УДК 517.93

К ВОПРОСУ ОБ АФФИННО-ИНВАРИАНТНЫХ ТОЧКАХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

П.А. Кучмент

Пусть R^n - вещественное n -мерное пространство. Обозначим через W_n множество компактных выпуклых множеств в R^n с непустой внутренностью (мы будем называть их выпуклыми телами). На W_n рассматривается топология, задаваемая метрикой Хаусдорфа (см. [I]). Пусть G - некоторая компактная подгруппа $GL(n)$ (группы обратимых линейных преобразований R^n). Обозначим через Π группу аффинных преобразований, получающихся суперпозицией переносов и преобразований из G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Π -инвариантной точкой называется непрерывное отображение $p: W_n \to R^n$ такое, что $p(A(K)) = A(p(K))$ для любого $K \in W_n$ и $A \in \Pi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Π -инвариантная точка p такая, что $p(K) \in K$ для всех $K \in W_n$, называется Π -инвариантной точкой тела.

В дальнейшем мы будем говорить просто Π -и. точка и Π -и. точка тела.

Обозначим через Π_K подгруппу всех преобразований из Π, являющихся автоморфизмами тела $K \in W_n$. Поставим вопрос о соотношении Π -и. точек и неподвижных точек групп Π_K .

ТЕОРЕМА. а) Пусть $x_0 \in \operatorname{Int} K$ (внутренность K) - точка, инвариантная относительно Π_K . Тогда существует Π -и. точка тела $p: W_n \to R^n$ такая, что $p(K) = x_0$.

б) Множество точек из R^n, инвариантных относительно Π_K, совпадает со множеством значений на K всех Π-и. точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством первого утверждения, так как второе доказывается аналогично. Нам потребуется описание некоторых новых объектов. Все требуемые свойства эквивариантных расслоений можно найти в работе [2].

Рассмотрим пространство W_n^o, определяемое как множество классов $\{K\}$ эквивалентности тел K по отношению эквивалентности, определяемому параллельными переносами тел. На W_n^o определим метрику по формуле

$$\rho(\{K_1\},\{K_2\}) = \inf_{\substack{K_i\in\{K_i\}\\ i=1,2}} \rho(K_1,K_2).$$

На W_n^o естественным образом действует группа $GL(n)$ и, следовательно, G:

$$g(\{K\})=\{g(K)\} \qquad \text{для} \quad g\in GL(n).$$

Рассмотрим тривиальное расслоение $\mathcal{E}=W_n^o\times R^n$ над W_n^o. На нем определяется структура тривиального G-расслоения:

$$g(\{K\},x)=(g\{K\},g(x)).$$

Определим теперь эквивариантное подрасслоение $\mathcal{K}\subset\mathcal{E}$ следующим образом: пусть K - представитель $\{K\}\in W_n^o$, тогда слоем $\mathcal{K}$ над $\{K\}$ будем считать тело $K\subset R^n$, перенесенное так, чтобы центр его тяжести совместился с началом координат O. Из непрерывной зависимости центра тяжести от $\{K\}$ (см. [I]) следует, что $\mathcal{K}$ действительно есть расслоение. Во введенных обозначениях Π-и. точка есть инвариантное сечение расслоения $\mathcal{E}$, а Π-и. точка тела есть инвариантное сечение расслоения $\mathcal{K}$. Утверждение а) теоремы можно теперь переформулировать следующим образом: пусть $x_o\in Int\,K$ и x_o инвариантна относительно G_K (определение G_K аналогично определению Π_K), тогда существует инвариантное сечение ρ расслоения $\mathcal{K}$ такое, что $\rho(\{K\})=(\{K\},x_o)$. В такой форме мы и будем его доказывать. Известно, что W_n^o локально компактно (см. [I]). Выберем относительно компактную окрестность $\mathcal{U}\ni\{K\}$. Тогда, в силу компактности G, орбита

$G(\mathcal{V})$ также компактна. Сузим на $G(\mathcal{V})$ расслоение $\mathcal{E}$. Рассмотрим над $G(\{K\})$ сечение δ : $\delta(g\{K\})=g(x_o)$. Известно (см.[2]), что его можно (в силу замкнутости $G(\{K\})$ и компактности $G(\mathcal{V})$) продолжить до инвариантного сечения δ суженного расслоения $\mathcal{E}|_{G(\mathcal{V})}$. Заметим, что $\delta(\{K\})=(\{K\},x_o)$. Из того, что $x_o \in \mathcal{I}nt\,K$, следует, что найдется окрестность $\mathcal{U}$ орбиты $G(\{K\})$ такая, что на ней $\delta(\{F\})\in F$. Можно считать (в силу компактности G) окрестность $\mathcal{U}$ инвариантной относительно G. Рассмотрим покрытие W_n^o двумя G -инвариантными окрестностями $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_2=W_n^o\setminus G(\{K\})$. Найдем (что возможно в силу метризуемости W_n^o) подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_i\}$ разбиение единицы $\{\varphi_i\}$. Можно считать, что $\varphi_i(g\{K\})=\varphi_i(\{K\})$ для всех $g\in G$ и $\{K\}\in W_n^o$, иначе, можно положить

$$\varphi_i'(\{K\})=\int\limits_G \varphi_i(g\{K\})\,d\mu(g),$$

где $\mu(g)$ - нормированная мера Хаара на G. Положим теперь

$$\rho(\{K\})=\varphi_1(\{K\})\delta(\{K\})+\varphi_2(\{K\})\Theta(\{K\}),$$

где $\Theta(\{K\})$ - нулевое сечение $\mathcal{K}$, то есть центр тяжести K. Очевидно, что ρ есть инвариантное сечение $\mathcal{K}$, причем $\rho(\{K\})=(\{K\},x_o)$. Теорема доказана.

В работе [I] исследованный вопрос был поставлен для аффинно-инвариантных и подобно-инвариантных точек, то есть в случаях, когда $G=GL(n)$ и G - группа всех преобразований, сохраняющих ортогональность, соответственно. Обе эти группы некомпактны, то есть непосредственно не удовлетворяют условиям теоремы. Во втором случае можно все-таки свести рассмотрение к исследованному случаю. Действительно, можно считать, что объем K равен 1. Построим требуемое сечение ρ для классов $\{K\}$ тел единичного объема, что возможно, ибо в этом случае рассмотрение сводится к случаю ортогональной группы $O(n)$, которая компактна. Затем для тела F произвольного объема V положим

$$\rho(\{F\})=V^{\frac{1}{n}}\rho(\{V^{-\frac{1}{n}}F\}).$$

Очевидно, что это требуемое сечение. Итак, для проективно-инвариантных точек ответ получен. Для случая же $G=GL(n)$ описанная редукция к телам единичного объема не помогает, ибо приводит к рассмотрению некомпактной группы матриц с определителем, равным ± 1. Трудность заключается в построении описанного в доказательстве инвариантного сечения $\mathcal{E}|_{G(x)}$, где $G = GL(n)$. Утверждение теоремы, вероятно, верно и в этом случае. В работе [I] поставлен вопрос о том, можно ли множество всех подобно-инвариантных точек тела K получить как выпуклую оболочку конечного числа из них. Из доказанного результата следует, что это не так. Построим контрпример. Для этого рассмотрим координатную гиперплоскость $x_1 = 0$ в R^n и в ней выпуклое ($n-1$)-мерное тело K' такое, что для него единственным автоморфизмом-подобием является единичный оператор I. Построим n-мерное тело K так, что в него попадут точки вида (x_1, y), где $|x_1| \leq 1$, $\frac{y}{1-x_1} \in K'$ при $x_1 > 0$ и $\frac{y}{x_1+1} \in K'$ при $x_1 < 0$, а также само тело K' и точки $(1, \theta)$, $(-1, \theta)$. Это так называемая надстройка над телом K'. Тогда очевидно, что множество подобно-инвариантных точек K содержит $\mathcal{I}nt\, K'$ и содержится в K'. Если K' не многогранник, то такое множество нельзя получить как выпуклую оболочку конечного числа точек.

В заключение автор выражает благодарность своему руководителю С.Г.Крейну, а также М.Г.Зайденбергу и А.А.Панкову за обсуждение задачи и ценные замечания.

Литература

1. GRUNBAUM B. Measures of asymmetry of convex sets, Proc. Simp. Pure Math. (Convexity), Providence, 1963, p.233-270, русский перевод в книге Б.Грюнбаума "Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел", М., 1971.

2. ХЬЮЗМОЛЛЕР Д. Расслоенные пространства. "Мир", 1970.

Поступила в ред.изд. отд.
23. II. 1972 г.