УДК 519.3:330.115

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛИТИКЕ ОРОШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЗАРЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

В.А.Кардаш, Э.О.Рапопорт

Введение

В работе [1] исследовалась оптимизационная динамическая модель орошения, в которой искомыми были стратегические параметры (площадь, подготавливаемая к орошению, и полезная ёмкость водохранилища) в условиях зарегулирования случайного стока. Важными являются задачи оптимизации (в стохастических условиях) тактических параметров орошения: площадей поливов и уровней оросительных норм; объемов воды, используемой в данном году и оставляемой в запасе на следующий год, и некоторых других. Вопросы выбора оптимальных площадей поливов и уровней оросительных норм одновременно с расчетом площади, подготавливаемой к орошению, изучались в работе [2].

В предлагаемой статье исследуется задача одновременной оптимизации названных выше стратегических и тактических параметров орошения. Как и в работе [1], в модели функционирование оросительной системы рассматривается как случайный процесс (а именно как марковский процесс), связанный с динамикой случайного стока и переходящих запасов воды в водохранилище. При этом вводится несколько упрощающих предположений и конкретизирующих гипотез. Так, при анализе тактики орошения предполагается, что сэкономленный запас воды в год t используется на следующий же год $t+1$. Вместо детального учета потерь воды из водохранилища (в зависимости от объема и площади зеркала

воды в водохранилище) взят коэффициент η' средних годовых потерь от общего объема накопленной воды.

Решение относительно запасания воды на следующий год получено в виде функции от ресурсов воды в данном году. Последние складываются из объема полезной воды в водохранилище к началу оросительного сезона и полезной части стока за оросительный сезон. Практическая реализация такого решения не представит трудностей в предположении стабильной динамики стока внутри оросительного сезона.

Знание оптимальных тактических решений позволяет найти оптимальные стратегические параметры. В работе описывается алгоритм их определения.

§ I. Динамическая модель с переменной оросительной нормой

Введем следующие обозначения:

V - полезный объем водохранилища;

V_t - количество воды в водохранилище к началу оросительного сезона в год t ;

S - площадь земли, пригодная для организации орошения;

x - площадь, подготавливаемая к орошению;

q_t - оросительная норма на I га в год t ;

x_t - площадь, орошаемая в год t ;

$Q_t^{(1)}$ - сток за оросительный сезон в год t ;

$Q_t^{(2)}$ - сток за межоросительный сезон года t , который может быть использован на орошение при условии запасания (с учетом потерь при хранении);

$\varphi_1(x_t, q_t)$ - чистый доход, получаемый при орошении площади x_t нормой q_t ;

$\varphi_2(x, x_t)$ - чистый доход с площади $(x-x_t)$, подготовленной к орошению, но не орошаемой в год t ;

$\overline{\varphi}(z)$ - функция чистого дохода с богарного участка площади z ;

$f_1(x)$ - капитальные затраты на подготовку к орошению площади x : строительство соответствующей распределительной сети и прочих водохозяйственных сооружений;

$f_2(V)$ – затраты на строительство водохранилища полезной емкостью V;

$\eta = 1 - \eta'$, где η' – коэффициент потерь воды при хранении; $\rho = 1 - \rho'$; ρ' – коэффициент эффективности капитальных вложений;

S, η', ρ' – известные детерминированные величины;

φ_1, φ_2, $\bar{\varphi}$, f_1, f_2 – известные функции;

$Q_t^{(1)}$, $Q_t^{(2)}$, $t = 1, 2, \ldots$ – известные случайные величины.

При этих обозначениях параметры структуры и функционирования оросительной системы x, V, x_t, q_t, V_t должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 0 \le x \le S; \\ 2) & 0 \le x_t \le x; \\ 3) & 0 \le V_t \le V; \\ 4) & \eta q_t x_t + V_{t+1} - \eta V_t \le \eta Q_t^{(1)} + Q_t^{(2)}; \\ 5) & q_t x_t \le V_t + Q_t^{(1)}. \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

Смысл условий 1), 2), 3) очевиден. Ограничение 4) отражает условие годового баланса воды в системе с учетом зарегулирования и потерь из водохранилища. Ограничение 5) о з н а ч а е т, что на орошение можно использовать только сток за оросительный период и запасы воды в водохранилище к началу оросительного сезона.

Задача состоит в нахождении параметров x, V, x_t, q_t, V_t, максимизирующих математическое ожидание за бесконечный период времени величины превышения чистого дохода с площади S над суммой капиталовложений в орошение; при этом чистый доход, получаемый в разные годы, приводится к начальному периоду, то есть требуется максимизировать функционал[ж)]:

$$\Phi = M\left\{\max_{x_t} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left(\varphi_1(x_t, q_t) + \varphi_2(x, x_t) + \bar{\varphi}(S - x)\right)\right\} - f_1(x) - f_2(V).$$

Перепишем функционал в более удобном виде:

$$\Phi = M\left\{\max_{x_t} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left[\varphi_1(x_t, q_t) + \varphi_2(x, x_t)\right]\right\} + \widetilde{H}(x, V), \qquad (1.2)$$

где $\widetilde{H}(x, V) = \frac{1}{1-\rho} \bar{\varphi}(S - x) - f_1(x) - f_2(V).$

ж) Здесь M – символ математического ожидания.

§ 2. Исследование оптимальной тактики орошения

Исследование решений задачи (I.I) - (I.2) при произвольных функциях φ_1 и φ_2 мало содержательно. В работе [I] на эти функции накладывались некоторые условия, позволившие исследовать решения при постоянной оросительной норме q. Однако этим условиям удовлетворяют лишь линейные функции и близкие к ним (имеющие достаточно ограниченную производную).

При этом оптимальная тактика поведения в году t состояла в том, чтобы запасать только ту воду, которую нельзя использовать в этом году. Эти условия не выполнены уже тогда, когда хотя бы одна из функций φ_1 и φ_2 квадратичная.

В этой работе будет рассматриваться следующий случай *):

$$\varphi_1(x_t, q_t) = x_t(c_1 + aq_t - bq_t^2),$$

$$\varphi_2(x, x_t) = c_2(x - x_t),$$

где $a > 0$, $b > 0$, c_2 - чистый доход на I га площади, подготовленной к орошению, но не поливаемой; c_1 - чистый доход на I га подготовленной к орошению и к поливу площади при $q_t = 0$. При этом c_1 меньше c_2 на величину затрат на подготовку земель к поливу.

Кроме того, будем предполагать, что сэкономленный запас воды Δ в год t используется только на следующий же год $t+1$. Варианты использования сэкономленной воды в более отдаленные годы рассматривать нецелесообразно в связи со значительной уценкой эффекта. Здесь мы можем повторить аргументацию Ходжи Насреддина..."За 20 лет кто-нибудь из нас уж обязательно умрет - или я, или эмир, или этот ишак" ([3], стр. 68).

Зафиксируем параметры x и V и рассмотрим величину чистого дохода с площади x в год t:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = x_t(c_1 - c_2 + aq_t - bq_t^2) + c_2 x.$$

Заметим, что слагаемое $c_2 x$ в этом выражении постоянно и его можно ввести в слагаемое $\tilde{H}(x, V)$, т.е. положим

$$H(x, V) = \tilde{H}(x, V) + \frac{c_2 x}{1-\rho}$$

---

*) Эта гипотеза относительно функций φ_1 и φ_2 принята в работе [2].

Положим, кроме того,

$$F(x_t; q_t) = x_t(c_1 - c_2) + aq_t - bq_t^2 . \qquad (2.I)$$

Ясно, что $F(x_t, q_t)$ – дополнительный чистый доход от орошения в год t при тактических параметрах x_t, q_t.

Пусть в год t имеется количество воды A_t. Отметим, что поливная норма q_t, большая, чем $\bar{q} = \frac{a}{2b}$, невыгодна, так как при $q > \bar{q}$ и при любом фиксированном x_t функция F лишь убывает.

При фиксированном $A_t < \frac{ax}{2b}$, т.е. когда выгодно использовать всю воду, $A_t = x_t q_t$, максимум F достигается при

$$\tilde{x} = A_t \sqrt{\frac{b}{c_2 - c_1}} . \qquad (2.2)$$

Это значение параметра x_t может выходить за допустимый предел x.

Отсюда x_t^*, q_t^* – оптимальные допустимые значения – должны находиться по формулам:

$$x_t^* = \min\left\{x,\ A_t\sqrt{\frac{b}{c_2 - c_1}}\right\}, \qquad (2.3)$$

$$q_t^* = A_t / x_t^* .$$

Подставляя в формулу (2.I) оптимальные значения параметров x_t и q_t, получим

$$F^* = x_t^*(c_1 - c_2) + aA_t - \frac{bA_t^2}{x_t^*} . \qquad (2.4)$$

График зависимости F^* от количества используемой воды A_t имеет следующий вид:

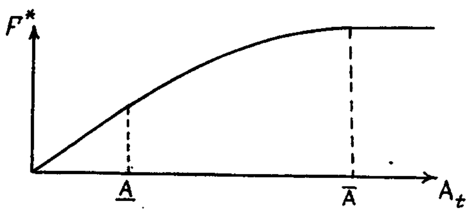

Рис. I

$$F^*(A_t)=\begin{cases} A_t(a-2\sqrt{b(c_2-c_1)}), \text{ если } A_t\le \underline{A}=x\sqrt{\frac{c_2-c_1}{b}}, \\ x(c_1-c_2)+aA_t-\frac{bA_t^2}{x}, \text{ если } \underline{A}<A\le\overline{A}=\frac{ax}{2b}. \end{cases} \text{ж)} \quad (2.5)$$

При $A_t>\frac{ax}{2b}$ функция $F^*(A_t)=const$, то есть в этой ситуации использование всей воды нерационально и в запасание заведомо может идти количество воды $A-ax/2b$.

Пусть A – количество имеющейся воды в данном году t. Под B будем понимать общее количество воды, которое может быть запасено в межоросительный сезон года t и получено в оросительный сезон года $t+1$, т.е. $B\le Q_t^{(2)}+Q_{t+1}^{(1)}$, причем равенство имеет место при отсутствии сброса.

Если $B>\overline{A}$, $A<\overline{A}$, то запасание заведомо невыгодно.

Обозначим

$$\Omega_0=\{(A,B): 0\le A<\overline{A},\ 0\le B\le\overline{A}\}.$$

Учитывая предыдущее, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только множества Ω_0.

Пусть $0\le A\le\underline{A}$. Легко видеть, что в этой ситуации запасание также невыгодно при любом B, так как функция $F(A)+\rho F(B)$ – доход за два смежных года с учетом дисконтирования – линейна по A, причем в этой области $F'(A)>\sup\rho F'(B)$.

Обозначим через Δ количество воды, запасаемой в год t для использования в следующем году. Тогда $\psi(\Delta)$ – функция дохода за эти два года при запасании количества воды Δ имеет вид:

$$\psi(\Delta)=F^*(A-\Delta)+\rho F^*(B+\eta\Delta).$$

С учетом формулы (2.5) максимум этой функции достигается при

$$\Delta^*(A,B)=\begin{cases} A-(\rho\eta\underline{A}+(1-\rho\eta)\overline{A}), \text{ если } A\in\Omega_1, \\ \dfrac{A-\rho\eta B-\overline{A}(1-\rho\eta)}{1+\rho\eta^2}, \text{ если } A\in\Omega_2, \\ 0, \text{ если } A\in\Omega_0\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2), \end{cases} \quad (2.6)$$

ж) Заметим, что $\overline{A}\ge\underline{A}$, если дискриминант квадратного трехчлена $-bq^2+aq-(c_2-c_1)$ положителен. Это означает, что существует q такое, что функция F (см.(2.1)) положительна.

где

$$\Omega_1=\{(A,B): A\geq A_0,\ \eta A+B\leq \eta\bar{A}(1-\eta\rho)+\underline{A}(1+\rho\eta^2)\},$$

$$\Omega_2=\{(A,B): A-\rho\eta B\geq \bar{A}(1-\rho\eta),\ \eta A+B\geq \eta\bar{A}(1-\rho\eta)+\underline{A}(1+\rho\eta^2)\}.$$

В зависимости от соотношения $\underline{A}$ и $\bar{A}$ квадрат Ω_0 разбивается на части, в каждой из которых $\Delta^*(A,B)$ задается одной из формул (2.6). Эти области изображены на рисунках 2 и 3, причем на рис.2 представлен случай, когда $(1+\rho\eta^2)\underline{A} > \rho\eta^2\bar{A}$, на рис.3 - случай, когда $(1+\rho\eta^2)\underline{A} < \rho\eta^2\bar{A}$

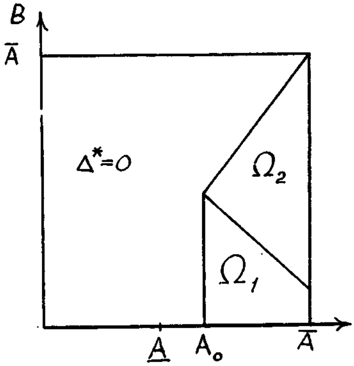

Рис. 2

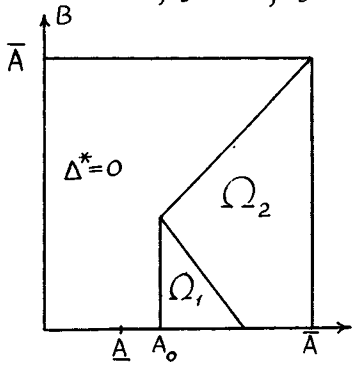

Рис. 3

Приведенные рассуждения относились к случаю, когда точно известны A и B, т.е. количество воды, пришедшее в год t, и ожидаемое количество воды в год $t+1$. На самом же деле нам может быть известно только вероятностное распределение величины B в зависимости от A. Тогда каждая ситуация имеет некоторую вероятность. Припишем эту вероятность соответствующей величине Δ^* (оптимальной для этой ситуации) и найдем математическое ожидание $M(\Delta^*(A,B))$ - среднюю величину запасания в зависимости от A (A предполагается известной); $\Delta^*(A)=M(\Delta^*(A,B))$ и будет искомой величиной запасания.

Пусть $f_A(B)$ - плотность случайной величины B при фиксированном A. Тогда

$$\Delta^*(A) = \begin{cases} \int\limits_0^{(A-A_1)/\rho\eta} \Delta^*(A,B)\, f_A(B)\, dB, & \text{если} \quad A_0 \le A \le \bar{A}, \\ 0, & \text{если} \quad A < A_0, \end{cases}$$

где $A_1 = \bar{A}(1-\rho\eta)$.
Если B дискретно, то интеграл заменяется суммой. Если $A > \bar{A}$, то полагаем $\Delta^*(A) = A - \bar{A} + \Delta^*(\bar{A})$, поскольку, как уже упоминалось, невыгодно использовать воду в объеме, превышающем $\bar{A}$.

§ 3. О выборе стратегических параметров

В этом параграфе мы используем оптимальные тактические решения, полученные в предыдущем параграфе, для нахождения стратегических параметров проектируемой оросительной системы.

Вернемся к задаче (I.I) - (I.2) и будем считать, что

$$\varphi_1(x_t, q_t) + \varphi_2(x, x_t) = x_t(c_1 - c_2 + a q_t - b q_t^2) + c_2 x,$$

как предполагалось в § 2.

Введя тактический параметр A_t и считая, что x_t уже выбрано оптимальным по формуле (2.3), задачу можно переписать так:

Найти A_t, $t = 0, 1, 2, \dots$, x, V, максимизирующие функционал:

$$\Phi = M\Big\{\max_{A_t} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t F_t^*\Big\} + H(x, V)$$

при условиях:

1) $0 \le x \le S$;

2) $0 \le V_t \le V$;

3) $\eta A_t + V_{t+1} - \eta V_t \le \eta Q_t^{(1)} + Q_t^{(2)}$;

4) $A_t \le V_t + Q_t^{(1)}$.

Здесь $A_t = x_t q_t$ - количество воды, используемой в год t.

Так как формула (2.6) определяет оптимальную политику в год t при наличии количества воды A, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_t = \Delta^*(V_t + Q_t^{(1)}), \\ &V_t = \min\{V, Q_{t-1}^{(2)} + \eta\cdot\Delta_{t-1}\}, \\ &A_t = V_t + Q_t^{(1)} - \Delta_t, \end{aligned}\right\} \qquad (3.I)$$

так как количество имеющейся в оросительный период воды равно $V_t + Q_t^{(1)}$.

Как и в работе [I], рекуррентные соотношения (3.I) позволяют выразить V_t и A_t через V_0 - начальное наполнение водохранилища (которое в дальнейшем считаем фиксированным), x и V. Тем самым исходная задача сводится к нахождению экстремума функционала $\Phi(x, V)$ при ограничениях $0 \leq x \leq S$, $V \geq V_0$. Остальные ограничения учтены соотношениями (3.I).

Однако выписывание в явном виде функции $\Phi(x, V)$ осложняется необходимостью усреднения по случайным реализациям $Q_t^{(1)}$ и $Q_t^{(2)}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем считать, что случайные величины $Q_t^{(1)}$ (и $Q_t^{(2)}$) - независимые, одинаково распределенные величины, принимающие лишь конечное число значений.

Отметим, что A_t и V_t являются марковскими процессами, но при всем этом, в отличие от ситуации, рассмотренной в работе [I], конечное число состояний здесь уже не гарантируется.

Для того, чтобы случайные процессы $\{V_t\}$ и $\{A_t\}$ имели лишь конечное число состояний, придется потребовать, чтобы функция оптимальной политики накопления Δ^* тоже принимала лишь конечное число значений. Этого нетрудно достичь, выбрав соответствующую сетку её значений, т.е. приблизив её функцией с конечным числом значений, что обычно и делается в практических расчетах.

Будем считать, что A_t принимает конечное множество упорядоченных значений.

При фиксированном x рассмотрим случайный процесс $F_t^{*(x)} = F^*(A_t)$ по формулам (2.5). При фиксированном t $F^*(A_t)$ тоже принимает лишь конечное множество значений, и последовательность $F_t^{*(x)} (t = 0, 1, 2, \ldots)$ - марковская цепь с конечным множеством состояний.

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ - состояния этого процесса, $G = \|g_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица его переходных вероят-

ностей, $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где p_i - вероятность в начальный момент находиться в состоянии x_i . Тогда

$$M \max_{A_t} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t F_t^{*} = (\alpha, \mathbf{P}(\mathbf{I}-\rho G)^{-1}) . \qquad (3.2)$$

Заметим, что векторы α , $\mathbf{P}$ и матрица G зависят от x и V . Аналитический вид этой зависимости получить, по-видимому, невозможно. Но при каждом фиксированном наборе x и V выражение (3.2) легко вычисляется.

Таким образом, задав сетку значений x и V , легко сосчитать значения функционала Φ (x , V) в каждом узле сетки и выбрать оптимальное из них.

Литература

1. Кардаш В.А., Рапопорт Э.О., Об одной динамической модели многолетнего регулирования стока в целях орошения. Оптимизация, Новосибирск, Наука, 1971, № 2(19), 65-73.
2. Кардаш В.А., Экономическая оптимизация в орошении. Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. II, Новосибирск, Наука, 1972.
3. Соловьев Л. Избранные произведения. Л., ИХЛ, 1971.

Поступила в ред.-изд. отд.
20.4.1972.