УДК 511.330.115

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА С ЗАДЕРЖКОЙ

И.А.Красс, В.А.Лукьянова

В данной работе исследована модель экономической динамики леонтьевского типа, в которой каждый продукт требует для своего производства фондов. При этом фонды, на которых производится i -й продукт ($i=1,2,\ldots,n$), должны пройти τ_i периодов строительства до готовности. Найдено соотношение, определяющее темп роста данной модели. Для полученной нелинейной задачи разработан итеративный алгоритм, использующий на каждом шаге итерации степенной процесс. Данный алгоритм применим к весьма широкому классу задач об определении неотрицательного собственного значения в обобщенной задаче на собственные значения, что и показывается в первом параграфе.

§ 1. Алгоритм решения обобщенной задачи о максимальном неотрицательном собственном значении

Пусть дано семейство $\widetilde{D}(\alpha)$ квадратных матриц размерности n, непрерывно зависящих от параметра α, ненулевых и неотрицательных для $\alpha \geqslant \alpha_0$. Рассмотрим следующую задачу:

ЗАДАЧА 1. Среди всех пар (α, x), где $\alpha \geqslant \alpha_0$; $x \in R^n_+$, удовлетворяющих неравенству

$$x \geqslant \alpha D(\alpha) x, \tag{1}$$

найти пару $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ с максимальным α .

Такую задачу будем называть обобщенной задачей о максимальном неотрицательном собственном значении.

ЛЕММА I. Пусть 1) множество Q пар (α, x) (где $\alpha \geqslant \alpha_0$, $x \in R^n_+$), удовлетворяющих неравенству (I), непусто; 2) существует неотрицательная ненулевая матрица D_1, такая, что $D(\alpha) \geqslant D_1$ для $\alpha \geqslant \alpha_0$ (здесь неравенство понимается поэлементно). Тогда решение задачи существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, не уменьшая общности, мы можем считать, что в задаче I на искомую пару (α, x) наложено ограничение

$$\|x\| = 1 \quad , \qquad (2)$$

где норма понимается в смысле евклидовой метрики.

Из условия 2 леммы и (I) имеем, что если $(\alpha, x) \in Q$, то $x \geqslant \alpha D_1 x$. Так как $D_1 \neq 0$, то это неравенство вместе с (2) приводит к тому, что множество $Q_\alpha = \{\alpha : \alpha x \in Q\}$ ограничено сверху. Пусть $\bar{\alpha} = \sup_\alpha Q_\alpha$. Тогда существует последовательность пар $\{(\alpha_K, x_K)\}$ (K = I,2,...) такая, что $\alpha_K \to \bar{\alpha}$ при $K \to \infty$.

Как уже указано выше, мы можем считать, что $\|x_K\| = 1$, так как пересечение единичной сферы с R^n_+ - компакт, то из последовательности $\{x_K\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_K}\}$ ($x_{n_K} \to \bar{x}$ при $n_K \to \infty$). Делая переход по этой последовательности в (I), получаем, что пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ удовлетворяет (I), что и доказывает лемму.

Решение $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ задачи I будем называть оптимальной парой.

Обобщая теорему Гейла из работы [I], докажем лемму.

ЛЕММА 2. Всякая оптимальная пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ удовлетворяет равенству

$$\bar{x} = \bar{\alpha} D(\bar{\alpha}) \bar{x} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим противное, то есть существуют решения задачи I, у которых в (I) имеются строгие неравенства. Пусть $(\bar{\alpha}, x)$ есть какое-нибудь решение задачи I и пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$; $D(\alpha) = \|d_{ij}(\alpha)\|$ (i, j = I,..., n). Ввиду непрерывной зависимости $D(\alpha)$ от α не может случиться, что для всех $j=1,2,\dots,n$ имеет место строгое неравенство

$$x_j > \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha} d_{ij}(\bar{\alpha}) x_i .$$

Так как множество пар $(\bar{\alpha}, x) \in Q$, то есть множество решений задачи I. образует выпуклое множество, то существует пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$, у которой имеется максимальное число неравенств в (I). Пусть

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &> \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha} d_{ij}(\bar{\alpha}) \bar{x}_i \qquad \text{для} \quad 1 \le j \le K, \\ \bar{x}_j &= \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha} d_{ij}(\bar{\alpha}) \bar{x}_i \qquad \text{для} \quad K < j \le n . \end{aligned} \tag{3}$$

Из (4) вытекает, что $d_{ij}(\bar{\alpha})=0$ для $i \le K$; $j > K$. Действительно, пусть существует пара $i_0 \le K$; $j_0 > K$ такая, что $d_{i_0 j_0}(\bar{\alpha}) > 0$. Рассмотрим вектор $\bar{x}_\varepsilon = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i_0-1}, \bar{x}_{i_0} - \varepsilon, \bar{x}_{i_0+1}, \dots, \bar{x}_n)$, где $\varepsilon > 0$ и столь мало, что первые K строгих неравенств в (4) сохранятся и $\bar{x}_\varepsilon \in R^n_+$. (Так как $\bar{x}_{i_0} > 0$ ввиду того, что $i_0 \le K$, то это можно сделать.)

Нетрудно видеть, что $(\bar{\alpha}, \bar{x}_\varepsilon)$ есть снова решение задачи I, а так как $d_{i_0 j_0}(\bar{\alpha}) > 0$, то j_0 -е равенство обращается в неравенство, что противоречит предположению о максимальном числе неравенств в (3).

Из того, что $d_{ij}(\bar{\alpha})=0$ для $i \le K$; $j > K$, следует что пара $(\bar{\alpha}, \bar{x}')$ также есть решение задачи I, где $\bar{x}'_i = \bar{x}_i$ для $i = 1,2,\dots,K$; $\bar{x}'_i = 0$ для $i = K+1,\dots,n$. Но для этого решения в (3) имеются только строгие неравенства, что, ввиду непрерывности функций $D(\bar{\alpha})$, противоречит максимальности $\bar{\alpha}$. Лемма доказана.

Наряду с задачей I рассмотрим вспомогательную задачу для того же семейства матриц.

ЗАДАЧА 2. Пусть $\alpha \ge \alpha_0$; среди всех пар (β, x), где $\beta \ge 0$, $x \in R^n_+$, удовлетворяющих неравенству

$$x \ge \beta D(\alpha) x \qquad , \tag{4}$$

найти пару $(\beta(\alpha), \bar{x})$ с максимальным β .

ЛЕММА 3. Решение $(\beta(\alpha), \bar{x})$ задачи 2 существует и удовлетворяет соотношению

$$\bar{x} = \beta(\alpha) D(\alpha) \bar{x} . \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $D(\alpha)$ - неотрицательная ненулевая матрица, то согласно теореме Фрабениуса [3] у неё существует неотрицательное собственное значение γ, отвечающее неотрицательному собственному вектору $\bar{x}_0$. Пара ($\gamma^{-1}, \bar{x}_0$) удовлетворяет (4), то есть допустимые решения неравенства (4) существуют. Повторяя рассуждения леммы I, получаем существование решения задачи 2, применив затем аналог лёммы 2 при фиксированном x, получим (5). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ есть решение задачи I и матрица $D(\bar{x})$ неразложимая, то $\beta(\bar{x})=\bar{\alpha}$. Действительно, из леммы 2 следует, что $\bar{\alpha}^{-1}$ есть неотрицательное собственное значение неотрицательной неразложимой матрицы $D(\bar{\alpha})$, отвечающее неотрицательному собственному вектору $\bar{x}$. Из доказанной леммы вытекает, что тем же свойством обладает и число $[\beta(\bar{x})]^{-1}$. Ввиду неразложимости матрицы $D(\bar{\alpha})$ из второй теоремы Фрабениуса [3] следует, что $[\beta(\bar{\alpha})]^{-1}=\bar{\alpha}^{-1}$, то есть $\bar{\alpha}=\beta(\bar{x})$, а вектор $\bar{x}>0$ (то есть $\bar{x}_i>0$; i =1,2,.., n).

ТЕОРЕМА I. Если $D(\alpha)$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$ есть неотрицательная, непрерывная, монотонно возрастающая матричная функция (то есть этим свойством обладает каждая из функций $d_{ij}(\alpha)$(i, j =1,2,..., n)), то из $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ следует $\beta(\alpha_1) \leq \beta(\alpha_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 следует существование решения задачи 2 в рассматриваемом случае. Согласно определению решения задачи 2 существует такой $x_1 \in R^n_+$, что имеет место неравенство

$$x_1 = \beta(\alpha_1) D(\alpha_1) x_1.$$

Ввиду монотонности $D(\alpha)$ и условия $\alpha_2 \leq \alpha_1$ отсюда получаем

$$x_1 \geqslant \beta(\alpha_1) D(\alpha_2) x_1 ,$$

что и означает, что $\beta(\alpha_2) \geqslant \beta(\alpha_1)$. ($\beta(\alpha_2)$-максимальное число, удовлетворяющее неравенству $x \geqslant \beta D(\alpha_2) x$ для $x \in R^n_+$.)

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия замечания к лемме 3, то из $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ следует $\beta(\alpha) \leq \bar{\alpha}$, а из $\alpha \leq \bar{\alpha}$ следует $\beta(\alpha) \geqslant \bar{\alpha}$.

Пусть теперь неотрицательная, непрерывная, монотонно возрастающая при $\alpha \geqslant \alpha_2$ матричная функция $D(\alpha)$ неразложима при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и удовлетворяет условиям леммы I. Тогда можно предложить следующий итеративный алгоритм для решения задачи I.

Пусть $\gamma_0 = \alpha_0$ – начальное значение итеративного процесса. Определим максимальное по модулю собственное значение матрицы $D(\gamma_0)$. Ввиду предложенной неразложимости матрицы $D(\gamma_0)$, как уже отмечалось в замечании к лемме 3, это собственное значение совпадает с $[\beta(\gamma_0)]^{-1}$.

Напомним (см. [6]), что для решения задачи об определении максимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора x_0 имеется весьма простой численный метод, сводящийся к итерированию матрицы размерности n (степенной процесс).

Если $\gamma_0 = \beta(\gamma_0)$, то ввиду предполагаемой неразложимости матрицы $D(\alpha)$ из замечания к лемме 3 следует, что пара (γ_0, x_0), где x_0 – собственный вектор матрицы $D(\gamma_0)$ с положительными компонентами, есть решение задачи I.

Поэтому положим $\gamma_0 \neq \beta(\gamma_0)$. Из следствия к теореме I вытекает, что если $\gamma_0 > \bar{\alpha}$, то $\beta(\gamma_0) \leqslant \bar{\alpha}$, то есть $\gamma_0 > \beta(\gamma_0)$, и, наоборот, если $\gamma_0 < \bar{\alpha}$, то $\beta(\gamma_0) \geqslant \bar{\alpha}$, то есть $\beta(\gamma_0) > \gamma_0$.

Предположим что $\beta(\gamma_0) < \gamma_0$, то есть $\gamma_0 > \bar{\alpha}$. Тогда следующую итерацию γ_1 выберем так:

$$\gamma_1 = \gamma_0 - h,$$

где h – некоторое фиксированное число – начальный шаг алгоритма.

Если $\beta(\gamma_1) < \gamma_1$, то $\gamma_2 = \gamma_1 - h$ и т.д., пока не найдется номер i такой, что $\beta(\gamma_i) > \gamma_i$, то есть

$$\gamma_i < \bar{\alpha}; \; \gamma_i + h = \gamma_{i-1} > \bar{\alpha}.$$

Вычислим теперь величину $\beta(\gamma_i + \frac{h}{2})$; если $\beta(\gamma_i + \frac{h}{2}) > \gamma_i + \frac{h}{2}$, то положим $\gamma_{i+1} = \gamma_i + \frac{h}{2}$, если же $\beta(\gamma_i + \frac{h}{2}) < \gamma_i + \frac{h}{2}$, то положим $\gamma_{i+1} = \gamma_i$. В обоих случаях, как легко видеть, имеем:

$$\gamma_{i+1} < \bar{\alpha}; \qquad \gamma_{i+1} + \frac{h}{2} > \bar{\alpha}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим

$$\gamma_{i+\tau} < \bar{\alpha}; \; \gamma_{i+\tau} + \frac{h}{2^\tau} > \bar{\alpha}.$$

Таким образом, строится итеративная последовательность $\gamma_{i+\tau}$ для $\tau \geq 1$, которая сходится к $\bar{\alpha}$, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2}$ (ибо на каждом шагу проводится дихотомия). Элементарный шаг данного алгоритма есть определение максимального по модулю собственного значения неотрицательной, неразложимой матрицы.

§ 2. Нахождение темпа роста модели Леонтьева с фондами

В рассматриваемой в данной работе модели $\mathcal{M}$ имеется n продуктов. Эти продукты разбиты на K групп. Продукты первой группы, имеющие индексы i =I,2,..., n_1, воспроизводятся, как в простейшей модели Леонтьева (см. [I]). Для производства единицы i-го продукта ($i \in \{1,2,\dots,n_1\}$) надо затратить a_{ij} единиц продукта j (то есть вектор затрат есть $a_i=(a_{i1}, a_{i2},\dots,a_{in})$. Продукты второй группы ($i \in \{n_1+1,\dots,n_2\}$) для своего воспроизводства требуют фондов. При этом для производства единицы i-го продукта этой группы надо затратить вектор продуктов a_i и единицу i-го фонда (сам фонд при этом амортизируется с коэффициентом амортизации $1-\mu_i$, где $0 \leq \mu_i \leq 1$). Единица i-го фонда для продуктов этой группы может быть получена за один период при условии, что будет затрачен вектор $b_i^1=(b_{i1}^1, b_{i2}^1,\dots,b_{in}^1)$ продуктов ($i \in \{n_1+1,\dots,n_2\}$; $a_i, b_i \in R_+^n$).

Наконец, для производства единицы продукта z-й группы ($1 \leq z \leq K$), как и в случае второй группы, требуется затратить единицу соответствующего фонда и вектор продуктов a_i ($i \in \{n_{z-1}+1,\dots,n_z\}$). Однако фонды у этой группы продуктов требуют для своего воспроизводства ($z-1$)-периодов времени, то есть единица i-го фонда ($i \in \{n_{z-1}+1,\dots,n_z\}$) проходит через $(z-1)$-ое промежуточное состояние (от $(z-1)$-го состояния до первого) прежде, чем она придет в состояние готовности, то есть может быть употреблена при создании единицы i-го продукта. Для перевода единицы i-го фонда из $(s+1)$-го промежуточного состояния в s-е, надо затратить вектор продуктов $b_i^s=(b_{i1}^s,\dots,b_{in}^s)$, где s = I,2,..., $z-1$ и единицу i-го фонда в $(s+1)$-м промежуточном состоянии. Здесь случай $s=z$ означает отсутствие данного фонда (в каком бы то ни было промежуточном состоянии), так что для создания единицы i-го фонда в ($r-1$)-м промежуточном состоянии надо затратить только вектор продуктов b_i^{r-1} для r-й группы ($r=2,\ldots,K$).

Окончательно состояние данной модели есть совокупность из ($K+1$) вектора $(x, u_1, \ldots, u_{K-1})$, где $x \in R_+^n$ есть вектор, i-я компонента которого есть количество i-го продукта в модели (в данный момент); вектор $u_1=(u^1_{n_1+1}, \ldots, u^1_n)$ - есть вектор наличия фондов готовых к производству, размерность этого вектора есть $n-n_1=\ell_1$. Соответственно, вектор $u_S=(u^S_{n_S+1}, \ldots, u^S_n)$ есть вектор наличия фондов в S-м ($S=1,\ldots,K-1$) промежуточном состоянии, размерность этого вектора есть $n-n_S=\ell_S$. Естественно, все векторы u_S имеют неотрицательные компоненты.

Пусть $\ell=\sum\limits_{i=0}^{K}\ell_i$, где $\ell_0=n$. Тогда состояние рассматриваемой модели есть вектор из множества R_+^{ℓ}. Первые n - ортов пространства R^{ℓ}, то есть орты, относящиеся к подвектору x вектора состояний, обозначим через e_i^0 ($i=1,\ldots,n$). Следующие ℓ_1 ортов пространства R^{ℓ} обозначим через e_i^1 ($i=n_1+1,\ldots,n$), эти орты относятся к подвектору u_1 вектора состояний. При такой нумерации ортов i-му продукту, требующему фондов, соответствует фонд, находящийся в первом состоянии и отвечающий орту e_i^1. Согласно этой нумерации ℓ_S ортов пространства R^{ℓ}, отвечающих подвектору u_S вектора состояний, обозначим через e_i^S ($i=n_S+1,\ldots,n; S=1,\ldots,K-1$).

Процесс в модели $\mathfrak{M}$ есть пара векторов из пространства R^{ℓ}, имеющая вид $(x, u_1, \ldots, u_{K-1}, y, v_1, \ldots, v_{K-1})$, а технологический конус, описывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Z=\Big\{&(x,u_1,\ldots,u_{K-1};y,v_1,\ldots,v_{K-1}):(x,u_1,\ldots,u_{K-1};y,v_1,\ldots,v_{K-1})=\\
&=\sum_{i=1}^{n_1}(a_i,e_i^0)\xi_i^1+\sum_{i=n_1+1}^{n}(a_i+e_i^1,\, e_i^0+\mu_i e_i)\xi_i^1+\sum_{i=n_1+1}^{n}(b_i^1,e_i^1)\xi_i^2+\\
&+\sum_{i=n_2+1}^{n}(b_i^1+e_i^2,\, e_i^1)\xi_i^2+\cdots+\sum_{i=n_S+1}^{n_{S+1}}(b_i^S,\, e_i^S)\xi_i^S+\sum_{i=n_{S+1}+1}^{n}(b_i^S+e_i^{S+1},\, e_i^S)\xi_i^S+\\
&+\cdots+\sum_{i=n_{K-1}+1}^{n}(b_i^{K-1},e_i^{K-1})\xi_i^{K-1}+\sum_{i=1}^{n}(e_i^0,0)\eta_i^1+\sum_{i=n_1+1}^{n}(e_i^1,0)\eta_i^2+\cdots\\
&\cdots+\sum_{i=n_{K-1}+1}^{n}(e_i^{K-1},0)\eta_i^{K-1}\Big\}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Здесь $\xi_i^s \geqslant 0$ (s =1,2,..., $k-1$; $i=n_{s-1}+1,\dots,n; n_0=0$) есть интенсивности процессов производства; η_i^s (s =1,..., $k-1$; $i=n_{s-1}+1,\dots,n; n_0=0$) есть интенсивности процессов недовыполнения плана за один период (интенсивность процессов "уничтожения").

Наряду с моделью $\mathfrak{M}$ рассмотрим модель $\widetilde{\mathfrak{M}}$, состояние которой есть k векторов $(\tilde{x}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{k-1})$, причем $\tilde{x}, \tilde{u}_i \in R^n_+$ (i =1,2,..., $k-1$). Если e_i^0 есть первые n ортов пространства R^{n-k} (относящиеся к подвектору $\tilde{x}$), а e_i^j есть орты с номерами $n(j-1)+1,\dots,nj$, где j =1,2,..., $k-1$, то технологический конус модели $\widetilde{\mathfrak{M}}$ имеет вид:

$$\tilde{Z}=\{(\tilde{x}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k-1}, \tilde{y}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{k-1}) : (\tilde{x}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k-1}; \tilde{y};$$

$$\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{a}_i + e_i^1, e_i^0 + \tilde{\mu}_i e_i^1)\xi_i^1 + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{b}_i^1 + e_i^2, e_i^1)\xi_i^2 + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{i=1}^{n}(b_i^s + e_i^{s+1}, e_i^s)\xi_i^s + \cdots + \sum_{i=1}^{n}(b_i^{k-1}, e_i^{k-1})\xi_i^{k-1} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}(e_i^j, 0)\eta_i^j\}, \qquad (8)$$

где $\xi_i^j \geqslant 0$; $\eta_i^j \geqslant 0$; j =1,2,..., $k-1$. Здесь

$$\tilde{\mu}_i = \begin{cases} 1, & i=1,\dots,n_1, \\ \mu_i, & i=n_1+1,\dots,n, \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} 0, & i=1,\dots,n_s, \\ b_i^s, & i=n_s+1,\dots,n, \end{cases}$$

то есть в модели $\widetilde{\mathfrak{M}}$ каждый продукт требует для своего воспроизводства фондов, которые должны пройти через ($k-1$)-е промежуточное состояние, однако для продуктов r -й группы (с номерами $i=n_{r-1}+1,\dots,n_r$) для создания единицы фонда в состоянии $s \geqslant r$ не требует затрат продуктов. Имеет место

ЛЕММА 4. Любой $(Z(0),T)$-траектории $\{Z(t)\}_{t=0}^{t=T}$ в модели $\mathfrak{M}$ соответствует $(\tilde{Z}(0),T)$-траектория в модели $\widetilde{\mathfrak{M}}$, и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z(t)\}_{t=0}^{t=T}=\{(x(t),u_1(t),\ldots,u_{k-1}(t)\}_{t=0}^{t=T}$ есть ($z(0),T$)-траектория в модели $\mathcal{M}$. Определим вектор $\tilde{u}_s(t)=(\tilde{u}_1^s(t),\ldots,\tilde{u}_n^s(t))\in R_+^n$; s =1,..., $k-1$; t =0,1,..., T, так:

$$\tilde{u}_i^s(t)=\begin{cases} x_i(t+s), & \text{если } t+s\le T,\\ 0, & \text{если } t+s>T, \end{cases} \quad \text{где } i=1,2,\ldots,n_1,$$

$$\tilde{u}_i^s(t)=\begin{cases} u_i^p(t+s-p), & \text{если } t+s-p\le T,\\ 0, & \text{если } t+s-p>T, \end{cases} \quad \text{где } i=n_p+1,\ldots,n_{p+1},\ p=1,2,\ldots,s-1,$$

$$\tilde{u}_i(t)=u_i^s(t) \qquad \text{для } i=n_s+1,\ldots,n.$$

Здесь $x_i(t)$; $u_i^s(t)$ есть компоненты векторов $x(t)$, $u_s(t)$ (s =1,..., $k-1$).

Тогда, нетрудно проверить, что векторы $\tilde{z}(t)=(x(t),\tilde{u}_1(t),\ldots,u_{k-1}(t))$ составляют траекторию в модели $\widetilde{\mathcal{M}}$. Аналогично, если $\{\tilde{z}(t)\}_{t=0}^{t=T}=\{(x(t),\tilde{u}_1(t),\ldots,\tilde{u}_{k-1}(t)\}_{t=0}^{t=T}$ составляют траекторию в модели $\widetilde{\mathcal{M}}$, то векторы $z(t)=(x(t),u_1(t),\ldots,u_{k-1}(t))$, где $u_i^s(t)=\tilde{u}_i^s(t)$ для $i=n_s+1,\ldots,n$, определяют ($z(0),T$)-траекторию в модели $\mathcal{M}$, где s =1,..., $k-1$. (Напомним, что $u^s(t)\in R_+^{\ell_s}$, а $\ell_s=n-n_s$; s =1,2,..., $k-1$).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть тройка $(\alpha,(\tilde{z},\tilde{W}),\tilde{p})$ определяет состояние равновесия в модели $\widetilde{\mathcal{M}}$, где $\tilde{z}=(\tilde{x},\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{k-1})$; $\tilde{W}=(\tilde{y},\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{k-1})$, а $(\tilde{z},\tilde{W})$ – оптимальная пара. Тогда, используя метод преобразования траекторий, применённый в лемме, получаем, что существует тройка $(\alpha,(z,W),p)$, которая определяет состояние равновесия в модели $\mathcal{M}$.

Вектор $z=(x,u_1,\ldots,u_{k-1})$, где $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $u_r=(u^r_{n_{r-1}+1},\ldots,u^r_{n_r})$, r =1,2,..., $k-1$, определяется с помощью вектора $\tilde{z}=(\tilde{x},\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_{k-1})$, где $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$; $\tilde{u}_r=(\tilde{u}_1^r,\ldots,\tilde{u}_n^r)$; r=1,2,..., $k-1$, следующим образом: $u_i^r=\tilde{u}_i^r$; $x_i=\tilde{x}_i$. Аналогично определяется вектор w и равновесные цены p.

Обратно, если тройка $(\alpha,(z,w),p)$ определяет состояние равновесия в модели $\mathcal{M}$, то существует тройка $(\alpha,(\tilde{z},\tilde{w}),\tilde{p})$, которая определяет состояние равновесия в модели $\widetilde{\mathcal{M}}$, где оптимальная пара $(\tilde{z},\tilde{w})$ определяется так:

$$\tilde{x}=x,$$

$$\tilde{u}_i^1=\begin{cases}\alpha x_i; & i=1,2,\dots,n_1,\\ u_i^1, & i=n_1+1,\dots,n,\end{cases}$$

$$\tilde{u}_i^2=\begin{cases}\alpha(u_i^1-\mu_i u_i^1), & i=1,2,\dots,n_2,\\ u_i^2, & i=n_2+1,\dots,n,\end{cases}$$

$$\tilde{u}_i^{k-1}=\begin{cases}\alpha u_i^{k-1}, & i=1,2,\dots,n_{k-1},\\ u_i^{k-1}, & i=n_{k-1}+1,\dots,n,\end{cases}$$

$$\tilde{w}=\alpha\tilde{u}.$$

Здесь считается, что оптимальная пара (z,w) выбрана так, что $w=\alpha z$, а это всегда можно сделать, так как в модели $\mathcal{M}$ имеются процессы уничтожения продуктов.

Из сказанного следует, что технологические темпы роста моделей $\mathcal{M}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}$ равны, а сами модели в некотором смысле подобны.

Итак, благодаря следствию из леммы I, мы можем, не уменьшая общности, исследовать модель $\mathcal{M}$, где каждый продукт требует для своего воспроизводства фонд, который должен пройти "до готовности" ровно $(k-1)$ промежуточное состояние. В дальнейшем всё исследование будет проведено именно для такой модели, поэтому все волнистые линии над переменными модели $\widetilde{\mathcal{M}}$ мы будем опускать. (В частности, будут опущены волнистые линии в формуле (8).)

Технологический конус Z модели $\mathcal{M}$ (см. (8)) можно описать и несколько иначе. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы пара $(x,u_1,\dots,u_{k-1},y,v_1,\dots,v_{k-1})\in Z$, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$
\begin{aligned}
&x \geqslant Ay + B_1(v_1 - \mu y) + B_2 v_2 + \cdots + B_{k-1} v_{k-1},\\
&u^s \geqslant v^{s-1} \geqslant 0,\ s = 3, \ldots, k-1,\\
&u^2 \geqslant v_1 - \mu y \geqslant 0,\\
&u^1 \geqslant y \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где A, B_s суть неотрицательные квадратные матрицы размером $n \times n$, в строках которых стоят векторы a_i, b_i^s соответственно (i =I,...,n; S =I,...,$k-1$), а μ есть диагональная матрица, i-й диагональный элемент которой есть μ_i (i =I,...,n).

(Напомним, что, согласно определению технологического конуса $\tilde{\tilde{Z}}$ (см. (8)) с помощью конуса Z (см. (7)), первые n_s строк матрицы B_s нулевые, а остальные строки совпадают с векторами b_i^s, $i = n_s$ +I,..., n; S =I,2,..., $k-1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, u_1, \ldots, u_{k-1}; y, v_1, \ldots; v_{k-1}) \in Z$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j^1 + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^s \xi_j^s + \eta_i^1,\\
&y_i = \xi_i^1; \quad i = 1, \ldots, n,\\
&v_i^1 = \xi_i^2 + \mu_i \xi_i^1; \quad i = 1, 2, \ldots, n,\\
&v_i^s = \xi_i^{s+1}; \ s = 2, \ldots, k-1; \ i = 1, 2, \ldots, n,\\
&u_i^s = \xi_i^s + \eta_i^{s+1}; \quad s = 1, 2, \ldots, k-1; \ i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Учитывая, что $\xi_i^s; \eta_i^s$ (i =I,2,..., n; S =I,2,.., $k-1$) неотрицательны, из (9) после небольших преобразований получаем (I0). Пусть теперь, наоборот, $(x, u_1, \ldots, u_{k-1}, y, v_1, \ldots, v_{k-1})$ удовлетворяет (9). Определим интенсивности этого процесса так:

$$
\begin{aligned}
&\xi_i^{s+1} = v_i^s; \ \xi_i^1 = y_i; \ \xi_i^2 = v_i^1 - \mu_i y_i; \ \eta_i^{s+1} = u_i^s - \xi_i^s,\\
&\eta_i^1 = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j^1 - \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \xi_j^s.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Нетрудно проверить, что так введенные интенсивности обеспечивают включение $(x, u_1, \ldots, u_{k-1}; y, v_1, \ldots, v_{k-1}) \in Z$, что и доказывает теорему.

Неравенство (9) есть, по сути дела, запись технологического конуса $\mathcal{Z}$ с помощью опорных гиперплоскостей.

СЛЕДСТВИЕ. Если процесс $(x, u_1, \ldots, u_{k-1}; y, v_1, \ldots, v_{k-1}) \in \mathcal{Z}$ не использует процессов уничтожения продуктов, то соотношения (9) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&x = Ay + B_1(v_1 - \mu y) + B_2 v_2 + \cdots + B_{k-1} v_{k-1}, \\
&u_s = v_{s-1} \geqslant 0, \qquad s = 1, \ldots, k-1, \\
&u_2 = v_1 - \mu y \geqslant 0, \\
&u_1 = y.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что $(x, u_1, \ldots, u_{k-1}; y, v_1, \ldots, v_{k-1})$ есть процесс с почти постоянным темпом роста, если

$$(x, u_1, \ldots, u_{k-1}; y, v_1, \ldots, v_{k-1}) = (x, u_1, \ldots, u_{k-1}; \alpha_1 x, \alpha_2 u_1, \ldots, \alpha_2 u_{k-1}) \tag{13}$$

где α_1, $\alpha_2 > 0$.

Из теоремы 2 легко следует

ЛЕММА 5. В модели $\mathfrak{M}$ имеется процесс с почти постоянным темпом роста тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2 \geqslant 1$ и $\bar{x} \in R^n_+$, такие что

$$\bar{x} \geqslant \alpha_1 [A + (B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_2^{k-2} B_{k-1})(\alpha_2 E - \mu)]\bar{x}. \tag{14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя равенства, вытекающие из (13), в неравенства (9), получаем (14), что и доказывает достаточность.

Наоборот, если существуют $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2 \geqslant 1$; $\bar{x} \in R^n_+$, удовлетворяющие (14), то определим векторы $\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}$; $\bar{u}_1 = \alpha_1 \bar{x}$; $\bar{v}_1 = \alpha_1 \alpha_2 \bar{x}$; $\bar{u}_i = \alpha_2^{i-2}(\alpha_2 \bar{x} - \mu \bar{x})\alpha_1$; $\bar{v}_i = \alpha_2 u_i$ $\quad i = 2, \ldots, k-1$.

Ввиду того, что $\alpha_2 \geqslant 1$, а $\mu_i \leqslant 1$ (где μ_i - i-й диагональный элемент матрицы μ), все определенные векторы неотрицательны. Непосредственной подстановкой (учитывая (14)) убеждаемся, что эти векторы удовлетворяют (9). На основании теоремы 2 отсюда следует, что процесс $(x, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{k-1}; \bar{y}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1}) \in \mathcal{Z}$; с другой стороны, из построения видно, что указанный процесс есть процесс с почти постоянным темпом роста.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в модели $\mathfrak{M}$ имеется процесс с почти постоянным темпом роста, при котором не используются базисные процессы уничтожения продуктов, то в (8) имеется строгое равенство. В случае, если $\alpha_2 \geq 1$, указанное равенство является и достаточным условием существования процесса с почти постоянным темпом роста, идущим без процессов уничтожения.

Если в определении I выполняется равенство $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, то тогда процесс $(\bar{x}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{k-1}; \bar{y}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1})$ называется процессом с постоянным темпом роста (само число α есть темп роста данного процесса). Из доказанной леммы имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы в $\mathfrak{M}$ существовал процесс с постоянным темпом роста, необходимо (а в случае $\alpha \geq 1$ и достаточно) выполнение равенства

$$\bar{x} \geq \alpha [A+(B_1+\alpha B_2+\cdots+\alpha^{k-2} B_{k-1})(\alpha E-\mu)]\bar{x}, \quad (15)$$

где $\bar{x} \in R^n_+$. Если еще известно, что в указанном процессе не употребляются базисные процессы уничтожения продуктов, то в (9) имеется строгое равенство.

Как известно ([2]), если $\bar{\alpha}$ есть технологический темп роста модели $\mathfrak{M}$, то ввиду того, что в данной модели существуют процессы уничтожения продуктов, в $\mathfrak{M}$ существует процесс с постоянным темпом роста, равным $\bar{\alpha}$. Из следствия 2 вытекает, что для нахождения этого процесса надо найти решения неравенства (15) с как можно большим α.

Таким образом, задача определения α сводится к задаче I, рассмотренной в § I, где $\bar{D}(\alpha)=A+(B_1+\alpha B_2+\cdots+\alpha^{k-2}B_{k-2})(\alpha E-\mu)$. Правда, для того, чтобы $\bar{D}(\alpha)$ была неотрицательной матрицей, мы должны рассматривать эту матричную функцию только для $\alpha \geqslant 1$ (напомним, что $\mu_i \leq 1$, где μ_i - диагональные элементы диагональной матрицы μ). Как следует из следствия к лемме 5, если в этом случае существует допустимое решение неравенства (I), то есть $Q \neq \emptyset$, то в модели имеется процесс с постоянным темпом роста, большим I. В свою очередь, это влечет, что $\bar{\alpha} \geqslant 1$. Наоборот, если $\bar{\alpha} \geqslant 1$, то, как сказано выше, это ведет к тому, что существует решение (I5) с $\bar{\alpha}$ и некоторым $\bar{x} \in R^n_+$; $\bar{x} \neq 0$, то есть $Q \neq \emptyset$.

Поэтому мы будем в дальнейшем предполагать, что $\bar{\alpha}$ (технологический темп роста модели) не меньше единицы (то есть $\alpha_0 = 1$). Это ограничение не является очень стеснительным. Действительно, если известна нижняя оценка β для $\bar{\alpha}$, то, заменив матрицы A, B_i на $\frac{1}{\beta}A; \frac{1}{\beta}B_i$ (i =I,2,..., $k-1$) и тем самым перейдя к новой модели $\mathcal{M}^\beta$, нетрудно проверить, что технологический темп роста у $\mathcal{M}^\beta$ уже не меньше единицы.

Итак, условие I леммы I при $\bar{\alpha} \geqslant 1$ выполнено. Условие 2 этой же леммы тоже выполняется, ибо $\bar{D}(\alpha) \geqslant A \neq \emptyset$, поэтому решение задачи I существует. Более того, если $(\bar{x}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{k-1}; \bar{\alpha}\bar{x}, \bar{\alpha}\bar{u}_1, \ldots, \bar{\alpha}\bar{u}_{k-1})$ есть ненулевой процесс с постоянным темпом роста, равным технологическому темпу роста модели, то пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ есть решение задачи I для $\bar{D}(\alpha)$. Действительно, согласно следствию 2 к лемме I, пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ удовлетворяет (I), поэтому если $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ не есть решение задачи I, то существует пара (α, x) , где $\alpha > \bar{\alpha}$; $x \in R^n_+$; $x \neq 0$, также удовлетворяющая (I). Из того же следствия получаем, что в этом случае в $\mathcal{M}$ существует процесс с постоянным темпом роста $\alpha > \bar{\alpha}$, что противоречит определению $\bar{\alpha}$.

Так как пара $(\bar{\alpha}, \bar{x})$ есть решение задачи I, то согласно лемме 2 выполняется равенство

$$\bar{x} = \bar{\alpha}[A + (B_1 + \bar{\alpha}B_2 + \cdots + \bar{\alpha}^{k-2}B_{k-1})(\bar{\alpha}E - \mu)]\bar{x}. \qquad (I6)$$

Это равенство показывает, что задержка по фондам уменьшает темп роста по степенному закону. Уменьшение амортизации фондов весьма сильно может увеличить темп роста модели. (Например, если $\bar{\alpha} = 1$ и $\mu_i = 1$; i =I,2,..., n, то задержка по фондам перестает влиять). Кроме того, из (I6) и следствия 2 к лемме 5 вытекает, что в оптимальном процессе не употребляются процессы уничтожения.

Вспомогательная задача 2 экономически означает отыскание такого процесса с почти постоянным темпом роста, у которого при фиксированном темпе роста фондов α был бы как можно более высокий темп роста продуктов $\beta(\alpha)$. Теперь весьма легко интерпретировать экономически теорему I и следствие из неё.

Из определения видно, что функция $\overline{D}(\alpha)$ непрерывная и монотонно возрастающая по α, поэтому если потребовать, чтобы $\overline{D}(\alpha)$ была неразложима (для этого достаточно, чтобы была неразложима матрица A или одна из матриц B_i (i=I,...,$k-1$)), то к семейству $\overline{D}(\alpha)$ может быть применен алгоритм, описанный в § I. Этот алгоритм дает возможность решить задачу I, то есть определить темп роста модели и оптимальный вектор $\overline{x}$, а, значит, и оптимальный процесс (см. доказательство леммы 5).

Описанный алгоритм существенно отличается от алгоритмов нахождения величины α, известных по литературе [4], [5]. Согласно алгоритму Вейля [4], надо было бы найти все решения задачи $\alpha\widetilde{A}x=\widetilde{B}x$, где $\widetilde{A},\widetilde{B}$ — матрицы затрат и выпуска модели $\mathcal{M}$ без учета процессов уничтожения (размерность этих матриц $(n\cdot k)\times(n\cdot k)$). После того, как все решения уравнения (I7) найдены, из них выбирается решение, отвечающее неотрицательному вектору x с максимальным α, это α и будет совпадать с $\overline{\alpha}$. Так как матрицы $\widetilde{A},\widetilde{B}$ в данном случае имеют размер $n\cdot k$, то даже при не очень больших n и k описанный алгоритм влечет непреодолимые вычислительные трудности. Правда, в данном случае матрица $\widetilde{B}$ имеет очень простой вид. Так, например, в случае $k=2$, матрица $\widetilde{B}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ \mu & E \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица размерности n. Поэтому легко вычислить $\widetilde{B}^{-1}$ ($\widetilde{B}^{-1}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\mu & E \end{pmatrix}$), и, следовательно, проблема нахождения темпа роста сводится к нахождению минимального собственного значения матрицы $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}$. Однако матрица $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}$ уже не является неотрицательной, и степенной процесс к ней, вообще говоря, неприменим. Так, в случае n=I, если a=I,75; b=0,75; μ=I, то степенной процесс сойдется к величине $\lambda_1=\frac{1}{2}$, а не к величине $\lambda_2=\frac{3}{2}$. Поэтому решение проблемы все равно повлечет применение методики Вейля.

В алгоритме В.И.Шмырева [5] элементарным шагом является решение задачи линейного программирования с $n\cdot k$ переменными и $n\cdot k$ ограничениями (для данного случая), что также трудно с вычислительной точки зрения.

Л и т е р а т у р а

1. Гейл Д., Замкнутая линейная модель производств. В сб. "Линейные неравенства и смежные вопросы". ИИЛ, М., 1959.
2. Макаров В.Л., Рубинов А.М., Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики. УМН, № 5 (1970).
3. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, "Наука", М., 1967.
4. R.L.Weil, An algorithm for the von Neuman Economy. Zeitchrift für Nationalökonomic, 24,4,1969.
5. Шмырёв В.И., Метод решения модели Неймана. Оптимальное планирование, II (1968), 76-87.
6. Фаддеев А.К., Фаддеева В.Н., Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.

Поступила в ред.-изд. отд.
15.У. 1971 г.