УДК 512.25/26

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИХ В СВЯЗИ С МНОГОМЕРНЫМИ ВАРИАЦИОННЫМИ ЗАДАЧАМИ

А.Б.Рабинович

Рассматриваются задачи оптимального управления системами, описываемыми эллиптическими уравнениями порядка $2m$, при ограничениях только на управление, а также задача с функционалом, не зависящим от управления, и ограничениями только на фазовые координаты, к которой приводится многомерная вариационная задача в W_p^m. Получены необходимые (и в некоторых случаях достаточные) условия экстремума.

Пусть G - ограниченная область в R^n с границей Γ, локально удовлетворяющей условию Липшица, $\varphi(t)$ - заданная функция из W_p^1 [1], Ω - замкнутое выпуклое множество в пространстве $L_{p,n+1} = \prod^{n+1} L_p$. Многомерной вариационной задачей в W_p^1 будем называть отыскание минимума функционала

$$\int_G F(t, z, \nabla z)\,dt \longrightarrow \min \tag{1}$$

при краевых условиях Дирихле

$$z|_\Gamma = \varphi|_\Gamma \tag{2}$$

и ограничениях на функцию z и ее производные вида:

$$\{z, \nabla z\} \in \Omega . \tag{3}$$

При $1<p<\infty$ функция $z(t)$ принадлежит W_p^1 и удовлетворяет краевым условиям (2) в том и только в том случае, если она является обобщенным решением [2] уравнения

$$\Delta z = \operatorname{div} u(t) \qquad (*)$$

при некотором $u(t) \in L_{p,n}$ и краевых условиях (2). Полагая $u(t)$ управлением, можно свести задачу (I) - (3) к задаче оптимального управления. Этот факт допускает обобщение на случай многомерной вариационной задачи в пространстве W_p^m с функционалом (I) и ограничениями (2), зависящими от производных функции z до порядка m при соответственных краевых условиях Дирихле. В п. I настоящей работы сформулирована лемма о разрешимости эллиптического уравнения порядка $2m$, являющегося обобщением уравнения (*).

Для получения необходимых условий экстремума оказывается удобным наряду с минимизируемым функционалом рассмотреть другой функционал, называемый аппроксимацией, грубо говоря, касающийся исходного в точке минимума с точностью до второго порядка. Если аппроксимирующий функционал оказывается выпуклым, то полученные для него необходимые условия экстремума справедливы и для исходного. В этом состоит суть леммы об аппроксимации и ее следствий, доказанных в п.2. Там же приводятся примеры аппроксимаций.

Далее, в пп. 3-5 рассматриваются линейные задачи оптимального управления с ограничениями только на управление. Вначале, в п. 3, эти задачи рассматриваются в операторной форме, и с помощью аппроксимации получены необходимые условия экстремума для задачи с функционалом, выпуклым по управлению.

Результаты п. 3 применяются для задач оптимального управления системами, описываемыми эллиптическими уравнениями порядка $2m$. В п. 4 условия оптимальности получены для системы, рассмотренной в работе Лионса [3], в п. 5 - для системы, описываемой уравнением, лемма о разрешимости которого была доказана в п. I.

В п. 6 рассмотрена выпуклая многомерная вариационная задача в пространстве W_p^m. Показано, каким образом она может быть сведена к задаче оптимального управления, и с помощью теории двойственности [4] для нее получены необходимые и достаточные условия экстремума.

1. Об одном эллиптическом уравнении

Пусть в области G с гладкой границей Γ задано эллиптическое уравнение порядка $2m$:

$$\Lambda z \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(t) D^\beta z) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(t)\, u_\beta) \tag{4}$$

при краевых условиях Дирихле:

$$D^\gamma z|_\Gamma = D^\gamma \varphi|_\Gamma, \qquad |\gamma| \le m-1. \tag{5}$$

Здесь $D^\alpha v = \partial^{|\alpha|} v / \partial^{\alpha_1} t_1 \ldots \partial^{\alpha_n} t_n$ – обобщенная производная [2]; $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – n-индекс, $\alpha_i \ge 0$ – целые; $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ – порядок производной; M – число всех α таких, что $|\alpha| \le m$; $u_\beta \in L_p$; $\varphi(t)$ – заданная функция из W_p^m. Матрица $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{|\alpha|,|\beta|\le m}$ предполагается симметричной, бесконечно дифференцируемой и такой, что

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \ge c \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha^2, \quad c>0, \ \forall \xi \in R^M, \tag{6}$$

а матрица $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{|\alpha|,|\beta|\le m}$ ограниченной. При этих предположениях имеет место доказанная в [5]

ЛЕММА О РАЗРЕШИМОСТИ. *Уравнение (4) с краевыми условиями (5) имеет единственное обобщенное решение $z \in W_p^m$ для любых $u_\beta \in L_p$ и $\varphi \in W_p^m$ при $1 \le p \le \infty$.*

Отметим наиболее важные случаи:

1^0. Матрицы A и B единичные. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} z = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_\alpha . \tag{7}$$

2^0. Матрицы A и B состоят только из одной клетки старших $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, $|\alpha|=|\beta|=m$, и эта клетка – единичная матрица. Уравнение (4) принимает в этом случае вид:

$$\sum_{|\alpha|=m} D^{2\alpha} z = \sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha} u_{\alpha} \quad . \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что функция $z(t)$ принадлежит W_p^m в том и только в том случае, если она является решением уравнений (7) и (8) с некоторыми u_α (в качестве u_α можно взять $D^\alpha z$).

2. Об аппроксимации функционалов

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{Y}$ задан функционал $f(y)$, выпуклое множество Y и точка $y^0 \in Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функционал $\tilde{f}(y)$ является аппроксимацией для функционала $f(y)$ в точке y^0 на множестве Y, и записывать $\tilde{f}(y) \approx f(y)\ (y^0, Y)$, если

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{[f(y^0+\alpha y)-f(y^0)]-[\tilde{f}(y^0+\alpha y)-\tilde{f}(y^0)]}{\alpha} = 0 \tag{9}$$

для любого $y \in Y \setminus y^0$.

Если $\mathcal{Y}$ - банахово пространство и равенство (9) выполнено равномерно по y, то оно приобретает более простой вид

$$\lim_{y \to y^0} \frac{[f(y)-f(y^0)]-[\tilde{f}(y)-\tilde{f}(y^0)]}{\|y-y^0\|} = 0 . \tag{9$'$}$$

Понятие аппроксимации рефлексивно и транзитивно. При этом если $\tilde{f}(y) \approx f(y)\ (y^0, Y)$, то $\tilde{f}(y) \approx f(y)\ (y^0, Y')$ для любого подмножества $Y' \subset Y$, содержащего точку y^0.

Нетрудно видеть, что если функционал $f(y)$ дифференцируем по Гато в точке y^0 [6] и $\tilde{f}(y) \approx f(y)\ (y^0, \mathcal{Y})$, то функционал $\tilde{f}(y)$ также дифференцируем в точке y^0 и их дифференциалы в этой точке совпадают. В частности, если $f_y(y^0)$ - производная функционала $f(y)$ в точке y^0, то

$$(f_y(y^0), y) \approx f(y) \qquad (y^0, \mathcal{Y}).$$

В [5] было введено более слабое понятие аппроксимации, соответствующее условию (9)$'$ со знаменателем $\|y-y^0\|^2$.

Запись вида $y^0 = \arg\min_Y f(y)$ означает, что y^0 есть точка (аргумент) минимума функционала $f(y)$ на множестве Y.

Для аппроксимации типа (9) справедлива

ЛЕММА ОБ АППРОКСИМАЦИИ [5]. Пусть $y^0=\arg\min\limits_Y f(y)$ и пусть $\tilde{f}(y)\approx f(y)\ (y^0, Y)$. Тогда если функционал $\tilde{f}(y)$ выпуклый, то

$y^0=\arg\min\limits_Y \tilde{f}(y)$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если в точке $y^0\in Y$ существует выпуклая аппроксимация $\tilde{f}(y)$ для функционала $f(y)$ на множестве Y, то необходимое (и достаточное, если $f(y)$ – выпуклый функционал) условие минимума в точке y^0 для аппроксимирующей задачи справедливо и для исходной.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функционал $f(y)$ имеет производную Гато в точке $y^0\in Y$, то для того, чтобы $y^0=\arg\min\limits_Y f(y)$, необходимо, а в случае выпуклости $f(y)$ и достаточно выполнения условия $y^0=\arg\min\limits_Y (f_y(y^0),y)$.

Рассмотрим вопрос об аппроксимации функционалов на произведении банаховых пространств. Пусть $\mathcal{Y}=X\times U$ и функционал $f(x,u)$ дифференцируем по x в точке $\{x^0,u^0\}$ в смысле Фреше [6].

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если производная $f_x(x,u)$ функционала $f(x,u)$ непрерывна по x и u в точке $\{x^0,u^0\}$, то функционал

$$\tilde{f}(x,u)=(f_x(x^0,u^0),x-x^0)+f(x^0,u)$$

будет аппроксимацией для функционала $f(x,u)$ в точке $\{x^0,u^0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу Лагранжа [6] для разности $\tilde{f}(x,u)-f(x,u)$, получим

$$\tilde{f}(x,u)-f(x,u)=(f_x(x^0,u^0)-f_x(x_\tau,u),x-x^0),$$

где $x_\tau=x^0+\tau(x-x^0)$. В силу непрерывности производной

f_x по x и u имеем оценку

$$|\tilde{f}(x,u)-f(x,u)|\le\|x-x^0\|O(\|x-x^0\|+\|u-u^0\|), \quad (10)$$

которая эквивалентна равенству (9). Утверждение доказано.

Пусть теперь x и u связаны соотношением

$$x=Lu+x_1,$$

где L - линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{U}$ в X, а $x_1\in X$ фиксирован. Тогда можно ввести функционалы $\varphi(u)=f(x(u),u)$ и $\tilde{\varphi}(u)=f(x(u),u)$, заданные только на пространстве $\mathcal{U}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если выполнены предположения утверждения I, то

$$\tilde{\varphi}(u)\approx\varphi(u) \quad (u^0,\mathcal{U}).$$

Доказательство следует из оценки (10) и непрерывности оператора L; при этом линейность L несущественна, достаточно выполнения оценки Липшица

$$\|Lu-Lu^0\|\le c\|u-u^0\|.$$

3. О необходимых условиях экстремума для задач с ограничениями на управление

Задачи оптимального управления системами, описываемыми эллиптическими уравнениями порядка $2m$, можно записать в операторной форме следующим образом: в банаховом пространстве $X\times\mathcal{U}$ отыскивается минимум функционала

$$f(x,u)\to\min \quad (11)$$

при условии, что x и u связаны соотношением

$$x=L\gamma(u)+x_1, \quad (12)$$

где $L\gamma:\mathcal{U}\to X$; L - линейный оператор; x_1 фиксирован. Управление u выбирается из заданного множества $U\subset\mathcal{U}$

$$u\in U. \quad (13)$$

В задаче минимизации линейного по x функционала

$$f(x,u)\equiv(c,x)+f_1(u)\longrightarrow \min$$

при условиях (I2) и (I3) необходимым и достаточным условием оптимальности будет

$$u^0=\arg\min_u[(L^*c,\gamma(u))+f_1(u)],$$

где L^* - оператор, сопряженный к L.

Это условие легко получается из того, что

$$(c,x)=(c,L\gamma(u)+x_1)=(L^*c,\gamma(u))+(c,x_1)$$

и второй член не зависит от u. Так как никаких условий на $\gamma(u)$ не накладывается, то $\gamma(u)$ может быть нелинейным оператором.

Пусть теперь $L\gamma$ - непрерывный линейный оператор из U в X, функционал (II) выпуклый по u при $x=x^0$. Если, кроме того, выполнены требования гладкости по x, выдвинутые в утверждении I, то из утверждения 2 и следствия I к лемме об аппроксимации имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\{x^0,u^0\}$ удовлетворяет условиям (I2), (I3), выполнены условия утверждения I и функционал $f(x^0,u)$ выпуклый по u. Тогда для оптимальности $\{x^0,u^0\}$ в задаче (II)-(I3) необходимо, а в случае выпуклости $f(x,u)$ по x и u достаточно, чтобы

$$u^0=\arg\min_u[(\gamma^*L^*f_x(x^0,u^0),u)+f(x^0,u)]. \quad (I4)$$

В частности, если функционал (II) не зависит от управления u, то $f(x^0)$, естественно, выпуклый по u и условие (I4) приобретает вид

$$u^0=\arg\min_u(\gamma^*L^*f_x(x^0),u).$$

4. О задаче Лионса

В ограниченной области G с гладкой границей Γ ставится задача:

$$f(x,u)=\frac{1}{2}\|Sz-y\|^2_{L_{2,m}(\Gamma)}+f_1(u)\longrightarrow \min$$

при условии, что z есть решение эллиптического уравнения порядка $2m$

$$\Lambda z = \ell^1$$

при краевых условиях

$$Dz = \ell^2 + \beta u \quad \text{на } \Gamma$$

и ограничении на управление u вида $u \in \mathcal{U}$.

Здесь $L_{2,m} = \prod^m L_2$; y - заданная функция из $L_{2,m}(\Gamma)$; оператор $D = \{D_1, \dots, D_m\}$ таков, что уравнение с краевыми условиями имеет единственное решение (в соответствующих пространствах), а оператор S таков, что для любых z и ψ имеет место соотношение

$$(\Lambda z, \psi)_G - (z, \Lambda' \psi)_G = (Sz, D'\psi)_\Gamma - (Dz, S'\psi)_\Gamma, \quad (15)$$

где оператор D_j' имеет порядок m_j, а порядок S_j = порядку $S_j' = 2m - m_j - 1$.

ТЕОРЕМА I ([3]) Для оптимальности u^0 в этой задаче необходимо и в случае выпуклости функционала $f_1(u)$ достаточно выполнение условия

$$u^0 = \arg\min[(\beta^* S'\psi, u) + f_1(u)] ,$$

где ψ - решение сопряженного уравнения

$$\Lambda'\psi = 0 ,$$

$$D'\psi = Sz - y \quad \text{на } \Gamma .$$

Для того, чтобы получить эту теорему из условия (14) нужно определить операторы L и L^*. Достаточно построить L и L^* для бесконечно дифференцируемых функций. Если g^1 и $g^2 = \{g_1^2, \dots, g_m^2\}$ бесконечно дифференцируемы, то полагаем $Lg = \{z, Sz\}$, где z - решение уравнения $\Lambda z = g^1$,

$$Dz = g^2 \quad \text{на } \Gamma .$$

Теперь запишем функционал и уравнение задачи Лионса в форме (II) - (I3). Полагая $x = \{x^1, x^2\} \in L_2(G) \times L_{2,m}(\Gamma)$, имеем

$$f(x,u)=\frac{1}{2}(x^2-y,x^2-y)_\Gamma+f_1(u),$$
$$x=L\gamma(u)+L\ell,$$
где $\gamma(u)=\{0,\beta u\}$, $\ell=(\ell^1,\ell^2)$. Так как предполагается выполненным соотношение (I5), то $L^*h=\{\psi,S'\psi\}$, где ψ - решение уравнения
$$\Lambda'\psi=h^1;\ D'\psi=h^2 \qquad \text{на } \Gamma.$$
Действительно,
$$(h,Lg)=(h^1,z)_G+(h^2,Sz)_\Gamma=(\Lambda'\psi,z)_G+$$
$$+(D'\psi,Sz)_\Gamma=(\psi,\Lambda z)_G+(S'\psi,Dz)_\Gamma=$$
$$=(\psi,g^1)_G+(S'\psi,g^2)_\Gamma=(L^*h,g).$$
Так как
$$f_x(x^0,u^0)=\{0,x^2-y\}=\{0,Sz-y\}$$
и условия утверждения 3 выполнены, то теорема получается из условия (I4). При этом несущественно, что Λ - эллиптический оператор. Важна однозначная разрешимость исходного и сопряженного уравнений и выполнение соотношения (I5).

5. Об одной задаче оптимального управления

Введем оператор $\tilde\nabla^m$, ставящий в соответствие функции z из W_2^m - вектор-функцию всех ее производных до порядка m: $\tilde\nabla^m z=\{D^\alpha z\}_{|\alpha|\le m}$ (см. обозначения п. I). Пусть G - область с границей Γ. Рассмотрим в W_2^m задачу

$$\int_G F(t,\tilde\nabla^m z)\,dt \longrightarrow \min, \tag{I6}$$

где $z(t)$ удовлетворяет уравнению (4) и краевым условиям (5). Управление $u=\{u_\beta\}_{|\beta|\le m}$ выбирается из заданного множества $U\subset L_{2,M}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $F(t,\tilde\nabla^m z)$ дифференцируема по компонентам $D^\alpha z$ вектор-функции $\tilde\nabla^m z$. Для оптимальности u^0 в задаче (16), (4), (5) при ограничении $u \in \mathcal{U}$ необходимо, а в случае выпуклости функционала (16) по $\tilde{\nabla}^m z$ и достаточно, чтобы

$$u^0 = \arg\min_u (u, B^* \tilde{\nabla}^m \psi)_G ,$$

где ψ – решение уравнения

$$\Lambda\psi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_{D^\alpha z}(t, \tilde{\nabla}^m z^0) \tag{17}$$

с нулевыми краевыми условиями Дирихле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор

$$(\tilde{\nabla}^m)^* = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$$

является сопряженным к оператору $\tilde{\nabla}^m$, определенному на подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m$ функций из W_2^m, удовлетворяющих нулевым краевым условиям Дирихле. Поэтому уравнение (4) может быть формально переписано в виде

$$\Lambda z = (\tilde{\nabla}^m)^* B u .$$

Теперь можно записать задачу (16), (4), (5) в форме (11)-(13), полагая

$$g(u) = Bu , \quad Lg = \tilde{\nabla}^m z_1 , \quad x_1 = \tilde{\nabla}^m z_2 ,$$

где z_1 – решение уравнения

$$\Lambda z_1 = (\tilde{\nabla}^m)^* g$$

с нулевыми краевыми условиями Дирихле, а z_2 – решение уравнения (4) с нулевой правой частью и краевыми условиями (5). Оператор L самосопряжен. Действительно,

$$(h, Lg) = (h, \tilde{\nabla}^m z_1) = ((\tilde{\nabla}^m)^* h, z_1) =$$
$$= (\Lambda\psi, z_1) = (\psi, \Lambda z_1) = (\psi, (\tilde{\nabla}^m)^* h) =$$
$$= (\tilde{\nabla}^m \psi, h) = (Lg, h) .$$

Операции сопряжения законны в силу нулевых краевых условий для z_1 и ψ. Учитывая, что $L f_x(x^0, u^0) = \tilde{\nabla}^m \psi$, где ψ – решение уравнения (I7) с нулевыми краевыми условиями Дирихле, в силу условия оптимальности (I4) получаем теорему 2.

ПРИМЕР. Для задачи

$$\int_G \Big(c_0(t) z + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \frac{\partial z}{\partial t_i}\Big) dt \longrightarrow \min$$

при условиях

$$\Delta z = \operatorname{div} u, \quad z|_\Gamma = 0,$$

$$|u_i| \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем, что оптимальное u^0 определяется из формулы

$$u_i^0 = -\operatorname{sgn} \frac{\partial \psi}{\partial t_i},$$

где ψ – решение уравнения

$$\Delta \psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial c_i}{\partial t_i} - c_0, \quad \psi|_\Gamma = 0.$$

6. О многомерной вариационной задаче

Обобщением задачи (I)-(3) является многомерная вариационная задача в пространстве W_p^m, $1 < p < \infty$,

$$\int_G F(t, \tilde{\nabla}^m z)\, dt \longrightarrow \min \tag{I8}$$

при краевых условиях Дирихле

$$D^\gamma z|_\Gamma = D^\gamma \varphi|_\Gamma = 0, \tag{I9}$$

причем на функцию z и ее производные до порядка m наложены ограничения вида:

$$\tilde{\nabla}^m z \in \Omega. \tag{20}$$

Здесь $\tilde{\nabla}^m z$ – M-вектор-функция производных функции z до порядка m (см. п.5), Ω – выпуклое замкнутое множество в пространстве $L_{p,M}$.

Поскольку всякая функция $z(t) \in W_p^m$, удовлетворяющая краевым условиям (I9), является решением уравнения (7) или (8) с теми же краевыми условиями, то задача (I8)-(20) может быть записана в форме задачи оптимального управления с функционалом, не зависящим от управления, и ограничениями только на фазовые координаты. В операторном виде это задача отыскания минимума функционала

$$f(x) \longrightarrow min \tag{21}$$

в банаховом пространстве $X \times \mathcal{U}$, где x и u связаны условием

$$x = \gamma L u + x_1 \tag{22}$$

и фазовые координаты x выбираются из заданного множества $\Omega \subset X$

$$x \in \Omega . \tag{23}$$

Предположим, что функционал (18) выпуклый по $\tilde{\nabla}^m z$ и выполнено соотношение двойственности [6]. Например, пусть этот функционал слабо полунепрерывен снизу, а множество Ω ограничено в L_{BM}. Использовав результаты работы [4], нетрудно получить

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для оптимальности $\{x^o, u^o\}$ в задаче (21) - (24) необходимо и достаточно существования последовательности $\lambda^K \in X^*$,

$$L^* \gamma^* \lambda^K = 0 \tag{24}$$

такой, что

$$f(x^o) = \lim_{K \to \infty} \inf_{x \in \Omega} [f(x) - (\lambda^K, x - x_1)] . \tag{25}$$

Если оператор L есть оператор "на", то условие (24) приобретает вид

$$\gamma^* \lambda^K = 0 .$$

Если выполнено условие Слейтера [6], то последовательность λ^K стационарна и условие (25) принимает вид

$$x^o = \arg \min_{\Omega} [f(x) - (\lambda, x)] .$$

Для многомерной вариационной задачи справедлива

ТЕОРЕМА 3 [5]. Пусть функционал (18) выпукл по $\tilde{\nabla}^m z$ и выполнено соотношение двойственности. Для оптимальности z^0 в задаче (18) - (20) необходимо и достаточно существования последовательности вектор-функций $\lambda^k = \{\lambda_\alpha^k\}_{|\alpha| \le m}$,

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^\alpha D^\alpha \lambda_\alpha^k = 0$$

таких, что

$$\int_G F(t, \tilde{\nabla}^m z^0)\, dt = \lim_{k \to \infty} \inf_{x \in \Omega} \int_G [F(t,x) - (\lambda^k, x - \tilde{\nabla}^m \varphi)]\, dt.$$

Если выполнено условие Слейтера, то последовательность λ^k стационарна и условие оптимальности принимает вид

$$\tilde{\nabla}^m z^0 = \arg \min_\Omega \int_G [F(t,x) - (\lambda, x)]\, dt.$$

Здесь (λ, x) - скалярное произведение в R^M.

Для доказательства запишем задачу (18)-(20) в форме (21)-(23), полагая

$$\gamma = \tilde{\nabla}^m, \quad L u = z_1, \quad x_1 = \tilde{\nabla}^m z_2,$$

где z_1 - решение уравнения (7) с нулевыми краевыми условиями, а z_2 - решение того же уравнения с нулевой правой частью и краевыми условиями (19). Поскольку L - оператор на $\overset{\circ}{W}{}_p^m$, то теорема 3 следует из утверждения 4.

Литература

1. СОБОЛЕВ С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.
2. АГМОН С. и др. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. ИЛ, 1961.
3. LIONS J.L. Sur le control optimal de systems decrits par les equtions aux dèrives partieles lineares. C.r.Acad. sci, 1966, v.253, N.20, p.A713-A715.

4. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. "Наука", 1971.
5. РАБИНОВИЧ А.Б. Самосопряженные проекторы и их применение к многомерным вариационным задачам I, II.–Вестник МГУ, сер. мат., мех. 1971, № 3, стр. 10–19, № 4.
6. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. ФМ, 1959.

Поступила в ред.-изд. отд.
21. XI. 1971 г.