УДК 513.88

ЗАМЕЧАНИЕ О СВЯЗИ СЕЛЕКТОРОВ И ГЕНЕРАТОРОВ

С.С. Кутателадзе

Известно, что в некоторых случаях супремальные генераторы можно охарактеризовывать с помощью операторов, действующих из V в $C(Q)$ (здесь мы имеем в виду генераторы, относительно операторов со значениями в пространствах непрерывных функций $C(Q)$). В настоящей заметке обсуждается связь этой ситуации с теорией селекторов, построенной Майклом [1].

Пусть V (для удобства) – банахово пространство, Q – компактное пространство и T – некоторый оператор из V в $C(Q)$. В теории генераторов нас интересовали множества вида $Spr(T,H)$ (для положительного оператора T в случае, если в V выделен замкнутый конус) и множества $\{T': V \to C(Q): T'h \geq Th\ (h \in H);\ \|T'\| \leq \|T\|\}$ (для непрерывного оператора T). Каждый непрерывный оператор из V в $C(Q)$, как известно, определяется заданием слабо непрерывной (то есть непрерывной при наделении сопряженного пространства V' слабой топологией) функции $x \mapsto T_x$, где $x \in Q$ и $T_x \in V'$. Отображение $x \mapsto T_x$ и оператор T связаны соотношением $Tv(x) = T_x(v)$ для всех v из V и x из Q. Отметим еще, что отображение $x \mapsto T_x$ сильно непрерывно (то есть непрерывно при наделении V' сильной топологией) в том и только том случае, если оператор T компактный (вполне непрерывный).

Заметим, что непрерывный оператор T' входит в положительный росток положительного оператора T на конусе H в V в том и только том случае, если отображение $x \mapsto T_x'$ является слабо непрерывным селектором отображения

$$x \longmapsto Spr(T_x, H)(=(T_x + H^*) \cap K^*).$$

По тем же соображениям оператор $T': V \to C(Q)$ обладает тем свойством, что $T'h \geq Th$ для всех h из H и $\|T'\| \leq \|T\|$, в том и только том случае, если отображение $x \mapsto T_x$ является слабо непрерывным селектором отображения

$$x \longmapsto (T_x + H^*) \cap \|T\| S^\circ,$$

где S° - единичный шар в V'.

Используя результаты [2] и схему, предложенную в [3], можно установить следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть V — банахово пространство с замкнутым конусом K, а T — положительный непрерывный оператор из V в $C(Q)$. Имеют место импликации (I) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3), где

(I) конус H является супремальным генератором пространства V относительно каждого из функционалов T_x, где $x \in Q$;

(2) если последовательность положительных линейных операторов $T_n : V \to C(Q)$ такова, что при каждом h из H равномерный $\lim_n T_n h \geq Th$, то (T_n) сходится к T в сильной операторной топологии;

(3) любой оператор T' из $\mathcal{L}^+(V, C(Q))$ такой, что $T'h \geq Th$ для всех h из H, совпадает с T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует проверить только импликацию (I) $\Longrightarrow$ (2). Соответствующее рассуждение может быть проведено так же, как доказательство теоремы 3 из [3]. Заметим, что при этом существенно используется тот факт, что оператор T действует в пространство $C(Q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть V — банахово пространство и T — ограниченный оператор, $T: V \to C(Q)$. Имеют место импликации (I) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3), где

(1) конус $H\times(-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно каждого из функционалов $(T_x, \|T\|)$, где $x\in Q$;

(2) если последовательность (T_n) линейных операторов из V в $C(Q)$ такова, что при каждом h из H равномерный $\lim_n T_n h \geq Th$ и, кроме того, $\overline{\lim_n} \|T_n\| \leq \|T\|$, то (T_n) сходится к T в сильной операторной топологии;

(3) любой оператор T' из V в $C(Q)$ такой, что $\|T'\| \leq \|T\|$ и $T'h \geq Th$ для всех h из H, совпадает с T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается только импликация (1) $\Longrightarrow$ (2). Установим, прежде всего, что $H\times(-R_+)$ является супремальным генератором $V\times R$ относительно оператора $(T, \|T\|\mathbb{1})$, действующего из $V\times R$ в пространство ограниченных функций $B(Q)$. В самом деле, из (1) имеем

$$Tv(x) = \sup_{h\in H} (Th(x) - \|T\|\,\|v-h\|).$$

Помимо этого, так как супремум в $B(Q)$ является поточечным, имеем

$$\sup_{h\in H} (T'h - \|T\|\,\|v-h\|\mathbb{1})(x) = \sup_{h\in H} (Th(x) - \|T\|\,\|v-h\|) = Tv(x)$$

при всех v из V. Это как раз и означает нужное генерирование.

Используя теперь теорему 4.1 из [2], получаем, что

$$\lim_n \|T_n\|\mathbb{1} = \|T\|\mathbb{1},$$

или, иными словами, $\lim_n \|T_n\| = \|T\|$. Теперь уже можно переходить к доказательству равномерной сходимости $T_n v$ к Tv для каждого v из V. Для этого достаточно, например, перейти к порядковой надстройке и воспользоваться предложением 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение о банаховости, разумеется, несущественно.

Используя теорему Майкла или ее обобщения, можно получить утверждения, гарантирующие близость условий (3) и (1). Простей-

ним утверждением такого сорта служит, например,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть T - компактный оператор из V в $C(Q)$, а H - конус в V и $\varepsilon>0$ - фиксированное число. Если любой компактный оператор $T': V\to C(Q)$, обладающий теми свойствами, что $T'h\geq Th$ для всех h из H и $\|T'\|\leq(1+\varepsilon)\|T\|$, совпадает с T, то H является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно каждого из функционалов $(Tx, \|T\|)$, где $x\in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\Phi: Q\to 2^{V'}$, где $2^{V'}$ - соответствующее гиперпространство, определенное соотношением

$$\Phi(x)\triangleq(T_x+H^*)\cap Int((1+\varepsilon)\|T\|S^\circ).$$

Поскольку T - компактный оператор, то отображение Φ полунепрерывно снизу (если наделить V' сильной топологией). Пусть

$$\mu_0\in(T_{x_0}+H^*)\cap\|T\|S^\circ\subset\Phi(x_0).$$

Отображение $\Phi_{x_0}: Q\to 2^{V'}$, действующее по формуле $\Phi_{x_0}(x)\triangleq$ $\triangleq\Phi(x)$ при $x\neq x_0$ и $\Phi_{x_0}(x_0)=\mu_0$, тоже полунепрерывно снизу. По теореме Майкла найдется сильно непрерывный селектор φ отображения $x\mapsto\overline{\Phi_{x_0}(x)}$. Положим $T'v(x)\triangleq\varphi(x)(v)$. Имеем $\overline{\Phi_{x_0}(x_0)}=\mu_0$, и для точки x, не совпадающей с x_0,

$$\overline{\Phi_{x_0}(x)}=\overline{(T_x'+H^*)\cap Int((1+\varepsilon)\|T\|S^\circ)}\subset$$

$$\subset(T_x+H^*)\cap(1+\varepsilon)\|T\|S^\circ.$$

Таким образом, $T'h\geq Th$ для всех h из H, и, кроме того, $\|T'\|\leq(1+\varepsilon)\|T\|$. По условию, $T'=T$, следовательно, $\mu_0(v)=T'v(x_0)=Tv(x_0)=T_{x_0}(v)(v\in V)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичный факт верен и для положительных компактных операторов.

Укажем теперь на связь рассматриваемых вопросов с теорией сублинейных операторов.

Пусть T — непрерывный линейный оператор, действующий из сепарабельного банахова пространства V в пространство $C(Q)$, а H — некоторый конус в V. Допустим, далее, что отображение $t \mapsto p_t(v)$ непрерывно при всяком v из V, где p_t — опорная функция множества $(T_t + H^*) \cap \|T\| S^\circ$. При сделанном предположении отображение

$$P : v \mapsto (t \mapsto p_t(v)) \qquad (1)$$

является сублинейным оператором со значениями в $C(Q)$. Оператор P, очевидно, ограничен, и, следовательно, соответствующее ему отображение $t \mapsto (T_t + H^*) \cap \|T\| S^\circ$ является слабо полунепрерывным снизу (этот факт установлен Ю.Э.Линке). Таким образом, в данной ситуации в полном объеме справедлива теорема о связи генератора с поведением операторов. Приведем здесь только ее наиболее существенную часть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть V — сепарабельное банахово пространство, $T: V \to C(Q)$ — непрерывный оператор, а H — конус в V, причем оператор P, определенный формулой (1), действует в $C(Q)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(1) Конус $H \times (-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно каждого из функционалов $(T_t, \|T\|)$, где $t \in Q$.

(2) Если оператор T' из V в $C(Q)$ таков, что $\|T'\| \le \|T\|$ и, кроме того, $T'h \ge Th$ для всех h из H, то T' совпадает с T.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие, наложенное на оператор P, является существенным. В самом деле, пусть $Q \triangleq \{x \in R^2 : |x| = 1, x_2 \ge 0\}$. Пусть, далее, $V = C(Q)$ и I — тождественный оператор. Положим $a \triangleq (-1, 0)$; $b \triangleq (1, 0)$ и рассмотрим произвольный компакт Q' такой, что $Q' \subset Q \setminus \{a, b\}$. Через $I_{Q'}$ обозначим оператор сужения $I_{Q'} : C(Q) \to C(Q')$, то есть $I_{Q'} : f \mapsto f|_{Q'}$. Пусть H — подпространство следов линейных функций на Q

Очевидно, что $H\times(-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора ($I_{Q'}$, $\mathbb{1}$). Отсюда следует, что для всякого оператора T из $C(Q)$ в $C(Q)$ такого, что $\|T\|\leq 1$ и $Th=h$ для всех h из H , имеет место равенство $T=I$. С другой стороны, на H совпадают меры ε_a и $-\varepsilon_b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема Майкла позволяет, очевидно, изучать операторы со значениями в пространстве $BC(Q)$ непрерывных ограниченных функций на паракомпактном пространстве Q . Отметим связанную с этой возможностью стандартную особенность. Именно, $BC(Q)$, очевидно, является решеткой Канторовича - Банаха с сильной единицей ($=KB$ -линеалом ограниченных элементов), а потому может быть реализовано, как пространство $C(\hat{Q})$, где $\hat{Q}$ - некоторый компакт. Этот факт позволяет получить теоремы о связи свойств сходимости и однозначной определенности оператора со значениями в $BC(Q)$ на основе ранее приведенных утверждений. Однако для получения связи с генераторами относительно соответствующих функционалов следует использовать возможность рассмотрения паракомпакта, так как при использовании конструкции погружения в $C(\hat{Q})$ возникающие условия на точки $\hat{Q}$, естественно, трудно проверяемы.

Литература

1. MICHAEL E. Continuous selections, Ann. Math., 1956, v.64, N.3, p.562-580.

2. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Супремальные генераторы относительно операторов.- Настоящий сборник, стр. 23-41.

3. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору.-Сиб. мат. журн., 1972, т.13, № 2, стр. 464-466.

Поступила в ред.-изд. отд.
17.IУ. 1972 г.