УДК 513.88

СУБЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЕЛЕКТОРЫ

Ю.Э.Линке

В [5] исследовались сублинейные операторы с помощью теорем Майкла [4] о непрерывных селекторах. В настоящей статье, используя результаты [5], уточняются теоремы о непрерывных селекторах в случае, когда многозначное отображение действует в сопряженное пространство банахова пространства X. В статье используется терминология и обозначения [5]. Напомним лишь, что через $W(X')$ обозначается совокупность всех не пустых выпуклых компактов в топологии $\sigma(X', X)$ пространства X'. Так как пространство X' рассматривается лишь в двух топологиях, то условимся говорить "слабо", если имеется в виду топология $\sigma(X', X)$ и "сильно", если топология в X' определяется нормой.

Хотя теорема Майкла о непрерывных селекторах имеет окончательный характер в классе банаховых пространств и является характеристикой паракомпактов, все же для некоторых пространств и отображений требование паракомпактности, как показывают следующие теоремы, не является необходимым.

ТЕОРЕМА I. *Пусть Q - произвольное топологическое пространство, X - сепарабельное банахово пространство, Φ - отображение Q в $W(X')$ ограниченное*[ж)] *и непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа, т.е. в*

ж) т.е. действующее в шар пространства X'.

топологии Хаусдорфа, определяемой слабой топологией в X'. Тогда существует слабо непрерывный селектор φ отображения Φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $BC(Q)$ - пространство всех ограниченных непрерывных функций, определенных на Q. Отображение Φ порождает сублинейный оператор $P: X \to BC(Q)$ по формуле

$$(Px)(t)=\sup_{\ell\in\Phi(t)} \ell(x)\ , x\in X\ , t\in Q \qquad (I)$$

(см. в [5] теорему I и замечание к ней). Существование слабо непрерывного селектора у отображения Φ эквивалентно существованию опорного линейного оператора к сублинейному оператору P. Так как пространство $BC(Q)$ есть KB -линеал ограниченных элементов, а оператор P ограничен, то существование опорного оператора следует из теоремы Крейнов-Какутани о реализации KB -линеала ограниченных элементов в виде пространства непрерывных функций на некотором компакте и теоремы о существовании опорных операторов к сублинейным операторам, действующим из сепарабельного банахова пространства X в пространство непрерывных функций на компакте (см. теорему 3 в [5]). Теорема доказана.

Условие полунепрерывности сверху многозначного отображения не является необходимым условием для существования непрерывных селекторов. Поэтому в следующей теореме для топологических пространств Q, в которых любая полунепрерывная снизу функция представляется как супремум (поточечный) непрерывных функций, требуется лишь полунепрерывность снизу[ж)] отображения Φ. Отметим, что характеристика таких пространств известна, это так называемые равномеризуемые пространства, или, что то же самое, вполне регулярные ([4], стр. 252, [I], стр. 193). Так как этот класс пространств не содержится в классе всех паракомпактных пространств, то представляет интерес

ж) Отметим, что для отображений $\Phi: Q \to W(X')$ понятие слабой полунепрерывности снизу эквивалентно полунепрерывности в слабой топологии Хаусдорфа. Понятие полунепрерывности сверху и полунепрерывности сверху в топологии Хаусдорфа совпадают.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q - нормальное топологическое пространство, X - сепарабельное банахово пространство, отображение $\Phi: Q \to W(X')$ ограничено и слабо полунепрерывно снизу; тогда существует слабо непрерывный селектор отображения Φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{BC(Q)}$ - конус (в R^Q) ограниченных полунепрерывных снизу функций на Q. Для сублинейных операторов, действующих из произвольного банахова пространства X в $\widetilde{BC(Q)}$, справедлив следующий факт. Каждому ограниченному сублинейному оператору $P: X \to \widetilde{BC(Q)}$ соответствует ограниченное, слабо полунепрерывное снизу отображение $\Phi: Q \to W(X')$ такое, что выполнено (I). Обратно, каждому такому отображению Φ по формуле (I) соответствует ограниченный сублинейный оператор $P: X \to \widetilde{BC(Q)}$. Доказательство этого факта, по существу, содержится в доказательстве теоремы I в [5]. Следующий факт, который нам нужен, - это изоморфизм (алгебраический и порядковый) конуса $\widetilde{BC(Q)}$ конусу $\widetilde{BC(\hat{Q})}$, где $\hat{Q}$ - некоторый компакт. Этот факт - следствие теоремы Крейнов-Какутани и возможности представления полунепрерывной снизу функции на равномеризуемом Q как супремума (поточечного) непрерывных функций. Далее под опорным оператором к сублинейному оператору $P: X \to \widetilde{BC(Q)}$ понимается линейный оператор $A: X \to BC(Q)$ такой, что $Ax \leq Px$. Ясно, что существование таких опорных операторов эквивалентно существованию слабо непрерывных селекторов отображения Q в $W(X')$, соответствующего сублинейному оператору P. Теперь для завершения доказательства теоремы осталось повторить с соответствующими изменениями рассуждения в доказательстве теоремы I.

Следующие две теоремы - аналоги предыдущих теорем в случае, когда отображение Φ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.

Будем говорить, что для отображения $\Phi: Q \to W(X')$ выполнено условие (ж), если для каждого шара $B(\varepsilon)$ в X' радиуса $\varepsilon > 0$ существует конечное число открытых множеств $V_1, \ldots, V_n$, образующих покрытие Q, и конечное число точек $t_i \in V_i$ таких, что при $\tau \in V_i$ выполнено включение

$$\Phi(t_i)\subset\Phi(t)+B(\varepsilon).$$

Если, кроме того, выполнено еще условие

$$\Phi(t)\subset\Phi(t_i)+B(\varepsilon),\quad t\in V(t_i),$$

то будем говорить, что отображение Φ удовлетворяет условию (**). Отметим, что если Φ удовлетворяет (**), то Φ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.

ТЕОРЕМА 1′. Пусть Q – произвольное топологическое пространство, X – банахово пространство, отображение $\Phi:Q\longrightarrow W(X')$ ограничено и удовлетворяет условию (**). Тогда существует селектор φ, удовлетворяющий (**) (и следовательно, сильно непрерывный).

ТЕОРЕМА 2′. Пусть Q – нормальное топологическое пространство, отображение $\Phi:Q\longrightarrow W(X')$ ограничено, полунепрерывно снизу в сильной топологии Хаусдорфа и выполнено условие (*). Тогда существует селектор φ, удовлетворяющий (**).

Доказательство этих теорем можно провести по схеме доказательств предыдущих теорем, если учесть то, что сублинейный оператор $P:X\longrightarrow BC(Q)$ компактен тогда и только тогда, когда соответствующее отображение Φ удовлетворяет условию (**). Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы I из [5], если учесть критерий относительной компактности в $BC(Q)$ ([2], стр. 289).

В заключение мы покажем, каким образом можно ослабить условие ограниченности отображения Φ в теоремах I, 2. Оказывается ограниченность можно заменить следующим условием:

$$\sup_{\ell\in\Phi(t)}\|\ell\|\le m(t) \qquad (***)$$

для некоторой положительной непрерывной функции m на Q. Обычное условие ограниченности Φ получается, если функцию

m можно выбрать постоянной. Теперь уточнение теорем I,2 можно получить, если вместо пространства (K -линеала) $BC(Q)$ мы рассмотрим K -линеал $C(Q)$-непрерывных функций на Q. В самом деле, нам нужна теорема о представлении ограниченных[ж)] сублинейных операторов, действующих из банахова пространства X в $C(Q)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Q - произвольное топологическое пространство, P - ограниченный сублинейный оператор, отображающий банахово пространство X в $C(Q)$. Тогда существует такое непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $\Phi : Q \longrightarrow W(X')$, удовлетворяющее (жжж), что

$$(Px)(t) = \sup_{\ell \in \Phi(t)} \ell(x). \tag{2}$$

Обратно, если задано такое отображение Φ, то оператор P, определяемый равенством (2), есть ограниченный сублинейный оператор, отображающий X в $C(Q)$.

Эта теорема-следствие теоремы I в [5]. Под опорным оператором к ограниченному сублинейному оператору $P: X \to C(Q)$ понимается ограниченный аддитивный и однородный оператор A такой, что $Ax \leq Px$ ($x \in X$). Существование опорных операторов к ограниченным сублинейным операторам, действующих из сепарабельных банаховых пространств в $C(Q)$, вытекает из следующей общей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Каждый ограниченный сублинейный оператор, действующий из сепарабельного банахова пространства X в архимедов K -линеал Y полный относительно сходимости с любым регулятором, имеет опорные операторы.

ж) Т.е. образ шара в X при отображении P ограничен в $C(Q)$.

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что образ пространства X при отображении P содержится в K -идеале ограниченных элементов.

Уточнение теорем I,2 можно провести и другим путем. Рассмотрим новое отображение $\Phi_1 : Q \longrightarrow W(X')$ такое, что

$$\Phi_1 : t \longrightarrow \frac{\Phi(t)}{m(t)+1},$$

где отображение $\Phi : Q \longrightarrow W(X')$, удовлетворяющее условию (жжж) с функцией m. Отображение Φ_1 ограниченное. Легко понять, что существование селектора у Φ эквивалентно существованию селектора у Φ_1. Можно показать (используя, в частности, сублинейные операторы), что топологические свойства Φ "переносятся" и на Φ_1. Например, пусть отображение Φ непрерывно в слабой топологии Хаусдорфа и удовлетворяет условию (жжж) и пусть P - соответствующий ограниченный сублинейный оператор. Тогда отображению Φ_1 будет соответствовать ограниченный сублинейный оператор $P_1 : X \to BC(Q)$, действующий по формуле

$$(P_1 x)(t) = \frac{(Px)(t)}{m(t)+1},$$

и, следовательно, отображение Φ_1 будет слабо непрерывным в топологии Хаусдорфа.

Литература

1. БУРБАКИ Н. Общая топология. Топологические группы числа и связанные с ними группы и пространства. М., "Наука", 1969.
2. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. И.Л., 1962.
3. КЕЛЛИ Дж.Л. Общая топология. "Наука", 1968.
4. МАЙКЛ Э. (Michael E.) Continuous selections, Ann. Math. 1956, v. 64, № 3, p.562-580.
5. ЛИНКЕ Ю.Э. О существовании опорных линейных операторов к сублинейным операторам со значениями в $C(Q)$. - Настоящий сборник, стр. 52-70.

Поступила в ред.-изд.отд.
22. VI. 1972 г.