УДК 513.88

# НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ВНУТРЕННЕЙ ПОЛУНОРМЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.М.Рубинов

В работе [1] рассмотрено понятие внутренней полунормы задачи линейного программирования (з.л.п.). Внутренняя полунорма з.л.п. позволяет изучать вопросы, связанные с двойственностью з.л.п.

Само понятие внутреннего пространства з.л.п., т.е. пространства, снабженного внутренней полунормой, оказывается полезным не только в вопросах, непосредственно связанных с изучением з.л.п., находящихся в двойственности. Например, известная норма Канторовича-Рубинштейна в пространстве мер [2] может рассматриваться как внутренняя полунорма транспортной з.л.п.

Внутренняя полунорма определяется сначала на конусе. В настоящей заметке рассматриваются некоторые способы распространения полунормы с конуса на пространство и приводятся соответствующие примеры. Затем приводится пример з.л.п., имеющей отличное значение от значения стандартно поставленной двойственной з.л.п.. Этот пример был найден Кречмером [3]. В случае введения внутреннего пространства двойственность по-прежнему имеет место.

1. Пусть $X$ и $\widetilde{Y}$ - линейные пространства, $K_X$ - воспроизводящий конус в пространстве $X$, $K_{\widetilde{Y}}$ - конус в $\widetilde{Y}$, линейный оператор $A$ действует из пространства $X$ в $\widetilde{Y}$.

Пусть пространства $(X, X')$ находятся в двойственности. Мы будем рассматривать в пространствах $X$, $X'$, $\widetilde{Y}$ отношения полуупорядочения, порождаемые соответственно конусом $K_X$,

сопряженным к нему конусом $K'_X$ и конусом $K_{\widetilde{Y}}$. Эти отношения будем обозначать знаком $\geqslant$.

Рассмотрим над пространствами $X$ и $\widetilde{Y}$ семейство з.л.п. $(\alpha_y)_{y\in\widetilde{Y}}$ :

$$(\alpha_y) \qquad f(x)\longrightarrow inf,$$
$$Ax\geqslant y,$$
$$x\geqslant 0,$$

где $f\in K'_X$.

Пусть $\mathcal{K}=AK_X+K_{\widetilde{Y}}$, $Y=\mathcal{K}-\mathcal{K}\subset\widetilde{Y}$. Построим над пространствами $X$ и $Y$ новое семейство з.л.п. $(\beta_y)_{y\in\mathcal{K}}$ :

$$(\beta_y) \qquad f(x)\longrightarrow inf,$$
$$Ax\geqslant y,$$
$$x\geqslant 0.$$

Отношение полуупорядочения в $Y$ считаем индуцированным из $\widetilde{Y}$. Обозначим значение з.л.п. $(\beta_y)$ через $p(y)$. Нетрудно видеть, что $p(y)$ при $y\in\mathcal{K}$ равняется и значению з.л.п. $(\alpha_y)$. Функционал $p$ субаддитивен, положительно однороден и неотрицателен на конусе $\mathcal{K}$.

Функционал $p$ может быть продолжен при некоторых предположениях до полунормы, заданной на всем пространстве $Y=\mathcal{K}-\mathcal{K}$. Такую полунорму назовем внутренней полунормой семейства з.л.п. $(\beta_y)$, а пространство $Y$, снабженное этой полунормой,- внутренним пространством семейства з.л.п. $(\beta_y)$.

В дальнейшем предполагается, что конус $\mathcal{K}$ миниэдрален. Тогда каждый элемент $y\in Y$ единственным образом представлен в виде

$$y=y^+-y^-, \quad y^+,y^-\in\mathcal{K},$$
$$y^+=sup(0,y), \quad y^-=inf(0,y),$$

где супремум и инфимум понимаются в смысле отношения полуупорядочения $>$, порождаемого на $Y$ конусом $\mathcal{K}$.

Будем предполагать, что существует сопряженный к $A$ оператор $A^*: Y^*\to X'$, где $Y^*$ - пространство, сопряженное к $Y$ в смысле внутренней полунормы.

Теперь над пространствами $Y^*$ и $X'$ для каждой з.л.п. $(\beta_y)$ можно рассмотреть двойственную з.л.п. $(\beta^*_y)$ :

$$(\beta_y^*) \qquad g(y) \longrightarrow \sup, \quad f \geq A^* g, \quad g \geq 0, \quad g \in Y^*.$$

При некоторых естественных предположениях з.л.п. $(\beta_y)$ и $(\beta_y^*)$ будут находиться в двойственности при каждом $y \in \mathcal{K}$. Иначе говоря, если $q(y)$ значение з.л.п. $(\beta_y^*)$, то при $y \in \mathcal{K}$ выполняется равенство $p(y) = q(y)$.

Во многих задачах функционал $p$ удовлетворяет следующему условию монотонности $(M)$:

$(M)$ если $y_1, y_2 \in \mathcal{K}$ и $y_1 > y_2$, то $p(y_1) \geq p(y_2)$.

Часто удобно распространять функционал $p$ с конуса $\mathcal{K}$ на все пространство $Y$ следующим образом. Пусть выполнено условие $(M)$. Тогда положим для $y \in Y$

$$\|y\| = p(y^+) + p(y^-). \tag{1}$$

Докажем, что функционал $\|\cdot\|$ является полунормой. Неотрицательность $\|\cdot\|$ следует из неотрицательности функционала $p$. Для доказательства неравенства треугольника отметим сначала, что $y_1^+ + y_2^+ > (y_1 + y_2)^+$, поэтому из условия $(M)$ следует, что

$$p((y_1 + y_2)^+) \leq p(y_1^+ + y_2^+) \leq p(y_1^+) + p(y_2^+).$$

Имеем:

$$\|y_1 + y_2\| = p((y_1 + y_2)^+) + p((y_1 + y_2)^-) \leq p(y_1^+) + p(y_2^+) + p(y_1^-) + p(y_2^-) = \|y_1\| + \|y_2\|.$$

Кроме того, при $\lambda \geq 0$

$$\|\lambda y\| = p((\lambda y)^+) + p((\lambda y)^-) = \lambda[p(y^+) + p(y^-)] = \lambda \|y\|.$$

При $\lambda < 0$ имеем:

$$\|\lambda y\| = \|-|\lambda| y\| = p((-|\lambda| y)^+) + p((-|\lambda| y)^-) = |\lambda|[p((-y)^+) + p((-y)^-)] = |\lambda|[p(y^-) + p(y^+)] = |\lambda| \, \|y\|,$$

так как $(-y)^+ = y^-$ и $(-y)^- = y^+$.

Таким образом, функционал $\|\cdot\|$ однороден, и $\|\cdot\|$ – действительно полунорма.

В некоторых случаях удобно распространять $p$ по формуле

$$\|y\| = \max(p(y^+), p(y^-)). \tag{2}$$

Отметим, что если функционал $p$ монотонен и его распространение на все пространство произведено по формуле (I) или (2), то имеет место теорема двойственности.

$2^0$. Рассмотрим некоторые примеры:

I) Пусть $X$ совпадает с $R^n$ $n$-мерным евклидовым пространством, конус $K_X$ совпадает с конусом $R^n_+$ векторов с неотрицательными компонентами и $\tilde{Y}=R^m$, $K_{\tilde{Y}}=\{0\}$, $A$ - матрица $m\times n$, $\mathcal{K}=AK_X+K_{\tilde{Y}}=AK_X$. Будем считать, что $Y=\mathcal{K}-\mathcal{K}=R^m$. Зададим положительный линейный функционал на $R^n$ с помощью вектора $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$. Рассмотрим з.л.п.

$$(\gamma_y)\qquad \begin{aligned} &cx\longrightarrow max,\\ &Ax=y,\\ &x\geqslant 0,\end{aligned}$$

для $y\in\mathcal{K}$.

Для простоты считаем, что з.л.п. $(\gamma_y)$ невырождена в смысле теории симплекс-метода.

При всяком $y\in\mathcal{K}$ значение функционала $p(y)$ определяется базисным решением З.Л.П. $(\gamma_y)$.

Обозначим через $\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$ множество таких элементов $y\in\mathcal{K}$, что решение задач $(\gamma_y)$ определяется базисом $\{Ae_{i_1},Ae_{i_2},\dots,Ae_{i_m}\}$, где $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ - естественный базис пространства $R^n$.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$ - конус, и если $y\in\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$, то $p(y)=\sum\limits_{K=1}^{m}c_{i_K}x_{i_K}$, где $\sum\limits_{K=1}^{m}x_{i_K}e_{i_K}$ - соответствующее базисное решение.

Для каждого $y\in\mathcal{K}$ можно указать, вообще говоря, неединственный набор номеров $\{i_1,i_2\dots i_m\}$ такой, что $y\in\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$.

Если $y_1,y_2\in\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$, то $p(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda p(y_1)+\mu p(y_2)$ $(\lambda,\mu\geqslant 0)$. Таким образом, функционал $p$ аддитивен и положительно однороден на каждом конусе $\mathcal{K}_{i_1 i_2\dots i_m}$. Процесс решения задачи симплекс-методом означает нахождение минимума

$$p(y)=min\sum_{K=1}^{m}c_{i_K}x_{i_K},$$

где минимум берется по всем базисным решениям.

В рассматриваемом случае, если $p(y)$ определено, то с

помощью обычной теоремы двойственности получим, что если $y \in \mathcal{K}$, то

$$p(y) = \max_{\substack{g \in R^m_+ \\ c \geq gA}} gy .$$

Отсюда следует, что если распространить функционал по формулам (I) или (2), то единичный шар внутреннего пространства является ограниченным многогранным множеством.

Обратно, пусть сублинейный функционал в конечномерном пространстве представим как максимум значений линейных функционалов из некоторого многогранного множества. Тогда можно построить семейство з.л.п., вида $(\gamma_y)$, значения которых и будут значениями этого сублинейного функционала.

В бесконечномерном случае это не так и равенство значений прямой и двойственной з.л.п. происходит, потому что соответствующее множество линейных функционалов в сопряженном к внутреннему пространству будет достаточно широким.

2) Можно указать целый класс з.л.п., внутреннее пространство которых является пространством суммируемых функций.

Пусть $X$ совпадает с линейным пространством суммируемых на $[0,1]\times[0,1]$ функций, конус $K_X$ совпадает с конусом неотрицательных функций этого пространства, $\tilde{Y}$ совпадает с пространством суммируемых на $[0,1]$ функций, $K_{\tilde{Y}}$ совпадает с конусом неотрицательных функций пространства $\tilde{Y}$, функция $B(s,t) > 0$ определена и суммируема на $[0,1]\times[0,1]$, линейный оператор $A: X \to \tilde{Y}$,

$$Ax = \int_0^1 B(s,t)\,x(s,t)\,dt .$$

В рассматриваемом случае положим $\mathcal{K} = AK_X$, $Y = AK_X - AK_X$. Это является несущественным изменением описанной ранее схемы. В качестве функционала $f(x)$ рассмотрим

$$\int_0^1\int_0^1 x(s,t)\,ds\,dt .$$

Пусть з.л.п. $(\delta_y)$ следующая:

$$\int_0^1\int_0^1 x(s,t)\,ds\,dt \to \inf ,$$

$$\int_0^1 B(s,t)\,x(s,t)\,dt \geq y(s) ,$$

Тогда если $y \in \mathcal{K}$, то $p(y)=\int\limits_0^1 \frac{y(s)}{b(s)}ds$, где *)

$$b(s)=\operatorname*{ess\,inf}_{t\in[0,1]} B(s,t).$$

Распространим функционал $p$ по формуле (I). Тогда пространство $Y$ будет состоять из тех суммируемых на $[0,1]$ функций, которые суммируемы и с весом $1/b(s)$. При этом норма

$$\|y\|=\int\limits_0^1 \frac{|y(s)|}{b(s)}ds$$

и внутреннее пространство можно отождествить с пространством функций на $[0,1]$, суммируемых с весом $1/b(s)$.

3). Обычное определение полунормы $K$-линеала ограниченных элементов [4] может также рассматриваться как определение внутренней полунормы некоторой З.Л.П..

Пусть $\widetilde{Y}$ - $K$-линеал ограниченных элементов, $\mathbb{1}$ - единица этого $K$-линеала. Через $K_{\widetilde{Y}}$ обозначим конус положительных элементов этого $K$-линеала, $X=R^1$, $K_X=R^1_+$, функционал $f(x)=x$, оператор $A: R^1\to\widetilde{Y}$, $Ax=x\cdot\mathbb{1}$.

Рассмотрим для $y\in\mathcal{K}=AK_X+K_{\widetilde{Y}}=K_{\widetilde{Y}}$ семейство з.л.п. $(\mathcal{E}_y)$ поставленных над пространствами $X$ и $Y=\mathcal{K}-\mathcal{K}=\widetilde{Y}$

$$(\mathcal{E}_y) \qquad \begin{aligned} &x \longrightarrow \inf \\ &x\cdot\mathbb{1}\geqslant y \\ &x\geqslant 0 \end{aligned}$$

Значения з.л.п. $(\mathcal{E}_y)$ и позволяют определить полунорму, положив $\|y\|=\max\{p(y^+),p(y^-)\}$. Таким способом мы легко получаем обычную полунорму $K$-линеала ограниченных элементов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $Y$ - архимедов $K$-линеал, то полученная полунорма будет нормой.

$3^0$. Рассмотрим пример з.л.п. для которой двойственная задача, поставленная над стандартно определенным пространством, имеет меньшее значение. Введение внутреннего простран-

---

*). Для простоты предположим, что $b(s)>0$ $(0\le s\le 1)$.

ства дает возможность сформулировать двойственную з.л.п., имеющую то же значение. Пусть $X = L^2[0,1] \times R^1$, где $L^2[0,1]$ – пространство функций, суммируемых с квадратом на $[0,1]$, $K_X = (L^2[0,1])^+ \times R^+$, где $(L^2[0,1])^+$ – конус неотрицательных элементов пространства $L^2[0,1]$, $R^+ = R^1_+$, $\widetilde{Y} = L^2[0,1]$, $K_{\widetilde{Y}} = (L^2[0,1])^+$.

Определим оператор $A : L^2[0,1] \times R^1 \longrightarrow L^2[0,1]$ по формуле:

$$A(x, z) = \int_0^s x(t)\,dt + z .$$

Рассмотрим з.л.п. $(\zeta_y)$ для $y \in \widetilde{Y} = L^2[0,1]$:

$$(\zeta_y) \qquad \begin{aligned} &\int_0^1 t x(t)\,dt + 2z \longrightarrow \inf, \\ &\int_0^s x(t)\,dt + z \geqslant y(s), \\ &x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0. \end{aligned}$$

Двойственная з.л.п., поставленная над пространством $L^2[0,1]$, т.е. сопряженным к $L^2[0,1]$, следующая:

$$(\zeta'_y) \qquad \begin{aligned} &\int_0^1 y(s) g(s)\,ds \longrightarrow \sup, \\ &\int_t^1 g(s)\,ds \leqslant t, \\ &\int_0^1 g(s)\,ds \leqslant 2, \\ &g \geqslant 0, \quad g \in L^2[0,1]. \end{aligned}$$

При $y = \mathbb{1}$ значение з.л.п. $(\zeta_{\mathbb{1}})$ равно 2, а значение з.л.п. $(\zeta'_{\mathbb{1}})$ равняется 0. Таким образом, $(\zeta_{\mathbb{1}})$ и $(\zeta'_{\mathbb{1}})$ не находятся в двойственности.

Однако если двойственную з.л.п. формулировать над сопряженным к внутреннему пространству, то значения соответствующих з.л.п. будут равны.

Опишем внутреннее пространство з.л.п. $(\zeta_y)$. Для этой цели положим

$$z(s) = \int_0^s x(t)\,dt + z .$$

Почти всюду существует производная $\frac{dz(s)}{ds} = x(s)$. Имеем:

$$z(0)=z, \qquad \int_0^1 t\,x(t)\,dt+2z=\int_0^1 t\frac{dz(t)}{dt}\,dt+2z=$$

$$=z(1)-\int_0^1 z(t)\,dt+2z(0).$$

Функция $z(t)$ почти всюду на $[0,1]$ возрастает и дифференцируема. Теперь з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$ можно переписать в виде :

$$(\mathcal{S}_y) \qquad 2z(0)+z(1)-\int_0^1 z(t)\,dt \longrightarrow \inf,$$

$$z(s)\geqslant y(s),$$

$$\frac{dz(s)}{ds}\geqslant 0,$$

$$z\geqslant 0.$$

Решим эту задачу для $y\in\mathcal{K}\subset(L^2[0,1])^+$, именно, рассмотрим функции $z_n(s)$ :

$$z_n(s)=\begin{cases} h(s), & \text{если } 0\leq s\leq \frac{1}{n},\\ \max\{h(\frac{1}{n}),\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\frac{1}{n}\leq t\leq 1} y(t)\} & \text{если } \frac{1}{n}\leq s\leq 1,\end{cases}$$

где $h(s)=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leq t\leq s} y(t)$.

Почти всюду существует производная $\frac{dh}{ds}\geqslant 0$. Из построения функций $z_n$ следует, что $z_n(s)\geqslant y(s)$, $\frac{dz_n(s)}{ds}\geqslant 0$ почти всюду и $z_n(s)\geqslant 0$. Таким образом, $z_n(s)$ - допустимый план з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$.

Нетрудно видеть, что существует

$$\lim_n \int_0^1 z_n(s)\,ds=\lim_n\int_0^{1/n} h(s)\,ds+\lim_n\int_{1/n}^1 z_n(s)\,ds=$$

$$=\lim_n \frac{n-1}{n}\operatorname*{ess\,sup}_{\frac{1}{n}\leq s\leq 1} y(s)=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq s\leq 1} y(s).$$

Если $z(s)$ - допустимый план з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$, то $z(1)\geqslant$ $\geqslant\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leq s\leq 1} y(s)$. Отсюда следует, что $\{z_n\}$ и будет последовательностью, доставляющей оптимальное значение в з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$. При этом значении з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$ будет определяться ве-

личиной

$$\lim_{n} \operatorname*{esssup}_{0\le s\le \frac{1}{n}} y(s) \stackrel{def}{=} \hat{y}(0).$$

Таким образом, если $y \in \mathcal{K}$, то

$$p(y) = 2z(0) = 2\hat{y}(0).$$

Мы получили, что конус $\mathcal{K}$ состоит из неотрицательных элементов пространства $L^2[0,1]$ таких, что $\hat{y}(0) < \infty$. Распространим полунорму по формуле (I). Тогда получим, что внутреннее пространство $Y$ з.л.п. $(\mathcal{S}_y)$ состоит из таких элементов пространства $L^2[0,1]$, что $|\hat{y}(0)| < \infty$, $|\hat{y}(0)| \stackrel{def}{=} \hat{y}^+(0) + \hat{y}^-(0)$. Полунорма элемента $y \in Y$ $\|y\| = 2|\hat{y}(0)|$.

Сопряженное пространство в смысле внутренней полунормы $Y^*$ оказывается очень широким. Нам достаточно знать, однако, что

$$Y^* \supset L^2[0,1] \cap \{y : |\hat{y}(0)| < \infty\} = L^2[0,1] \cap \mathcal{Z},\ \mathcal{Z} \subset L^2[0,1]$$

Сужение билинейной формы, приводящей $Y$ и $Y^*$ в двойственность на $Y \times \mathcal{Z}$, следующее:

$$g(y) = \hat{g}(0) \cdot \hat{y}(0) \qquad (g \in \mathcal{Z},\ y \in Y).$$

Поэтому на рассматриваемом сужении для $y = A(x, z)$ получаем:

$$g(y) = g(A(x,z)) = g\left(\int_0^s x(t)\,dt + z\right) = \int_0^c x(t)\,dt \cdot \hat{g}(0) + z \cdot \hat{g}(0) =$$
$$= z \cdot \hat{g}(0) = (A^* g)(x, z),$$

откуда $A^* g = (0, \hat{g}(0))$.

Для $y = \mathbb{1}$ достаточно рассмотреть сужение з.л.п. $(\mathcal{S}^*_{\mathbb{1}})$, поставленной над сопряженным к внутреннему пространству, – з.л.п. $(\tilde{\mathcal{S}}^*_{\mathbb{1}})$:

$$(\tilde{\mathcal{S}}^*_{\mathbb{1}}) \qquad \begin{aligned} &\hat{g}(0) \to \sup, \\ &\hat{g}(0) \le 2, \\ &\hat{g}(0) \ge 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что значение з.л.п. $(\tilde{\mathcal{S}}^*_{\mathbb{1}})$ равно 2.

Так как значение з.л.п. $(\xi_1)$ также равно 2, а значение з.л.п. $(\tilde{\xi}_1^*)$ не больше значения з.л.п. $(\xi_1)$, то получим, что значение з.л.п. $(\xi_1^*)$ равно 2. Таким образом, з.л.п. $(\xi_1)$ и $(\xi_1^*)$ находятся в двойственности.

Автор благодарит А.М.Вершика за обсуждение.

## Литература


I. ВЕРШИК А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования. - УМН, 1970, 25:5 (155), стр. 117-124.

2. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций.- Вестник университета, Л., 1958, т.7, № 2, стр. 52-59.

3. KRETSCHMER K. S. Programmes in paired space, Canad. J. Math., 1961, v.13, N.2, p.221-238.

4. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматиздат, 1961.


Поступила в ред.-изд. отд.
9. VI. 1972 г.