УДК 513.88

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПОРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ К СУБЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРАМ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В $C(Q)$

Ю.Э.Линке

В статье изучаются сублинейные операторы, т.е. субаддитивные, положительно однородные, ограниченные отображения банахова пространства X в KB -линеал $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q с топологией равномерной сходимости и естественной упорядоченностью. Линейный (ограниченный) оператор $A:X\to C(Q)$ называется опорным, если $Ax\le Px$ для каждого $x\in X$. Множество Ω_P всех опорных к сублинейному оператору P называется опорным множеством. В статье для сепарабельных X доказывается существование опорных операторов к сублинейным операторам (п. 3); дается описание опорных множеств (п. 4).

Сублинейные операторы, действующие в K -пространство (в нашем случае, когда Q - экстремальный компакт), изучались в связи с теоремой Хана-Банаха Л.В.Канторовичем [1]. В последнее время они рассматривались в различных вопросах выпуклого анализа [2, 3]. Интересные применения сублинейных (надлинейных) операторов даны в [4]. Эти операторы находят применение также при изучении моделей экономической динамики [5].

Сублинейные операторы, действующие в $C(Q)$ (и вообще в K -линеалы), принципиально отличаются от сублинейных операторов, действующих в K -пространство, по-видимому, тем, что первые не имеют, вообще говоря, опорных в точке, т.е. существует сублинейный оператор P, для которого в некоторой точке $x_0\in X$ не существует опорного оператора $A\in\Omega_P$ такого, что $Ax_0=Px_0$.

Пример такого оператора приводится в п.5. Тем самым сублинейные операторы, действующие в $C(Q)$, не могут быть изучены с помощью теоремы Хана-Банаха.

В статье сублинейные операторы изучаются с помощью теорем о непрерывных селекторах и теоремы о представлении сублинейных операторов (п. 2), обобщающей теорему о представлении линейных операторов, действующих в $C(Q)$. Для этого в п. I с каждым сублинейным оператором связывается некоторое многозначное отображение Φ_p и показывается, что задача о существовании опорного оператора эквивалентна существованию непрерывного селектора отображения Φ_p.

I. Пусть $P: X \to C(Q)$ - сублинейный оператор. Свяжем с ним семейство сублинейных функционалов (сублинейных операторов, действующих в $C(Q)$, где компакт Q состоит из одной точки) $p_t\,(t \in Q)$ такое, что $p_t(x) = (Px)(t)$. Известно, что сублинейный функционал p_t представляется в виде

$$p_t : x \longrightarrow \sup_{\ell \in \Omega_t} \ell(x),$$

где опорное множество $\Omega_t \subset X'$ не пусто, выпукло, замкнуто в топологии $\sigma(X', X)$ и ограничено [6]. Обозначим через $\mathcal{K}(X')$ совокупность всех не пустых, выпуклых, замкнутых в топологии $\sigma(X', X)$ и ограниченных множеств пространства X'. Каждый сублинейный оператор P порождает (многозначное в X') отображение $\Phi_p : Q \longrightarrow \mathcal{K}(X')$, которое каждому $t \in Q$ сопоставляет опорное множество Ω_t сублинейного функционала p_t.

Отождествляя линейный оператор $A: X \to C(Q)$ с непрерывным в топологии $\sigma(X', X)$ отображением $\varphi: Q \to X'$, определяемом при каждом $t \in Q$ соотношением (см. теорему Б. в п.2) $(Ax)(t) = \varphi(t)(x)\,(x \in X)$, получаем простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Линейный оператор A опорен к сублинейному оператору P тогда и только тогда, когда порождающая непрерывная функция φ является селектором отображения Φ_p (т. е. $\varphi(t) \in \Phi_p(t)$ при каждом $t \in Q$).

Напомним важное в теории непрерывных селекторов [8]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ (Q, Y - топологические пространства) называется полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset Y$ множество $\{t \in Q : \Phi(t) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ открыто.

Как отмечено в [8], условие полунепрерывности снизу отображения Φ является необходимым для существования непрерывного селектора, проходящего через любую (но фиксированную) точку графика отображения Φ. Там же установлена

ТЕОРЕМА А. (Майкл [8]). Если Q - паракомпакт, Y - банахово и полунепрерывное снизу многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ таково, что множество $\Phi(t)$ не пусто, выпукло, замкнуто для всех $t \in Q$, то существует непрерывный селектор $\varphi: Q \to Y$ отображения Φ.

Таким образом, возникает необходимость в изучении топологических свойств отображения Φ_p, которое и приведет нас к нужной теореме о существовании непрерывных селекторов, т.к. одной теоремы А недостаточно.

2. Общий вид линейного оператора описывает

ТЕОРЕМА Б ([7], стр. 528). Пусть Q - компакт, A - линейный оператор, отображающий банахово пространство X в $C(Q)$. Тогда существует такое непрерывное в топологии $\sigma(X', X)$ пространства X' отображение $\varphi: Q \to X'$, что

$$(Ax)(t) = \varphi(t)(x), \quad x \in X, \ t \in Q, \tag{1}$$

$$\|A\| = \sup_{t \in Q} \|\varphi(t)\|. \tag{2}$$

Обратно, если задано такое отображение φ, то оператор A, определяемый равенством (1), есть линейный оператор, отображающий X в $C(Q)$, с нормой, опреде-

ляемой равенством (2). При этом оператор A компактен тогда и только тогда, когда φ непрерывно в топологии, определяемой нормой пространства X'.

Цель этого пункта - доказать аналогичную теорему для сублинейных операторов, причем, забегая вперед, отметим, что роль непрерывных отображений будут играть непрерывные в топологии Хаусдорфа отображения Q в $\mathcal{K}(X')$. В связи с этим напомним ряд определений и отметим связи между ними, необходимые для дальнейшего. Пусть Q - топологическое, а Y - топологическое векторное пространство. Уточним определение полунепрерывности снизу, данное в п. I для произвольного топологического пространства Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ называется полунепрерывным снизу, если для любых точек $t_0 \in Q$, $\ell_0 \in \Phi(t_0)$ и каждой окрестности[ж)] нуля $\mathcal{U}$ в Y найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 (вообще говоря, зависящая и от выбранного ℓ_0) такая, что

$$\Phi(t) \cap (\ell_0 + \mathcal{U}) \neq \emptyset, \quad t \in V(t_0). \tag{3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ называется равномерно полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу и окрестность $V(t_0)$ можно выбрать одну для всех $\ell_0 \in \Phi(t_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ называется полунепрерывным сверху, если для каждой точки $t_0 \in Q$ и любой окрестности нуля $\mathcal{U}$ в Y найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 такая, что

$$\Phi(t) \subset \Phi(t_0) + \mathcal{U}, \quad t \in V(t_0). \tag{4}$$

В пространстве 2^Y всех не пустых подмножеств пространства Y вводится топология Хаусдорфа. Окрестности любой точки $A \in 2^Y$ образуют множества вида:

$$\mathcal{U}_A = \{B \in 2^Y : A \subset B + \mathcal{U};\ B \subset A + \mathcal{U}\},$$

где $\mathcal{U}$ - окрестность нуля в Y.

ж) Под окрестностью понимается всегда открытая окрестность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Многозначное отображение $\Phi: Q \to Y$ называется полунепрерывным снизу в топологии Хаусдорфа, если для каждой точки $t_0 \in Q$ и любой окрестности нуля $\mathcal{U}$ в Y найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 такая, что

$$\Phi(t_0) \subset \Phi(t) + \mathcal{U}, \quad t \in V(t_0). \qquad (5)$$

Отметим, что полунепрерывность сверху в топологии Хаусдорфа совпадает с определением 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Phi: Q \to Y$ - многозначное отображение.

а) Отображение Φ равномерно полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда Φ полунепрерывно снизу в топологии Хаусдорфа.

б) Если $\Phi(t)$ - компакт при любом $t \in Q$, то из полунепрерывности снизу отображения Φ следует его равномерная полунепрерывность снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть Φ равномерно полунепрерывно снизу, тогда для каждого $\ell_0 \in \Phi(t_0)$ и любого $t \in V(t_0)$ найдутся $\ell_t \in \Phi(t)$ и $u_t \in \mathcal{U}$ такие, что $\ell_t = \ell_0 + u_t$. Тогда $\ell_0 = \ell_t - u_t$ и, следовательно, $\ell_0 \in \Phi(t) + \mathcal{U}$ (так как $\mathcal{U}$ можно считать симметричной окрестностью). В силу произвольности выбора ℓ_0 справедлива формула (5) при $t \in V(t_0)$. Таким образом, Φ полунепрерывно снизу в топологии Хаусдорфа. Повторяя эти рассуждения в обратном порядке, мы получим, что из полунепрерывности снизу в топологии Хаусдорфа вытекает равномерная полунепрерывность снизу.

б) Пусть точка $t_0 \in Q$ и окрестность нуля $\mathcal{U}$ в Y выбраны произвольно. Для доказательства равномерной полунепрерывности снизу требуется найти окрестность $V(t_0)$ такую, что

$$\Phi(t) \cap (\ell_0 + \mathcal{U}) \neq \emptyset, \quad t \in V(t_0), \quad \ell_0 \in \Phi(t_0).$$

Пусть $\mathcal{U}_0$-окрестность нуля в Y такая, что $\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Из открытого покрытия компакта $\Phi(t_0)$ множествами вида $\ell_0 + \mathcal{U}_0$, где $\ell_0 \in \Phi(t_0)$, выберем конечное покрытие. Пусть это будут $\ell_1 + \mathcal{U}_0, \dots, \ell_n + \mathcal{U}_0$. Найдем окрестности $V_i(t_0)$, соот-

ветствующие ℓ_i и $\mathcal{U}_0$ в определении полунепрерывности снизу. Пусть $V(t_0)=\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i(t_0)$. Покажем, что $V(t_0)$ -искомая окрестность. Фиксируем $\ell_0\in\Phi(t_0)$. Тогда найдется ℓ_i такой, что $\ell_0\in\ell_i+\mathcal{U}_0$, т.е. $\ell_0=\ell_i-u_0$, где $u_0\in\mathcal{U}_0$. Для каждого $t\in V(t_0)$ найдется ℓ_t такой, что $\ell_t=\ell_i+u_i$, где $\ell_t\in\Phi(t)$, $u_i\in\mathcal{U}_0$, поэтому $\ell_t=\ell_0+u_0+u_i$ и, следовательно,

$$\Phi(t)\cap(\ell_0+\mathcal{U})\neq\emptyset,\quad t\in V(t_0),\ \ell_0\in\Phi(t_0),$$

что и требовалось показать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело с многозначными отображениями Q в $\mathcal{H}(X')$ и X' будем рассматривать в двух топологиях, то условимся говорить "слабо", если имеется в виду топология $\sigma(X',X)$, и "сильно", если топология в X' определяется нормой.

В следующем предложении устанавливаются топологические свойства отображений Φ_p.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отображение Φ_p, соответствующее сублинейному оператору P, непрерывно в слабой топологии Хаусдорфа.

Для доказательства нужна

ЛЕММА. Пусть P -сублинейный оператор, $P:X\to C(Q)$. Если сеть $y_\alpha\in X$ сходится к y_0 и сеть $t_\alpha\in Q$ сходится к t_0, тогда сеть $p_{t_\alpha}(y_\alpha)$ сходится к $p_{t_0}(y_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сублинейных операторов так же, как и для сублинейных функционалов, из ограниченности вытекает их непрерывность. Следовательно, $Py_\alpha\to Py_0$ равномерно в $C(Q)$. Поэтому доказательство завершает следующее неравенство

$$|p_{t_\alpha}(y_\alpha)-p_{t_0}(y_0)|\le|(Py_\alpha)(t_\alpha)-(Py_0)(t_\alpha)|+|(Py_0)(t_\alpha)-(Py_0)(t_0)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения. а) Для доказательства полунепрерывности снизу в слабой топологии Хаусдорфа отображения Φ_p достаточно, в силу предложения 2 (множество $\Phi_p(t)$ слабо компактно для каждого $t\in Q$), показать, что оно слабо полунепрерывно снизу.

Допустим, что Φ_p не слабо полунепрерывно снизу. Тогда найдутся $t_0 \in Q$, слабая окрестность нуля $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon, x_1, \dots, x_n)$, и для некоторого $\ell_0 \in \Phi_p(t_0)$ найдется сеть $t_\alpha \to t_0$ такая, что $\Phi_p(t_\alpha) \cap (\ell_0 + \mathcal{U}) = \emptyset$. По теореме отделимости найдутся $y_\alpha \in X$, $\|y_\alpha\| = 1$, разделяющие $\Phi_p(t_\alpha)$ и $\ell_0 + \mathcal{U}$, т.е.

$$\ell(y_\alpha) \le \ell_0(y_\alpha) - \varepsilon \quad , \quad \ell \in \Phi_p(t_\alpha) \quad . \tag{6}$$

Заметим, что y_α принадлежат поляре $\mathcal{U}$, следовательно, лежат в плоскости, натянутой на $x_1, x_2, \dots, x_n$, и

$$y_\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k^\alpha x_k$$

Сети (c_k^α) ограничены. Не уменьшая общности, считаем, что $c_k^\alpha \to c_k^0$ ($k = 1, \dots, n$). И поэтому $y_\alpha \to y_0$. Из неравенства (6) следует, что

$$p_{t_\alpha}(y_\alpha) \le \ell_0(y_\alpha) - \varepsilon \ .$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве и используя лемму, получаем

$$p_{t_0}(y_0) \le \ell_0(y_0) - \varepsilon \ ,$$

что противоречит соотношению $\ell_0 \in \Phi_p(t_0)$. Следовательно, Φ_p слабо полунепрерывно снизу.

б) Допустим, что Φ_p не слабо полунепрерывно сверху. Тогда найдутся точка $t_0 \in Q$, сеть $t_\alpha \to t_0$, слабая окрестность нуля $\mathcal{U}$ и $\ell_\alpha \in \Phi_p(t_\alpha)$ такие, что $\ell_\alpha \notin (\Phi_p(t_0) + \mathcal{U})$. Отделяя ℓ_α от $\Phi_p(t_0) + \mathcal{U}$ элементами $y_\alpha \in X$, $\|y_\alpha\| = 1$, получаем

$$\ell_\alpha(y_\alpha) \ge \ell(y_\alpha) + \varepsilon, \quad \ell \in \Phi_p(t_0) \ .$$

Поэтому

$$p_{t_\alpha}(y_\alpha) \ge \ell_\alpha(y_\alpha) \ge p_{t_0}(y_\alpha) + \varepsilon \ . \tag{7}$$

Так же, как и в а), можно считать, что $y_\alpha \to y_0$. Переходя к пределу в (7), снова получаем противоречие. Предложение доказано.

Для компактных сублинейных операторов предложение 3 можно уточнить. Сублинейный оператор называется компактным, если он переводит шар в X в относительно компактное (в топологии равномерной сходимости $C(Q)$) множество. По теореме Арцела-

-Асколи сублинейный оператор компактен тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon>0$ и любой точки $t_0\in Q$ найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 такая, что при $t\in V(t_0)$ и $\|x\|\leq 1$ выполнены неравенства

$$(Px)(t_0)-\varepsilon\leq(Px)(t)\leq(Px)(t_0)+\varepsilon. \tag{8}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Отображение Φ_P, соответствующее компактному сублинейному оператору P, непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что Φ_P не полунепрерывно снизу в сильной топологии Хаусдорфа. Тогда найдутся точка $t_0\in Q$, шар $B(0,\varepsilon)$ в X' радиуса $\varepsilon>0$, сеть $t_\alpha\to t_0$, $\ell_\alpha\in\Phi_P(t_0)$ такие, что

$$\ell_\alpha\notin(\Phi_P(t_0)+B(0,\varepsilon)).$$

Поэтому найдутся $y_\alpha\in X$, $\|y_\alpha\|=1$, отделяющие ℓ_α от $\Phi_P(t_\alpha)+B(0,\varepsilon)$, т.е.

$$\ell_\alpha(y_\alpha)\geqslant\ell(y_\alpha)+\varepsilon,\quad \ell\in\Phi_P(t_\alpha)\ldots$$

Откуда следует, что

$$P_{t_0}(y_\alpha)\geqslant\ell_\alpha(y_\alpha)\geqslant P_{t_\alpha}(y_\alpha)+\varepsilon. \tag{9}$$

Для точки $t_0\in Q$ по $\varepsilon/2$ найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 такая, что выполнены неравенства (8) с $\varepsilon/2$. Поэтому при $t_\alpha\in V(t_0)$ имеем

$$P_{t_0}(y_\alpha)\leq P_{t_\alpha}(y_\alpha)+\varepsilon/2,$$

что противоречит (9). Аналогично можно доказать и полунепрерывность сверху в сильной топологии Хаусдорфа. Предложение доказано.

Теперь мы переходим к теореме об общем виде сублинейного оператора.

ТЕОРЕМА I. Пусть Q - компакт, P - сублинейный оператор, отображающий банахово пространство X в $C(Q)$. Тогда существует такое непрерыв-

ное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $\Phi: Q \longrightarrow \mathcal{W}(X')$, что

$$(Px)(t) = \sup_{\ell \in \Phi(t)} \ell(x), \tag{IO}$$

$$\|P\| = \sup_{t \in Q} \sup_{\ell \in \Phi(t)} \|\ell\|. \tag{II}$$

Обратно, если задано такое отображение Φ, то оператор P, определяемый равенством (IO), есть сублинейный оператор, отображающий X в $C(Q)$, с нормой, определяемой равенством (II). При этом оператор P компактен в том и только в том случае, если Φ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Сублинейному оператору P сопоставим отображение Φ_P. По предложению 3 Φ_P удовлетворяет всем условиям теоремы. Если оператор P компактен, то надо сослаться на предложение 4.

Достаточность. Пусть задано отображение Φ, удовлетворяющее условиям теоремы. Покажем, что формула (II) определяет сублинейный оператор, действующий из X в $C(Q)$. Вначале установим, что оператор P, определенный формулой (IO), действует в $C(Q)$. Покажем, что функция Px непрерывна при любом $x \in X$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим слабую окрестность нуля $\mathcal{U}$ в X' вида $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon, x) = \{\ell \in X' : |\ell(x)| < \varepsilon\}$. Для каждой точки $t_0 \in Q$ найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 и $\Phi(t) \subset \Phi(t_0) + \mathcal{U}$, $\Phi(t_0) \subset \Phi(t) + \mathcal{U}$ при $t \in V(t_0)$. Откуда следует, что

$$(Px)(t_0) - \varepsilon \leq (Px)(t) \leq (Px)(t_0) + \varepsilon$$

при $t \in V(t_0)$, что и доказывает непрерывность Px.

Теперь покажем, что отображение P сублинейно. Полуаддитивность и положительная однородность очевидны. Осталось доказать ограниченность отображения P, которая эквивалентна ограниченности множества $\Phi(Q) = \bigcup_{t \in Q} \Phi(t)$ в X'. Ограниченность

последнего множества вытекает из его слабой компактности в X', которую легко показать, используя полунепрерывность сверху отображения Φ и слабую компактность множеств $\Phi(t)$ $(t \in Q)$.

Для завершения доказательства осталось показать, что если отображение Φ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа, то оператор P компактен. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда для каждой точки $t_0 \in Q$ найдется окрестность $V(t_0)$ точки t_0 такая, что верны включения:

$$\Phi(t) \subset \Phi(t_0) + B(0,\varepsilon)\ ;\ \Phi(t_0) \subset \Phi(t) + B(0,\varepsilon)$$

при $t \in V(t_0)$. Отсюда следует, что для оператора P справедливы неравенства (8). Компактность P установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из теоремы I вытекает теорема Б в силу того, что однозначное отображение $\Phi : Q \longrightarrow \mathcal{H}(X')$ непрерывно в сильной (слабой) топологии Хаусдорфа тогда и только тогда, когда Φ сильно (слабо) непрерывно в X'.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема I остается справедливой, если компакт Q заменить произвольным топологическим пространством, а $C(Q)$ - пространством $BC(Q)$-ограниченных непрерывных функций с топологией равномерной сходимости и при этом в условии теоремы потребовать ограниченность в X' множества $\Phi(Q)$. Отметим, что приведенное выше доказательство проходит дословно также и в этом случае.

3. Из результатов двух предыдущих пунктов ясно, что существование опорных операторов к сублинейному оператору P следует из существования слабо непрерывных селекторов отображения Φ_p. На самом деле справедлива более точная

ТЕОРЕМА 2. Пусть X - сепарабельное банахово пространство. Пусть Φ отображает компакт[ж)] Q в $\mathcal{H}(X')$, причем $\Phi(Q)$ содержится в некотором шаре пространства X'. Тогда если Φ слабо полунепрерывно снизу, то существует слабо непрерывный селектор отображения Φ.

ж) Теорема справедлива, если Q - паракомпакт.

Теорема 2 содержится в обобщениях теоремы A, данных самим Майклом [9] и Гейлером [10].

ТЕОРЕМА 3. Пусть X - сепарабельное банахово пространство и Ω_P - множество всех опорных к сублинейному оператору P. Тогда Ω_P непусто, и справедливо представление

$$Px = \sup_{A \in \Omega_P} Ax, \tag{12}$$

где супремум берется в $C(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение Φ_P, соответствующее сублинейному оператору P. Множество $\Phi_P(Q) = \bigcup_{t \in Q} \Phi_P(t)$ содержится в некотором шаре X', причем Φ_P слабо полунепрерывно снизу (это следует из теоремы I и предложения 2). Множество Ω_P не пустое (это следует из предложения I, теоремы 2). Справедливость формулы (12) вытекает из следующего замечания. Поточечный супремум функций Ax, где $A \in \Omega_P$, а x - фиксированный элемент из X, есть непрерывная функция, равная Px (т.к. через каждую точку графика Φ_P можно провести селектор, т.е. для любой точки $t_0 \in Q$ и $\ell_0 \in \Phi_P(t_0)$ существует слабо непрерывный селектор φ отображения Φ_P такой, что $\varphi(t_0) = \ell_0$ [8]).

Для компактных сублинейных операторов теорема 3 может быть уточнена, если вместо теоремы 2 воспользоваться теоремой A.

ТЕОРЕМА 4. Пусть K_P - множество компактных опорных операторов к компактному сублинейному оператору P. Тогда K_P не пустое множество, и справедлива формула (12) (при $\Omega_P = K_P$).

4. Задача описания опорных заключается в следующем. Пусть дано множество линейных операторов Ω. Когда существует сублинейный оператор P такой, что $\Omega_P = \Omega$? Отметим следующий простой факт, вытекающий из предложения I и теоремы I. Множество Ω линейных операторов (или, что то же самое, множество слабо непрерывных отображений $\varphi : Q \to X'$) будет

опорным тогда и только тогда, когда существует непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $\Phi : Q \longrightarrow \mathcal{H}(X')$ такое, что Ω совпадает с множеством всех слабо непрерывных селекторов отображения Φ.

Такое внешнее описание опорных множеств, т.е. описание изучаемых объектов с помощью характеризации их другими объектами полезно и будет использовано в дальнейшем для получения внутренней характеристики опорных множеств в терминах свойств самих элементов множества Ω.

Введем некоторые определения, необходимые для внутреннего описания опорных множеств. Множество Ω линейных операторов называется о п о р н ы м, если существует сублинейный оператор P такой, что $\Omega_P = \Omega$. Множество Ω компактных линейных операторов называется к о м п а к т н о о п о р н ы м, если Ω состоит из всех компактных опорных операторов некоторого компактного сублинейного оператора. Отметим, что компактно опорное множество, вообще говоря, не является опорным. Множество Ω линейных операторов $A : X \longrightarrow C(Q)$ называется о п е р а т о р н о в ы п у к л ы м, если для любых $A_1, A_2 \in \Omega$ и любого оператора B, действующего в $C(Q)$ и удовлетворяющего условию $\mathbf{0} \le B \le \mathbf{1}$, где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – соответственно нулевой и тождественный операторы в $C(Q)$, множество Ω содержит оператор $BA_1 + (\mathbf{1} - B)A_2$. Будем говорить, что сеть операторов $A_\alpha : X \to C(Q)$ д и а г о н а л ь н о с х о д и т с я к оператору $A : X \to C(Q)$, если для каждого $t_0 \in Q$ найдутся сеть $t_\beta \to t_0$ и подсеть $A_{\alpha'}$ сети A_α такие, что $(A_{\alpha'} x)(t_\beta)$ (как произведение сетей) при любом $x \in X$ сходится к $(Ax)(t_0)$. Множество линейных операторов Ω называется п о л у н е п р е р ы в н ы м с в е р х у, если для каждой сети $t_\alpha \to t_0$ $(t_\alpha, t_0 \in Q)$ из того, что для любого $x \in X$ сеть $(A_\alpha x)(t_\alpha)$ сходится к $\ell_0 x$, где $A_\alpha \in \Omega$, $\ell_0 \in X'$, следует существование оператора $A \in \Omega$ такого, что $(Ax)(t_0) = \ell_0 x$ $(x \in X)$.

ТЕОРЕМА 5. П у с т ь X – с е п а р а б е л ь н о е б а н а х о в о п р о с т р а н с т в о. Н е п у с т о е м н о ж е с т в о л и н е й н ы х о п е р а т о р о в Ω я в л я е т с я о п о р н ы м т о г д а и т о л ь к о т о г д а, к о г д а о н о о п е р а -

торно выпукло, полунепрерывно сверху, диагонально замкнуто, ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Проверим, что опорное множество Ω_P к сублинейному оператору P удовлетворяет всем условиям теоремы. Множество Ω_P не пусто по теореме 3.

а) Операторная выпуклость Ω_P. Пусть $A_1, A_2 \in \Omega_P$, т.е. $(A_1x)(t) \le (Px)(t); (A_2x)(t) \le (Px)(t)$. Заметим, что операторы B, действующие в $C(Q)$ и удовлетворяющие условию $0 \le B \le \mathbf{1}$, представляются в виде $\alpha(t)\mathbf{1}$, где α - непрерывное отображение Q в $[0,1]$. Поэтому надо показать, что для каждой непрерывной функции $\alpha : Q \longrightarrow [0,1]$ оператор $\alpha \cdot \mathbf{1}A_1 + (1-\alpha)\mathbf{1}A_2 \in \Omega_P$. В самом деле, имеем $\alpha(t)(A_1x)(t) \le \alpha(t)(Px)(t)$, $(1-\alpha(t))(A_2x)(t) \le (1-\alpha(t))(Px)(t)$. Сложив эти неравенства, получим требуемое соотношение

$$\alpha(t)(A_1x)(t) + (1-\alpha(t))(A_2x)(t) \le (Px)(t).$$

б) Диагональная замкнутость Ω_P. Пусть $A_\alpha \in \Omega_P$ диагонально сходится к A. Покажем, что $A \in \Omega_P$. Для любой точки $t_0 \in Q$ по определению диагональной сходимости найдутся сеть $t_\beta \longrightarrow t_0$ и подсеть $A_{\alpha'}$ сети A_α такие, что $(A_{\alpha'}x)(t_\beta)$ сходится к $(Ax)(t_0)$ для каждого $x \in X$. Так как $A_\alpha \in \Omega_P$, то $(A_{\alpha'}x)(t_\beta) \le (Px)(t_\beta)$. Поэтому, переходя к пределу при каждом $x \in X$, имеем $(Ax)(t_0) \le (Px)(t_0)$. В силу произвольности $t_0 \in Q$ показано, что $A \in \Omega_P$.

в) Полунепрерывность сверху Ω_P. Будем рассматривать Ω_P как множество селекторов отображения Φ_P. Пусть $t_\alpha \to t_0$ $(t_\alpha, t_0 \in Q)$ и $\varphi_\alpha(t_\alpha)$ слабо сходится к $\ell_0 \in X'$, где φ_α — селекторы отображения Φ_P. Для доказательства полунепрерывности сверху достаточно установить, что через пару точек (t_0, ℓ_0) проходит селектор отображения Φ_P. По определению φ_α имеем $\varphi_\alpha(t_\alpha)(x) \le (Px)(t_\alpha)$, и, следовательно, $\ell_0 x \le (Px)(t_0)$, поэтому существует селектор $\varphi \in \Omega_P$ такой, что $\varphi(t_0) = \ell_0$.

г) Ограниченность Ω_P вытекает из ограниченности оператора P. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть Ω удовлетворяет всем условиям теоремы. Как уже отмечалось, множество Ω опорно тогда и только

тогда, когда оно совпадает с множеством слабо непрерывных селекторов некоторого непрерывного в слабой топологии Хаусдорфа отображения $\Phi : Q \longrightarrow \mathcal{H}(X')$. Поэтому рассмотрим отображение (многозначное) $\Phi_\Omega : Q \longrightarrow X'$ следующего вида: $\Phi_\Omega(t)=\{\varphi(t):\varphi\in\Omega\}$. Теперь план доказательства, очевидно, следующий. Надо показать, что

1) $\Phi_\Omega(t)\in\mathcal{H}(X')$ при каждом $t\in Q$, т.е. $\Phi_\Omega : Q\longrightarrow\mathcal{H}(X')$;

2) отображение Φ_Ω непрерывно в слабой топологии Хаусдорфа;

3) Ω состоит из всех селекторов отображения Φ_Ω.

1) Выпуклость и ограниченность множества $\Phi_\Omega(t)$ вытекает соответственно из операторной выпуклости и ограниченности Ω. Осталось доказать слабую замкнутость $\Phi_\Omega(t)$. Пусть ℓ_0 - слабо предельная точка $\Phi_\Omega(t)$. Тогда найдется сеть $\ell_\alpha\in\Phi_\Omega(t)$, слабо сходящаяся к ℓ_0. Возьмем сеть $\{t_\alpha=t\}$ при любом α. Тогда в силу полунепрерывности сверху множества Ω найдется отображение $\varphi\in\Omega$ такое, что $\varphi(t)=\ell_0$. Поэтому $\ell_0\in\Phi_\Omega(t)$, и слабая замкнутость множества $\Phi_\Omega(t)$ доказана.

2) Для доказательства полунепрерывности снизу в слабой топологии Хаусдорфа отображения $\Phi_\Omega : Q\longrightarrow\mathcal{H}(X')$ достаточно в силу предложения 2 доказать его слабую полунепрерывность снизу, которая непосредственно вытекает из определения отображения Φ_Ω. Осталось доказать полунепрерывность сверху в слабой топологии Хаусдорфа, которая следует из полунепрерывности сверху и ограниченности множества Ω (этим и объясняется термин полунепрерывность сверху). Допустим противное. Тогда найдутся сеть $t_\alpha\to t_0$, слабая окрестность $\mathcal{U}$ нуля в X', сеть ℓ_α, $\ell_\alpha\in\Phi_\Omega(t_\alpha)$ такие, что $\ell_\alpha\notin(\Phi_\Omega(t_0)+\mathcal{U})$. Так как ℓ_α лежат в шаре X', то, не умаляя общности, можно считать, что ℓ_α слабо сходится к ℓ_0 (шар в X' слабо компактен). Но $\ell_0\notin\Phi_\Omega(t_0)$, так как $\ell_\alpha\notin(\Phi_\Omega(t_0)+\mathcal{U})$, что противоречит полунепрерывности сверху множества Ω.

Пункт 3) в нашем доказательстве заменит интересное и само по себе

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть множество операторов Ω операторно выпукло и диагонально замкнуто. Тогда любой слабо непрерывный селектор отображения Φ_Ω принадлежит Ω.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале установим следующий факт. Пусть $\{t_i\}$ – конечное множество различных точек компакта Q и $\ell_i \in \Phi_\Omega(t_i)$ выбраны произвольно. Тогда найдется отображение $\varphi \in \Omega$ такое, что $\varphi(t_i)=\ell_i$. Доказательство этого факта проведем индукцией по числу точек. Если точка всего одна, то искомое отображение существует по определению отображения Φ_Ω. Допустим, что этот факт верен для числа точек $\le n$. Покажем его справедливость для $n+1$ точки. Пусть даны t_i, $i=1,2,\dots,n+1$.

По предположению существует $\varphi_n \in \Omega$ такое, что $\varphi_n(t_i)=\ell_i$ при $i \le n$. По определению Φ_Ω найдется отображение $\varphi \in \Omega$ такое, что $\varphi(t_{n+1})=\ell_{n+1}$. Возьмем непрерывную функцию $\alpha : Q \to [0,1]$ такую, что

$$\alpha(t_i)=\begin{cases} 1, & i=1,2,\dots,n, \\ 0, & i=n+1. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение φ_{n+1}, определенное формулой

$$\varphi_{n+1}(t)=\alpha(t)\varphi_n(t)+(1-\alpha(t))\varphi(t),$$

принадлежит Ω и $\varphi_{n+1}(t_i)=\ell_i$ при $i=1,2,\dots,n+1$.

Для того, чтобы четче выделить идею доказательства, вначале предположим, что Q – метрический компакт. При этом найдется последовательность $\{t_n\}$ в Q, которая является всюду плотным множеством в Q.

Пусть φ_0 – слабо непрерывный селектор отображения Φ_Ω. Покажем, как построить последовательность $\varphi_n \in \Omega$, диагонально сходящуюся к φ_0. Выберем $\varphi_n \in \Omega$ следующим образом:

$$\varphi_n(t_m)=\varphi_0(t_m) \qquad \text{при } m \le n.$$

Покажем, что φ_n диагонально сходится к φ_0. В самом деле, для произвольной точки $t_0 \in Q$ найдется подпоследовательность

$t_{n_m} \to t_o$ (в случае, если $t_{n_o} = t_o$, делаем ее стационарной). Но тогда $\varphi_{n_m}(t_{n_m}) = \varphi_o(t_{n_m})$ слабо сходится к $\varphi_o(t_o)$. Диагональная сходимость к φ_o установлена, следовательно, $\varphi_o \in \Omega$.

Пусть теперь Q - произвольный компакт. Пусть $\mathcal{U}$ - сеть конечных покрытий Q, упорядоченных по размельчению. Выберем в каждом элементе покрытия по точке (обязательно различные). Пусть φ_o — слабо непрерывный селектор отображения Φ_Ω. Построим сеть $\varphi_{\mathcal{U}} \in \Omega$ со следующим свойством $\varphi_{\mathcal{U}}(t_i) = \varphi_o(t_i)$, где t_i — конечный набор точек, выбранных из каждого элемента покрытия $\mathcal{U}$. Покажем, что $\varphi_{\mathcal{U}}$ диагонально сходится к φ_o. Пусть $t_o \in Q$, $\mathcal{U}(t_o)$ - сеть окрестностей точки $t_o \in Q$. Пусть $\mathcal{U}'$ — подсеть сети $\mathcal{U}$, в элементах которой содержатся покрытия из сети $\mathcal{U}(t_o)$. Обозначим через $t_{\mathcal{U}'}$ точку, выбранную в $\mathcal{U}(t_o)$. Тогда $\varphi_{\mathcal{U}'}(t_{\mathcal{U}'}) = \varphi_o(t_{\mathcal{U}'}) \to \varphi_o(t_o)$, потому что $t_{\mathcal{U}'}$ сходится к t_o и, следовательно, $\varphi_o \in \Omega$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Отметим, что сепарабельность X использована лишь в доказательстве необходимости (там, где доказывается полунепрерывность сверху множества Ω_p) для применимости теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведем примеры, показывающие, что ни одно из условий в теореме не может быть получено из остальных.

ПРИМЕР I. (Полунепрерывность сверху Ω).

Пусть $Q = [0,1]$, $X = R$. Определим $\Phi: Q \to \mathcal{K}(X')$ формулой

$$\Phi(t) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le t \le 1/2 \\ [0,1], & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Пусть Ω - множество непрерывных селекторов отображения Φ.

ПРИМЕР 2. (Операторная выпуклость).

Пусть $Q = [0,1]$, $X = R$. Пусть Ω состоит из функций постоянных, т.е. $\varphi(t) = \alpha$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда это множество и ограничено, и полунепрерывно сверху, и диагонально замкнуто, но не является опорным.

ПРИМЕР 3. (Ограниченность Ω).

Пусть $Q=[0,1]$, $X=R$. Возьмем неотрицательную непрерывную функцию $\alpha:[0,1)\to R$, причем в 1 функция имеет вертикальную асимптоту. Рассмотрим множество селекторов Ω следующего отображения $\Phi: Q\longrightarrow X'$

$$\Phi(t)=\begin{cases} \ell: \quad 0\le \ell\le \alpha(t) & , t\in[0,1), \\ [0,\infty) & , t=1. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4. (Диагональная замкнутость Ω).

Пусть $Q=[0,1]$, $X=C([0,1])$. Рассмотрим сублинейный оператор $P: C([0,1])\to C([0,1])$ такой, что $Px=\|x\|\mathbb{1}(t)$, где $\mathbb{1}(t)$ функция в $C([0,1])$, равная тождественно 1. Рассмотрим множество линейных операторов Ω следующего вида:

$\Omega=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\ell_i\}$, где α_i – непрерывное отображение $[0,1]$ в $[0,1]$, ℓ_i – опорный функционал к $\|x\|$, n – произвольное натуральное число. Тогда Ω удовлетворяет всем условиям теоремы, не являясь лишь диагонально замкнутым. Последнее легко видеть, т.к. в Ω входят только компактные операторы, а тождественный оператор, хотя и является опорным, в множество Ω не входит.

ТЕОРЕМА 6. *Не пустое множество Ω компактных линейных операторов $A: X\to C(Q)$ $(\varphi: Q\longrightarrow X')$ является компактно опорным тогда и только тогда, когда оно операторно выпукло, полунепрерывно сверху, диагонально замкнуто (в пространстве компактных операторов), ограничено и для каждого $t_0\in Q$ справедливы соотношения:*

$$\lim_{t\to t_0}\sup_{\varphi_1\in\Omega}\inf_{\varphi_2\in\Omega}\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t_0)\|=0, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to t_0}\sup_{\varphi_2\in\Omega}\inf_{\varphi_1\in\Omega}\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t_0)\|=0. \tag{14}$$

Доказательство теоремы можно провести по схеме доказатель-

ства предыдущей теоремы, если учесть, что условия (13) и (14) эквивалентны непрерывности в сильной топологии Хаусдорфа отображения Φ_Ω, причем анализ доказательства позволяет сделать следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведенные в теореме условия можно ослабить. При выполнении соотношений (13), (14) полунепрерывность сверху множества Ω обеспечивается выполнением следующего условия. Если при некотором $t \in Q$ сеть $\varphi_\alpha(t)$, где $\varphi_\alpha \in \Omega$, слабо сходится к какому-то $e \in X'$, то существует $\varphi \in \Omega$ такое, что $\varphi(t) = e$. При выполнении соотношений (13), (14) диагональная замкнутость (в пространстве компактных операторов) множества Ω обеспечивается замкнутостью относительно сходимости в следующем смысле. Сеть операторов $A_\alpha : X \to C(Q)$ $(\varphi_\alpha : Q \to X')$ сходится к оператору $A : X \to C(Q)$ $(\varphi : Q \to X')$, если для каждого $t_0 \in Q$ найдутся сеть $t_\beta \to t_0$ и подсеть $\varphi_{\alpha'}$ сети φ_α такие, что $\varphi_{\alpha'}(t_\beta)$ (как произведение сетей) сильно сходится к $\varphi(t_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку каждый KB-линеал ограниченных элементов по теореме Крейнов-Какутани может быть реализован в виде пространства непрерывных функций на некотором компакте, то для сублинейных операторов, действующих в K-линеалы ограниченных элементов, справедливы теоремы 3, 4. Для этого случая можно получить также описание опорных множеств.

5. В этом пункте приводится пример сублинейного оператора, не имеющего опорного в некоторой точке. Будем говорить, что сублинейный оператор P имеет опорный оператор в точке x_0, если существует опорный оператор $A \in \Omega_P$ такой, что $Ax_0 = Px_0$. Исходным для нас был пример из [2] выпуклого оператора, действующего из R в $C([-1,1])$, субдифференциал которого есть пустое множество, именно, $(Fx)(t) = |x - t|$, $x \in R$, $t \in [-1,1]$. Используя схему Хермандера [6] получения сублинейного функционала из выпуклого функционала для каждого $t \in [-1,1]$, получаем следующий оператор $P : R^2 \to C([-1,1])$, действующий согласно формуле $(P(x,y))(t) = |x - yt|$, $t \in [-1,1]$, $(x,y) \in R^2$. Его сублинейность проверяется непосредственно. Также непосредственно устанавливается, что в точке $(0, 1)$ нет опорного оператора.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г.Ш. Рубинштейну, А.М.Рубинову, С.С.Кутателадзе за внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л., Гостехиздат, 1950.
2. ИОФФЕ А.Д., ЛЕВИН В.Л. Субдифференциалы выпуклых функций.- Труды матем. об-ва, 1972, 26.
3. ЛЕВИН В.Л. О субдифференциале составного функционала. - ДАН СССР, 1970, т. 194, № 2, стр. 268-269.
4. НИКИШИН Е.М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы.- УМН, 1970, т. 25, № 6, стр. 129-192.
5. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.- УМН, 1970, т. 25, № 5, стр. 125-169.
6. ХЕРМАНДЕР Л.(Hörmander L.), Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe, Arkiv för Mathemetik, 1955, v.3, № 2.
7. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж.Т. Линейные операторы, общая теория. И.Л., 1962.
8. МАЙКЛ Э.(Michael e.) Continuous selections, Ann. Math. , 1956, v.64, № 3, p 562-580.
9. МАЙКЛ Э.(Michael E.) Convex structures and continuous selections. Canad. J.Math., 1959,v.11,p.556-575.
10. ГЕЙЛЕР В.А. О непрерывных селекторах в равномерных пространствах. - ДАН СССР, 1970, т. 195, № 1, стр. 17-19.

Поступила в ред.-изд. отд.
15. У. 1972 г.