющая функция. Если открытое множество A лежит в $Q \setminus Ch(H)$, то $f(x) > co_H f(x)$ для $x \in A$. Так как функция $co_H f$ измерима, то $\mu(A)=0$ и, следовательно, μ сосредоточена на $Ch(H)$. Вторая часть очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ. В классическом случае, если Q - метризуемый компакт, выделяющей функцией служит строго вогнутая функция.

Полученный результат нетрудно применить для изучения H - выпуклых по Фаню множеств. В частности, для каждого конуса Шоке, содержащего $-\mathbb{1}$, компакт Q является H -выпуклой оболочкой границы Шоке этого конуса.

Литература

1. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Некоторые классы H -выпуклых функций и множеств, ДАН СССР, 197:6 (1971), 1261-1263.
2. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. К теории структурной двойственности функций и множеств, Оптимальное планирование, 17 (1970), 96-144.
3. Fuglede B. Capacity as sublinear functional, generalizing an integral, Det. Kongelige Danske Videns kabernes Selskal Matematisk - fisisko Meddelelser, 58:7 (1971), 1-44.
4. Godet-Tobie K. Pham The Lai M., Sur le plongement de l'ensembles des convexes, formes, bornes d'une espnee vectoriel topologique localement convexe, C.r.acad.sci., 271 : 2 (1970), A 84- A 87.
5. Baboc N., Cornea A. Convex cones of lover semicontinuous functiom. Rev. roumaine math. pures et appl., 14:7 (1969), 937-948.
6. Lindelöf E., Phragmen E. Sur les fonctions connexes Acta Math., 31 (1907), 444-454.
7. Beckenbach E. Generalized convex functions, Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937), 363-371.
8. Vasić P., Kečkic J. A generelization of the concept of convexity, Publ. l'institul math., 11 (25), 1971, 53-56.
9. Karlin S. Total positivity, v.I, Stauford Univ., Pr., St., 1968.
10. Karlin S., Studden W. Tchebyscheff systems with applications in analysis and statistics, Interscience Publ., N Y., 1966.
11. Ziegler Z. Linear approximation and generalized convexity T. Approx. Theory, I : 4 (1968), 420-443.
12. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
13. Брело М. Основы классической теории потенциала, Мир, М., 1964.
14. Кутателадзе С.С. Слабая H -выпуклость, Оптимизация, 4(21), 1972, 21-27.

15. Dinges H. Decompositions in ordered semigroups, J.Funct.Anal., 3(5),1970

16. Phelps R. Lectures on Chouquet theorem.

17. Захарюта В.П. Продолжаемые базисы в пространствах функций, аналитических в кратнокруговых областях, Сиб.мат. журн., II : 4 (1970), 783-809.

18. Grunbaum B. Convex polytopes, Interscience Publ.,N.Y.,1967.

19. Кутателадзе С.С. Об операциях над шарами Минковского, "Оптимизация," 3(20), 1971, III-II9.

20. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов,"Оптимизация," 3(20), 1971, 120-153.

21. Kadison R. A representation theory for commutative topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc., 7 (1951).

22. Рубинов А.М. Об одной теореме В.С.Климова, М.А.Красносельского и Е.А.Лифшица, "Оптимизация," 3(20), 1971,154-158.

Поступила в редакцию
18.XI. 1971 г.