УДК 512.25/26

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВДОЛЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

А.И. Лобырев

В статье предлагаются некоторые модификации метода последовательного проектирования для следующей задачи.

В евклидовом пространстве E^n заданы выпуклые замкнутые множества A_i, $i \in I$, где I – некоторое конечное множество индексов, причем множество $R = \bigcap_{i \in I} A_i$ не пусто. Требуется найти какую-либо точку $x^* \in R$.

Рассмотрим следующий итеративный процесс. Берем любую точку $x_0 \in E^n$, выбираем номер $i(x_0) \in I$ и множество $Q_0 \supset R$ и в множестве $Q_0 \cap A_{i(x_0)}$ находим точку $\bar{x}_1$, ближайшую к x_0. В качестве x_1 берем точку $x_0 + \lambda_0(\bar{x}_1 - x_0)$ $(0 < \varepsilon \leq \lambda_0 \leq 2-\varepsilon)$, затем так же выбираем $i(x_1)$ и $Q_1 \supset R$ и в множестве $Q_1 \cap A_{i(x_1)}$ находим точку $\bar{x}_2$, ближайшую к x_1, а в качестве x_2 берем точку $x_1 + \lambda_1(\bar{x}_2 - x_1)$ $(0 < \varepsilon \leq \lambda_1 \leq 2-\varepsilon)$ и т.д.

Возможны различные варианты этого метода, отличающиеся друг от друга правилом выбора индекса $i(x)$ и множеств $Q_\nu \supset R$. Ниже рассмотрены некоторые способы выбора $i(x)$ и множеств Q_ν, обеспечивающие сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторой точке $x^* \in R$. Для $Q_\nu \equiv E^n$ в первых двух случаях сходимость $\{x_n\}$ была доказана в [2], [3], [4]. В дальнейшем везде будем предполагать, что $Q_\nu \supset R$ и $0 < \varepsilon \leq \lambda_\nu \leq 2-\varepsilon$. Нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА I. *Пусть A – выпуклое замкнутое множество в E^n, $x \in E^n$, $\bar{y}$ – бли-*

жайшая к x точка множества A. Тогда $(x-\bar{y}, \bar{y}-z) \geqslant 0$ для любой точки $z \in A$ ж).

В обозначениях леммы I имеют место следствия.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $y = x + \lambda(\bar{y} - x)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, то $\|y - z\| \leqslant \|x - z\|$

Действительно,

$$\|y-z\|^2 = \|x+\lambda(\bar{y}-x)-z\|^2 = \|x-z\|^2 + \lambda^2\|\bar{y}-x\|^2 + 2\lambda(x-z, \bar{y}-x) = \|x-z\|^2 + (\lambda^2-2\lambda)\|\bar{y}-x\|^2 + 2\lambda(\bar{y}-x, \bar{y}-z) \leqslant \|x-z\|^2 - \lambda(2-\lambda)\|\bar{y}-x\|^2 \leqslant \leqslant \|x-z\|^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. $\|\bar{y}-x\|^2 \leqslant \|x-z\|^2 - \|\bar{y}-z\|^2$.

Действительно. $\|\bar{y}-x\|^2 = \|x-z\|^2 - \|\bar{y}-z\|^2 - 2(x-\bar{y}, \bar{y}-z) \leqslant \|x-z\|^2 - \|\bar{y}-z\|^2$.

ЛЕММА 2. В любом варианте предложенного метода последовательного проектирования последовательность

$$\{x_n \mid x_n = x_{n-1} + \lambda_{n-1}(\bar{x}_n - x_{n-1})\}$$

ограничена и $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $z \in R$. На основании следствия I $\|x_{n+1} - z\| \leqslant \|x_n - z\|$ и $\|\bar{x}_{n+1} - z\| \leqslant \leqslant \|x_n - z\|$. Следовательно, последовательности $\{x_n\}$ и $\{\bar{x}_n\}$ ограничены и существует $\lim \|x_n - z\| = a \geqslant 0$, то есть для любого достаточно малого $\delta > 0$ найдется номер N_δ, что при $n \geqslant N_\delta$ будет выполняться следующее соотношение

$$a \leqslant \|x_n - z\| \leqslant a + \delta.$$

При $a = 0$ и $n \geqslant N_\delta$ имеем $0 \leqslant \|\bar{x}_{n+1} - z\| \leqslant \|x_n - z\| \leqslant \delta$, то $\lim \|\bar{x}_{n+1} - z\| = \lim \|x_n - z\| = 0$.

Предположим, что при $a > 0$ найдется такой номер $n \geqslant N_\delta$, что

$$a - \|\bar{x}_{n+1} - z\| \geqslant \frac{\delta + \sqrt{2a\delta}}{\varepsilon}.$$

Тогда $\|x_{n+1} - z\|^2 \leqslant \|x_n - z\|^2 - \varepsilon^2 \|\bar{x}_{n+1} - x_n\|^2 \leqslant (a+\delta)^2 - \varepsilon^2 (a - \|\bar{x}_{n+1} - z\|)^2 \leqslant \leqslant (a+\delta)^2 - (\delta + \sqrt{2a\delta})^2 \leqslant a^2$, что не-

ж) Ср. [I].

возможно. Следовательно, при $a>0$ и $n \geq N_\delta$ $a-\frac{\delta+\sqrt{2a\delta}}{\varepsilon} \leq \|\bar{x}_{n+1}-z\| \leq \|x_n - z\| \leq a+\delta$, то есть $\lim \|\bar{x}_{n+1}-z\| = \lim \|x_n - z\|$. Так как $x_{n+1}-x_n = \lambda_n(\bar{x}_{n+1}-x_n)$, то на основании следствия 2 имеем:

$$\|x_{n+1}-x_n\|^2 = \lambda_n^2 \|\bar{x}_{n+1}-x_n\|^2 \leq \lambda_n^2(\|x_n - z\|^2 - \|\bar{x}_{n+1}-z\|^2).$$

Следовательно, $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$. Лемма доказана.

I. Пусть $I=\{1,2,\dots,p\}$. Будем брать индексы в циклическом порядке, т.е. $i(x_0)=1$, $i(x_1)=2,\dots,i(x_{p-1})=p$, $i(x_p)=1$, $i(x_{p+1})=2$ и т.д. Соответственно последовательность $\{x_n\}$ строится следующим образом: x_0 - произвольная точка, $\bar{x}_1$ - ближайшая к x_0 точка множества $A_1 \cap Q_0$, а $x_1 = x_0 + \lambda_0(\bar{x}_1 - x_0)$; $\bar{x}_2$ - ближайшая к x_1 точка множества $A_2 \cap Q_2$, а $x_2 = x_1 + \lambda_1(\bar{x}_2 - x_1)$; ... ; $\bar{x}_{p+1}$ - ближайшая к x_p точка множества $A_1 \cap Q_p$, а $x_{p+1} = x_p + \lambda_p(\bar{x}_{p+1}-x_p)$ и т.д.

ТЕОРЕМА I. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^* \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через y_k^i точку x_{kp+i} ($k=0,1,\dots$; $i=0,1,\dots,p-1$). На основании леммы 2 из последовательности $\{y_k^1\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{k_\nu}^1\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*. Так как

$$\|y_{k_\nu}^1 - \bar{y}_{k_\nu}^1\| = |1-\lambda_{k_\nu}^0| \, \|y_{k_\nu}^1 - y_{k_\nu}^0\| \leq |1-\varepsilon| \, \|y_{k_\nu}^1 - y_{k_\nu}^0\|,$$

а на основании леммы 2 $\|y_{k_\nu}^1 - y_{k_\nu}^0\| \to 0$, то $\|y_{k_\nu}^1 - \bar{y}_{k_\nu}^1\| \to 0$. Значит, $\bar{y}_{k_\nu}^1 \to x^*$, и так как $\bar{y}_{k_\nu}^1 \in A_1 \cap Q_{k_\nu p}$, то $x^* \in A_1$. Но $\|y_{k_\nu}^i - y_{k_\nu}^1\| \leq \sum_{\mu=1}^{i-1} \|y_{k_\nu}^{\mu-1} - y_{k_\nu}^{\mu}\|$ и по лемме 2 $\|y_{k_\nu}^i - y_{k_\nu}^1\| \to 0$ при $\nu \to \infty$. Поэтому $y_{k_\nu}^i \to x^*$ и аналогично тому, как это сделано выше, можно показать, что $y_{k_\nu}^2 \to x^*$ и $x^* \in A_2,\dots$ Следовательно, $x^* \in R$. Возьмем теперь $z = x^*$. На основании следствия I существует

$$\lim \|x_n - x^*\| = \lim \|y_{k_\nu}^1 - x^*\| = 0.$$

Следовательно, $\lim x_n = x^*$.

2. Для любого $x \in E^n$ положим $\rho(x, A_i) = \min_{y \in A_i} \|x-y\|$ и в качестве $i(x_n)$ выберем тот индекс, для которого достигается $\max_{i \in I} \rho(x_n, A_i)$ (если такой индекс не единственный, то берем любой из них).

В качестве $\overline{x}_{n+1}$, как и раньше, берем ближайшую к x_n точку множества $A_{i(x_n)} \cap Q_n$, а $x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\overline{x}_{n+1} - x_n)$.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^* \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 2 можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*. Так как

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)} \cap Q_n) \geq \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)}) \geq$$
$$\geq \lambda_n \rho(x_n, A_i) \geq \varepsilon \rho(x_n, A_i),$$

то снова на основании леммы 2 $\rho(x_n, A_i) \to 0$. По замкнутости множеств A_i точка $x^* \in A_i$ при любом i, то есть $x^* \in R$. То, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*, доказывается так же, как в теореме I.

3. Определим последовательность $\{B(x_n)\}$, задав произвольно $B(x_0)$ и положив

$$B(x_n) = \min\left\{B(x_{n-1}),\ \max_{i \in I} \rho(x_n, A_i)/2\right\}. \tag{1}$$

В качестве $i(x_n)$ выберем первый индекс, для которого выполняется условие: $\rho(x_n, A_i) \geq B(x_n)$. В качестве $\overline{x}_{n+1}$, как и раньше, берем ближайшую к x_n точку множества $A_{i(x_n)} \cap Q_n$, а $x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\overline{x}_{n+1} - x_n)$.

ТЕОРЕМА 3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^* \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $B(x_n) \to 0$, так как $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$ и

$$\varepsilon B(x_n) \leq \lambda_n B(x_n) \leq \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)}) \leq$$
$$\leq \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)} \cap Q_n) = \rho(x_n, x_{n+1}) \tag{2}$$

Пусть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\rho(x_{n_k}, A_i) < B(x_{(n_k)-1}) \tag{3}$$

для всех $i \in I$. Выделим из подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ подпоследовательность $\{x_{n_{k_j}}\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*. Так как $\rho(x_{n_k}, A_i) \to 0$ при любом i, то $x^* \in R$.

То, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*,

доказывается так же, как в теореме I.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть $i(\bar{x}_n)$ - первый индекс, для которого выполняется условие: $\rho(\bar{x}_n, A_i) \geqslant B(\bar{x}_n)$, где $B(\bar{x}_n)$ определяется аналогично (I) : $B(\bar{x}_0)$ задается произвольно, а

$$B(\bar{x}_n) = \min\left\{B(\bar{x}_{n-1}),\ \max_{i\in I} \rho(\bar{x}_n, A_i)/2\right\}.$$

Если в качестве $i(x_n)$ выбирать $i(\bar{x}_n)$, то, используя очевидные неравенства

$$\rho(x_n, A_i) \leqslant \rho(\bar{x}_n, x_n) + \rho(\bar{x}_n, A_i), \qquad i\in I,$$

$$\rho(\bar{x}_n, A_i) \leqslant \rho(\bar{x}_n, x_n) + \rho(x_n, A_i), \qquad i\in I,$$

можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3$'$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^*\in R$.

Чтобы получить доказательство этой теоремы, нужно в доказательстве теоремы 3 неравенство (2) заменить на

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)} \cap Q_n) \geqslant \lambda_n \rho(x_n, A_{i(x_n)}) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_n(\rho(\bar{x}_n, A_{i(x_n)}) - \rho(\bar{x}_n, x_n)) \geqslant \lambda_n (B(\bar{x}_n) - \rho(\bar{x}_n, x_n)) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon (B(\bar{x}_n) - \rho(\bar{x}_n, x_n)),$$

а неравенство (3) на

$$\rho(x_{n_k}, A_i) < B(x_{(n_k)-1}), \qquad i\in I.$$

Рассмотрим применение теоремы 3 для нахождения общей точки множества, заданного системой линейных неравенств.

Пусть система имеет вид:

$$(a^i, x) = b^{(i)}, \qquad i\in I \setminus \bar{I},$$
$$(a^i, x) \geqslant b^{(i)}, \qquad i \in \bar{I},$$

где $I=\{1,2,\dots,p\}$. Каждое множество A_i задается одним ограничением, уравнением или неравенством, т.е.

$$A_i = \begin{cases} \{x \mid (a^i, x) = b^{(i)}\}, & i\in I\setminus \bar{I}, \\ \{x \mid (a^i,x) \geqslant b^{(i)}\}, & i\in\bar{I}. \end{cases}$$

Величина $\rho(x, A_i)$ в этом случае определяется согласно формуле

$$\rho(x, A_i) = \begin{cases} \dfrac{|b^i - (a^i, x)|}{\|a^i\|}, & i \in I \setminus \bar{I}, \\ \dfrac{\{b^i - (a^i, x)\}^+}{\|a^i\|}, & i \in \bar{I}. \end{cases}$$

В качестве множеств Q_n возьмем множества $Q_n = \bigcap_{i \in I_n} A_i$, где $I_n \subset I$ и $mod\, I_n \leq m$. Целый параметр $m \leq p$ определяется для каждой задачи отдельно, исходя из размеров задачи, количества ненулевых элементов в исходной информации и объема оперативной памяти вычислительной машины.

Задавшись маленьким положительным числом ε и начальным n-мерным вектором x_0, будем проводить процесс последовательного проектирования, приняв для первого шага $I_0 = \varnothing$. Процесс проводим следующим образом. В качестве $i(x_n)$ выбираем первый индекс, для которого выполняется условие $\rho(x_n, A_i) \geq B(x_n)$, где $B(x_n)$ определяется согласно формулам (I).

Для нахождения точки $x_{n+1} \in A_{i(x_n)} \cap (\bigcap_{i \in I_n} A_i)$, ближайшей к x_n, применяется конечный алгорифм [5, 6], по форме и трудоемкости близкий к методам последовательного исправления плана и симплекс-методу.

При его применении помимо искомого вектора x_{n+1} получаются числа $v^{(i)}$, $i \in I(x_n) = I_n \cup \{i(x_n)\}$ (оценки ограничений системы, на множество решений которой производится проектирование), удовлетворяющие соотношениям:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i \in I(x_n)} v^{(i)} a^i \quad ;$$

$$v^{(i)} \geq 0 \quad , \qquad i \in I(x_n) \cap \bar{I} \; ,$$

$$v^{(i)} = 0 \quad , \text{ если } \; i \in I(x_n) \cap \bar{I} \; \text{ и } \; (a^i, x_{n+1}) > b^{(i)} .$$

Обозначим через $I'(x_n)$ множество $\{i \mid i \in I(x_n)$ и $v^{(i)} \neq 0\}$ и положим

$$I_{n+1} = \begin{cases} I'(x_n) & \text{, если } mod\, I'(x_n) \leq m , \\ I'(x_n) \setminus i_0 & \text{, если } mod\, I'(x_n) > m ; \end{cases}$$

где i_0 - индекс, для которого достигается $\min\limits_{i \in I'(x_n)} a^{i^2} b^{i^2}$.

Здесь a^{i^2} - диагональный элемент матрицы Грамма системы векторов $\{a^i\}$, $i \in I'(x_n)$, а b^{i^2} - соответствующий диагональный элемент матрицы, обратной к матрице Грамма (в процессе проектирования эта обратная матрица все равно вычисляется).

Вообще говоря, в качестве i_0 можно брать любой индекс $i \in I'(x_n)$, но в данном случае мы хотим, чтобы ограничение A_{i_0} по крайней мере на следующем шаге не сильно нарушилось. Проектирование прекращается, если $B(x_n) \leq \varepsilon$. Заметим, что проектирование на последовательных шагах не слишком трудоемко, так как у I_n и I_{n+1} много общих элементов.

Автор искренне благодарит В.А.Булавского за ценные замечания, сделанные при чтении рукописи.

Литература

1. Вайда С. В сб. "Линейные неравенства и смежные вопросы", ИИЛ, М., 1959, 30-31.
2. Еремин И.И. Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона. УМН 20 : 2 (1965), 183-187.
3. Брэгман Л.М. Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования. Докл. АН СССР, 162 : 3 (1965), 487-490.
4. Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств. Ж.выч.мат. и мат. физики, 7 : 6 (1967), 1211-1228.
5. Булавский В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. Автореферат диссертации, Новосибирск,196[illegible]
6. Булавский В.А. Один специальный алгорифм квадратичного программирования. Настоящий сборник, 23-36.

Поступила в редакцию
8.XI. 1971 г.