ЧАСТЬ I

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИНЦИПОМ ИНВАРИАНТНОСТИ

МЕТОДЫ ОДНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. С. БОРИСОВ

1. Введение и формулировка основных результатов

В последнее время значительно возрос интерес к проблемам, связанным с точностью приближения в тех или иных предельных теоремах теории вероятностей и ее приложений, в частности в предельных теоремах для случайных процессов. При решении задач такого типа достаточно эффективны так называемые методы одного вероятностного пространства, появление которых относят к концу 50-х годов и связывают обычно с именами Ю. В. Прохорова и А. В. Скорохода (см. [1, 2]).

Сущность указанных методов состоит в построении допредельных и предельных процессов на одном вероятностном пространстве с «близкими», по возможности, траекториями. После этого уже нетрудно сделать те или иные заключения относительно близости самих распределений.

Методы одного вероятностного пространства получили дальнейшее развитие в работах А. А. Боровкова [3], Я. Комлоша, П. Майора, Г. Тушнади [4, 5], П. Майора [6, 7], в которых, по существу, окончательно решены многие проблемы, связанные с изучением скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера — Прохорова и скорости сходимости распределений эмпирических процессов. Отметим, что все описанные методы носят сугубо «индивидуальный» характер в том смысле, что их применение ограничено рамками конкретно решаемой задачи. В то же время некоторые задачи, возникающие в приложениях теории вероятностей (например, в теории массового обслуживания), не укладываются в уже имеющиеся рамки и требуют создания новых методов, по возможности более универсальных.

Настоящая статья посвящена методам одного вероятностного пространства для произвольных марковских процессов на числовой прямой. Полученные здесь результаты в известной степени обобщают результаты работ [1, 4] и в то же время дают возможность изучать скорость сходимости распределений марковских процессов, существенно отличающихся от случайной «ступенчатой ломаной», построенной по суммам независимых случайных величин (с. в.), и от эмпирического процесса.

Итак, пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$, $t\in B\subseteq R$,— произвольные сепарабельные марковские процессы со значениями в R. Для определенности положим $B=[0, 1]$. В дальнейшем удобно считать, что $\xi(\cdot)\equiv\eta(\cdot)\equiv 0$ на $R\setminus[0, 1]$.

Говоря о распределениях процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, будем иметь в виду соответствующие распределения в пространстве $\mathcal{F}[0, 1]$ всех числовых функций на отрезке $[0, 1]$ с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами.

Для сепарабельных случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, заданных на одном вероятностном пространстве, положим

$$\rho(\xi, \eta)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi(t)-\eta(t)|;$$

$$\varkappa_\rho(\xi, \eta)=\inf\{\varepsilon>0:\mathbf{P}(\rho(\xi, \eta)>\varepsilon)<\varepsilon\}.$$

Отметим, что в силу сепарабельности $\xi(t)$ и $\eta(t)$ функционал $\rho(\xi, \eta)$ есть случайная величина.

Величина $\varkappa_\rho(\xi, \eta)$ называется расстоянием Ки — Фана между $\xi(t)$ и $\eta(t)$ [1]. В терминах $\varkappa_\rho(\xi, \eta)$ мы и будем получать оценки близости распределений случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Прежде чем перейти к формулировке теоремы 1, введем следующее обозначение:

$$F^{\Delta}_{l(t)}(x \mid l(t-\Delta),\ l(t+\Delta)) = \mathbf{P}(l(t) < x \mid l(t-\Delta),\ l(t+\Delta)),$$

где $t \in (0,\ 1]$; $\Delta > 0$, а $l(\cdot)$ есть либо $\xi(\cdot)$, либо $\eta(\cdot)$. Для того чтобы не вводить новых обозначений, условимся, что при любом $\Delta > 0$

$$F^{\Delta}_{l(0)}(x \mid l(-\Delta),\ l(\Delta)) \equiv \mathbf{P}(l(0) < x).$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $F^{\Delta}_{l(t)}(x \mid u, v)$ как функция от x при любых фиксированных u, v, Δ, t является функцией распределения.

Далее, через t^k_d будем обозначать двоично-рациональную точку $k2^{-d}$, где $d = 0,\ 1, \ldots$, $k = 0,\ 1, \ldots, 2^d$. Для удобства обозначений введем точки t^{-1}_d, t^k_{-1}, которые по определению положим равными 0.

Для любой точки $t^k_d \in (0, 1]$ определим множество $\Gamma(t^k_d)$ двоично-рациональных точек из $[0,\ 1]$, которое есть совокупность левых и правых концов отрезков, вложенных один в другой по следующему правилу: каждый новый отрезок получается путем деления пополам отрезка, построенного на предыдущем шаге процедуры ($[0,\ 1]$ — начальный отрезок), при этом точка t^k_d должна принадлежать одновременно всем отрезкам; если точка t^k_d совпадает с одним из концов вновь построенного отрезка, то процедура деления прекращается.

Более формально, если $[t^l_m, t^{l+1}_m]$ — отрезок, полученный на m-м шаге процедуры, и t^k_d не совпадает с одним из его концов, то следующим отрезком будет либо $[t^l_m, t^{2l+1}_{m+1}]$, либо $[t^{2l+1}_{m+1}, t^{l+1}_m]$ в зависимости от того, какому из них принадлежит t^k_d. Если $t^k_d = t^l_m$ или $t^k_d = t^{l+1}_m$, то дальнейшее вложение прекращается. Например, $\Gamma(1) = \{0,\ 1\}$, $\Gamma(1/2) = \{0,\ 1/2,\ 1\}$, $\Gamma(1/4) = \{0,\ 1/4,\ 1/2,\ 1\}$, $\Gamma(3/4) = \{0,\ 1/2,\ 3/4,\ 1\}$ и т. д. Кроме того, по определению положим $\Gamma(0) = \{0\}$. Отметим очевидные свойства введенных множеств

$$\Gamma(t^k_d) = \Gamma(t^{2^m k}_{d+m}); \quad \Gamma(t^{2k-1}_d) = \Gamma(t^{k-1}_{d-1}) \cup \Gamma(t^k_{d-1}) \cup \{t^{2k-1}_d\}. \tag{1}$$

Условимся, что на протяжении всей статьи символ C (с индексом или без) будет обозначать положительные постоянные. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — произвольные сепарабельные марковские процессы на $[0,\ 1]$. Предположим, что существуют $\delta > 0$ и натуральное $N = N(\delta)$, для которых выполнено:*

$$1)\ \sum_{j=1}^{2^N} \mathbf{P}\Bigl(\sup_{t^{j-1}_N \leq t \leq t^j_N} |l(t) - l(t^{j-1}_N)| > \delta\Bigr) \leq C_1\delta, \quad \text{где } l = \xi,\ \eta;$$

2) *функция $F^{\Delta}_{\eta(t)}(x \mid u, v)$ непрерывно дифференцируема по x, u, v и равномерно по всем x, u, v и t:*

---

[1] При соответствующих ограничениях на $\xi(t)$, $\eta(t)$ можно было бы рассматривать $\varkappa_\rho(\xi, \eta)$ и для других «метрик» $\rho(\cdot, \cdot)$. Выбор «равномерной метрики» обусловлен главным образом простотой формулировки условий теорем.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} F^{\Delta}_{\eta(t)}(\cdot)\right]^{-1}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial u} F^{\Delta}_{\eta(t)}(\cdot)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial v} F^{\Delta}_{\eta(t)}(\cdot)\right|\right\}\leqslant 1+h(\Delta),$$

при этом $h(\cdot)\geqslant 0$ *и* $H=\sum_{m=0}^{\infty} h(2^{-m})<\infty$;

3) *для любых* $x,\ u,\ v\in R,\ t,\ \Delta\in[0,\ 1]$ *найдется такое* $\gamma=\gamma(\Delta,\ t,\ x,\ u,\ v)$, *что*

$$F^{\Delta}_{\eta(t)}(x-\gamma\,|\,u,\ v)\leqslant F^{\Delta}_{\xi(t)}(x\,|\,u,\ v)\leqslant F^{\Delta}_{\eta(t)}(x+\gamma\,|\,u,\ v);$$

$$\sum_{k=0}^{2^N}\mathbf{P}\left(\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma(t_N^k)}\gamma\left(2^{-j},\ t_j^{2i-1},\ \xi(t_j^{2i-1}),\ \xi(t_{j-1}^{i-1}),\ \xi(t_{j-1}^{i})\right)>\delta\right)\leqslant C_2\delta.$$

Тогда существует такое представление процессов $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *на одном вероятностном пространстве, что*

$$\varkappa_\rho(\xi,\ \eta)\leqslant C\delta,$$

где $C=\max\{2C_1+C_2,\ 2+e^H\}$.

Прежде чем формулировать теорему 2, введем следующее обозначение:

$$\mu(t_d^{2k-1})=\int\int \mathbf{P}\left(\xi(t_{d-1}^{k-1})\in du;\ \xi(t_{d-1}^{k})\in dv\right)\int dx\times$$
$$\times\left|F^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(x\,|\,u,\ v)-F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(x\,|\,u,\ v)\right|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1. *Предположим дополнительно, что*

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^N}\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma(t_N^k)}\mu(t_j^{2i-1})\leqslant C_2\delta^2.$

Тогда существует такое представление процессов $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *на одном вероятностном пространстве, что*

$$\varkappa_\rho(\xi,\ \eta)\leqslant C\delta,$$

где постоянная C *определена в теореме* 1.

Далее, положим для любого натурального N $t_k=k/N$, $k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$;

$$F_l^{k,N}(x\,|\,u)=\mathbf{P}\left(l(t_k)-l(t_{k-1})<x\,|\,l(t_{k-1})=u\right),$$

где, как и прежде, $l(\cdot)$ есть либо $\xi(\cdot)$, либо $\eta(\cdot)$;

$$\nu_{k,N}(u)=\int\left|F_\xi^{k,N}(x\,|\,u)-F_\eta^{k,N}(x\,|\,u)\right|dx,\qquad k\geqslant 0.$$

Теорема 3. *Пусть существуют такие* $\delta>0$ *и натуральное* N, *для которых выполнено*:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}\left(\sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k}|l(t)-l(t_{k-1})|>\delta\right)\leqslant C_0\delta,$ *где* $l=\xi,\ \eta$;

2) *функция* $F_\eta^{k,N}(x|u)$ *непрерывно дифференцируема по* $u,\ x$ *и равномерно по всем* $u,\ x,\ k$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}F_\eta^{k,N}(\cdot)\right]^{-1}\left|\frac{\partial}{\partial u}F_\eta^{k,N}(\cdot)\right|\leqslant C_1/N;$$

3) $\displaystyle\max_{0\leqslant k\leqslant N}\mathbf{E}\nu_{k,N}(\xi(t_{k-1}))\leqslant C_2\delta^2/N.$

Тогда существует такое представление процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на одном вероятностном пространстве, что

$$\varkappa_\rho(\xi, \eta) \leqslant C\delta,$$

где

$$C = 1 + C_0 + \sqrt{(1+C_0)^2 + 4C_2\left(e^{2C_1} - 1\right)/C_1}.$$

Отметим, что теорема 1 позволяет получить оценки порядка $O(n^{-1/2}\log n)$ для $\varkappa_\rho(\xi, \eta)$ в случае, когда $\xi(t) \equiv \xi_n(t)$ есть эмпирический процесс, а $\eta(t)$ — «броуновский мост» или когда $\xi(t) \equiv \xi_n(t)$ есть «ступенчатая ломаная» (при выполнении условий работы [4]), а $\eta(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Теоремы 2, 3 дают удовлетворительные результаты, например, тогда, когда процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют конечные абсолютные моменты невысокого порядка.

В разделах 3, 4 мы отдельно остановимся на условиях 2, 3 сформулированных теорем.

Автор глубоко признателен К. А. Боровкову, прочитавшему рукопись статьи и сделавшему ряд полезных замечаний.

2. Доказательство теорем

При доказательстве первых двух теорем будет использована более общая по сравнению с [4] «диадическая схема», суть которой состоит в задании последовательностей $\{\xi(t_N^k);\ 0 \leqslant k \leqslant 2^N\}$ и $\{\eta(t_N^k);\ 0 \leqslant k \leqslant 2^N\}$ на одном вероятностном пространстве с помощью так называемых условных квантильных преобразований.

Доказательство теоремы 1. Первый этап доказательства состоит в построении $\xi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве. Введем следующее обозначение:

$$Q^{\Delta}_{l(t)}(x \mid u, v) = \sup\{z :\ F^{\Delta}_{l(t)}(z \mid u, v) < x\},$$

где $t, \Delta \in [0, 1]$, $x, u, v \in R$. По определению, полагаем $Q^{\Delta}_{l(t)}(0 \mid \cdot, \cdot) = -\infty$.

Пусть $\{z_{i,j};\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 0\}$ — бесконечный двумерный массив независимых с. в., каждая из которых распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Теперь определим значения $l(0)$ и $l(1)$ (напомним, что $l(t)$ — любой из процессов $\xi(t)$ или $\eta(t)$) по формулам

$$l^*(0) = Q_{l(0)}(z_{0,0} \mid \cdot);\quad l^*(1) = Q^1_{l(1)}(z_{1,0} \mid l^*(0), 0).$$

Дальнейшее построение будем осуществлять с помощью следующей рекуррентной процедуры. В двоично-рациональной точке t_d^{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$, $d = 1, 2, \ldots$, положим

$$l^*\left(t_d^{2k-1}\right) = Q^{2^{-d}}_{l\left(t_d^{2k-1}\right)}\left(z_{k,d} \mid l^*\left(t_{d-1}^{k-1}\right),\ l^*\left(t_{d-1}^{k}\right)\right).$$

Лемма 1. *Для любого целого $d \geqslant 0$ совместные распределения совокупностей* $\{l^*(t_d^k);\ k = 0, 1, \ldots, 2^d\}$ и $\{l(t_d^k);\ k = 0, 1, \ldots, 2^d\}$ *совпадают.*

Доказательство проведем индукцией по d. При $d = 0$ имеем

$$\mathbf{P}(l^*(0) < x_0;\ l^*(1) < x_1) = \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{P}\left(Q^1_{l(1)}(z_{1,0} \mid y, 0) < x_1\right) d\mathbf{P}(l^*(0) < y). \quad (2)$$

Из определения функций $Q^{\Delta}_{l(\cdot)}(\cdot)$ следует, что

$$\mathbf{P}(l^*(0) < y) = \mathbf{P}\left(Q_{l(0)}(z_{0,0} \mid \cdot) < y\right) = \mathbf{P}(l(0) < y);$$

$$\mathbf{P}\left(Q^{1}_{l(1)}(z_{1,0}\,|\,y,0)<x_1\right)=F^{1}_{l(1)}(x_1\,|\,y,0).$$

Подставляя эти выражения в (2), получаем требуемое.

Предположим теперь, что наше утверждение справедливо при $d=k$. Тогда при $d=k+1$ имеем

$$J\equiv\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{2^{k+1}}\{l^*(t^i_{k+1})<x_i\}\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2^k}\left\{Q^{2^{-(k+1)}}_{l\left(t^{2i-1}_{k+1}\right)}\left(z_{i,k+1}\,|\,l^*(t^{i-1}_k),\ l^*(t^i_k)\right)<\right.\right.$$

$$\left.\left.<x_{2i-1};\ \bigcap_{i=0}^{2^k}\{l^*(t^i_k)<x_{2i}\}\right\}\right).$$

По построению с. в. $\{l^*(t^i_k);\ i=0,1,\ldots,2^k\}$ не зависят от с. в. $\{z_{i,k+1};\ i=1,2,\ldots,2^k\}$. Поэтому с учетом независимости $\{z_{i,j}\}$ и в силу индукционного предположения

$$J=\int\limits_{\bigcap_{i=0}^{2^k}\{y_i<x_{2i}\}}\cdots\int\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{2^k}\{l^*(t^i_k)\in dy_i\}\right)\times$$

$$\times\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2^k}\left\{Q^{2^{-(k+1)}}_{l\left(t^{2i-1}_{k+1}\right)}(z_{i,k+1}\,|\,y_{i-1},y_i)<x_{2i-1}\right\}\right)=$$

$$=\int\limits_{\bigcap_{i=0}^{2^k}\{y_i<x_{2i}\}}\cdots\int\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{2^k}\{l(t^i_k)\in dy_i\}\right)\prod_{i=1}^{2^k}F^{2^{-(k+1)}}_{l\left(t^{2i-1}_{k+1}\right)}(x_{2i-1}\,|\,y_{i-1},y_i).\quad(3)$$

Далее, в силу марковости процесса $l(t)$ имеем

$$\prod_{i=1}^{2^k}F^{2^{-(k+1)}}_{l\left(t^{2i-1}_{k+1}\right)}(x_{2i-1}\,|\,y_{i-1},y_i)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2^k}\{l(t^{2i-1}_{k+1})<x_{2i-1}\}\,\middle|\,\bigcap_{i=0}^{2^k}\{l(t^i_k)=y_i\}\right).$$

Подставляя это выражение в (3), получаем требуемое. Лемма доказана.

Если совокупность двоично-рациональных точек $\mathscr{D}=\{t^k_d,\ k\geqslant 0,\ d\geqslant 0\}$ является множеством сепарабельности процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (для этого, например, достаточно потребовать стохастическую непрерывность процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ на $[0,1]$), то лемма 1 позволяет на вероятностном пространстве R^∞ (на котором заданы $\{z_{i,j}\}$) построить случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Если же множество сепарабельности $\xi(t)$ и $\eta(t)$ отлично от $\mathscr{D}$ (точнее, от любого подмножества $\mathscr{D}$), то, как нетрудно видеть, доказанная лемма обеспечивает построение случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на вероятностном пространстве $\mathscr{F}[0,1]\times\mathscr{F}[0,1]\times R^{2d+1}$ для любого $d\geqslant 0$. Отметим, что на подпространстве R^{2d+1} задана совокупность с. в. $\{z_{i,d};\ 0\leqslant i\leqslant 2^d\}$, с помощью которых мы определяем значения $\{\xi^*(t^k_d);\ 0\leqslant k\leqslant 2^d\}$ и $\{\eta^*(t^k_d);\ 0\leqslant k\leqslant 2^d\}$. А на каждой из «координатных осей» $\mathscr{F}[0,1]$ с помощью соответствующего семейства условных распределений строим траектории одного из процессов — $\xi(t)$ или $\eta(t)$. При этом задаем процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ условно (относительно σ-алгебры, порожденной с. в. $\{z_{i,d};\ 0\leqslant i\leqslant 2^d\}$) независимыми.

Далее в доказательстве предполагается, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданы на одном вероятностном пространстве указанным выше способом.

Обозначим через $\xi_N(t)$ и $\eta_N(t)$ кусочно-постоянные случайные процессы, определяемые равенствами

$$\xi_N(t)=\xi([t2^N]2^{-N});\quad \eta_N(t)=\eta([t2^N]2^{-N});\quad t\in[0,\ 1],$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\rho(\xi,\ \eta)>(2+e^H)\delta)\leqslant\mathbf{P}(\rho(\xi,\ \xi_N)>\delta)+\mathbf{P}(\rho(\eta,\ \eta_N)>\delta)+\\+\mathbf{P}(\rho(\xi_N,\ \eta_N)>e^H\delta)\leqslant 2C_1\delta+\mathbf{P}(\rho(\xi_N,\ \eta_N)>e^H\delta).\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь мы воспользовались условием 1 теоремы.

Покажем, что

$$\mathbf{P}(\rho(\xi_N,\ \eta_N)>e^H\delta)\leqslant C_2\delta.\tag{5}$$

Очевидно, что из (4) и (5) следует утверждение теоремы.

Предварительно введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta_1(t_d^{2k-1})=Q^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\xi(t_{d-1}^{k-1}),\ \xi(t_{d-1}^{k}))-\\-Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\xi(t_{d-1}^{k-1}),\ \xi(t_{d-1}^{k}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(t_d^{2k-1})=Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\xi(t_{d-1}^{k-1}),\ \xi(t_{d-1}^{k}))-\\-Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\eta(t_{d-1}^{k-1}),\ \eta(t_{d-1}^{k}));\quad k,d\geqslant 0.\end{aligned}$$

Отметим, что $\Delta_1(0)=\xi(0)-\eta(0)$; $\Delta_2(0)=0$.

Далее, имеем

$$\rho(\xi_N,\eta_N)=\max_{0\leqslant k\leqslant 2^N}|\xi(t_N^k)-\eta(t_N^k)|.\tag{6}$$

Легко видеть, что при $d\geqslant 0,\ k\geqslant 0$

$$\xi(t_d^{2k-1})-\eta(t_d^{2k-1})=\Delta_1(t_d^{2k-1})+\Delta_2(t_d^{2k-1}).\tag{7}$$

Лемма 2. *Для любого* $t_d^{2k-1},\ d\geqslant 0,\ k\geqslant 1,$

$$|\Delta_2(t_d^{2k-1})|\leqslant B_1(t_d^{2k-1})\,|\xi(t_{d-1}^{k-1})-\eta(t_{d-1}^{k-1})|+B_2(t_d^{2k-1})\,|\xi(t_{d-1}^{k})-\eta(t_{d-1}^{k})|$$

где

$$B_1(t_d^{2k-1})=\left[\frac{\partial}{\partial x}F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3)\right]^{-1}\left|\frac{\partial}{\partial u}F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3)\right|;$$

$$B_2(t_d^{2k-1})=\left[\frac{\partial}{\partial x}F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3)\right]^{-1}\left|\frac{\partial}{\partial v}F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3)\right|,$$

$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ — *с. в., зависящие от с. в.* $\{z_{i,j};\ i\leqslant k,\ j\leqslant d\}$, *а также от распределений процессов* $\xi(\cdot)$ *и* $\eta(\cdot)$.

Доказательство. Положим

$$x_1=Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\xi(t_{d-1}^{k-1}),\ \xi(t_{d-1}^{k}));$$

$$x_2=Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d}\,|\,\eta(t_{d-1}^{k-1}),\ \eta(t_{d-1}^{k})).$$

По определению функций $Q^{\Delta}_{\eta(\cdot)}(\cdot)$ с учетом непрерывности $F^{\Delta}_{\eta(\cdot)}(\cdot)$ имеем

$$F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(x_1\,|\,\xi(t_{d-1}^{k-1}),\ \xi(t_{d-1}^{k}))=F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(x_2\,|\,\eta(t_{d-1}^{k-1}),\ \eta(t_{d-1}^{k})).$$

В силу формулы конечных приращений

$$0=F^{2^{-d}}_{\eta\left(t_d^{2k-1}\right)}\left(x_1\,|\,\xi\left(t_{d-1}^{k-1}\right),\ \xi\left(t_{d-1}^{k}\right)\right)-$$

$$-F^{2^{-d}}_{\eta\left(t_d^{2k-1}\right)}\left(x_2\,|\,\eta\left(t_{d-1}^{k-1}\right),\ \eta\left(t_{d-1}^{k}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}F_{\eta(\cdot)}\left(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3\right)(x_1-x_2)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}F_{\eta(\cdot)}\left(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3\right)\left(\xi\left(t_{d-1}^{k-1}\right)-\eta\left(t_{d-1}^{k-1}\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}F_{\eta(\cdot)}\left(\theta_1\,|\,\theta_2,\ \theta_3\right)\left(\xi\left(t_{d-1}^{k}\right)-\eta\left(t_{d-1}^{k}\right)\right).$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством для модуля суммы. Лемма доказана.

Из (7) с помощью леммы 2 получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\left|\xi\left(t_d^{2k-1}\right)-\eta\left(t_d^{2k-1}\right)\right|\leqslant\left|\Delta_1\left(t_d^{2k-1}\right)\right|+B_1\left(t_d^{2k-1}\right)\left|\xi\left(t_{d-1}^{k-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\eta\left(t_{d-1}^{k-1}\right)\right|+B_2\left(t_d^{2k-1}\right)\left|\xi\left(t_{d-1}^{k}\right)-\eta\left(t_{d-1}^{k}\right)\right|. \qquad (8)$$

Неравенство (8) позволяет нам получить оценку сверху для разности $\left|\xi\left(t_d^{2k-1}\right)-\eta\left(t_d^{2k-1}\right)\right|$ в терминах с. в. $|\Delta_1(\cdot)|$.

Лемма 3. *Для любого* t_d^{2k-1}, $d\geqslant 0$, $k\geqslant 1$, *имеет место неравенство*

$$\left|\xi\left(t_d^{2k-1}\right)-\eta\left(t_d^{2k-1}\right)\right|\leqslant e^{\sum\limits_{s=0}^{d}h(2^{-s})}\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma\left(t_d^{2k-1}\right)}\left|\Delta_1\left(t_j^{2i-1}\right)\right|. \qquad (9)$$

Доказательство леммы проведем индукцией по d. При $d=0$ утверждение очевидно, так как

$$|\xi(1)-\eta(1)|\leqslant|\Delta_1(1)|+B_1(1)|\Delta_1(0)|\leqslant(1+h(1))(|\Delta_1(1)|+|\Delta_1(0)|)\leqslant$$

$$\leqslant e^{h(1)}(|\Delta_1(1)|+|\Delta_1(0)|).$$

Далее, пусть (9) выполнено для всех $d\leqslant m$. Тогда при $d=m+1$ из (8) в силу предположения индукции следует неравенство

$$\left|\xi\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)-\eta\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)\right|\leqslant\left|\Delta_1\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)\right|+B_1\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)e^{\sum\limits_{s=0}^{m_1}h(2^{-s})}\times$$

$$\times\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma\left(t_m^{k-1}\right)}\left|\Delta_1\left(t_j^{2i-1}\right)\right|+B_2\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)\times$$

$$\times e^{\sum\limits_{s=0}^{m_2}h(2^{-s})}\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma\left(t_m^{k}\right)}\left|\Delta_1\left(t_j^{2i-1}\right)\right|\leqslant e^{\sum\limits_{s=0}^{\max(m_1,m_2)}h(2^{-s})}\times$$

$$\times\left\{\left|\Delta_1\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)\right|+B_1(\cdot)\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma\left(t_m^{k-1}\right)}\left|\Delta_1\left(t_j^{2i-1}\right)\right|+B_2(\cdot)\sum_{t_j^{2i-1}\in\Gamma\left(t_m^{k}\right)}\left|\Delta_1\left(t_j^{2i-1}\right)\right|\right\},$$

где m_1 и m_2 однозначно определяются из равенств $t_m^{k-1}=t_{m_1}^{2p-1}$ и $t_m^{k}=t_{m_2}^{2l-1}$. Нетрудно понять, что $\max(m_1,\ m_2)=m$. Приводя подобные члены в правой части этого неравенства (с учетом условия $B_1\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)+B_2\left(t_{m+1}^{2k-1}\right)\leqslant 1+h\left(2^{-(m+1)}\right)$, неравенства $1+x\leqslant e^x$ и свойств (1) множеств $\Gamma(\cdot)$), получаем требуемое. Лемма доказана.

В силу леммы 3 и представления (6) имеем

$$\mathbf{P}(\rho(\xi_N, \eta_N) > e^H\delta) \leqslant \sum_{k=0}^{2^N} \mathbf{P}\left(\sum_{t_j^{2i-1} \in \Gamma(t_N^k)} |\Delta_1(t_j^{2i-1})| > \delta\right). \tag{10}$$

По определению функции $Q^{\Delta}_{\eta(\cdot)}(\cdot)$ из неравенства

$$F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(x - \gamma \mid u, v) \leqslant F^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(x \mid u, v) \leqslant F^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(x + \gamma \mid u, v)$$

следует

$$-\gamma \leqslant x - Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}\left(F^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(x \mid u, v) \mid u, v\right) \leqslant \gamma. \tag{11}$$

Положим

$$x = Q^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(z_{k,d} \mid \xi(t_{d-1}^{k-1}), \xi(t_{d-1}^{k})); \quad u = \xi(t_{d-1}^{k-1}); \quad v = \xi(t_{d-1}^{k}).$$

Тогда нетрудно понять, что

$$Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}\left(F^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(x \mid u, v) \mid u, v\right) = Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z_{k,d} \mid u, v). \tag{12}$$

Таким образом. из (11) и (12) следует, что

$$|\Delta_1(t_d^{2k-1})| \leqslant \gamma(2^{-d}, t_d^{2k-1}, \xi(t_d^{2k-1}), \xi(t_{d-1}^{k-1}), \xi(t_{d-1}^{k})). \tag{13}$$

Наконец, из (10), (13) и условия 3 теоремы мы получаем

$$\mathbf{P}(\rho(\xi_N, \eta_N) > e^H\delta) \leqslant C_2\delta.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 отличается от предыдущего лишь в заключительной части. А именно с помощью леммы 3 и неравенства Чебышева получаем

$$\mathbf{P}(\rho(\xi_N, \eta_N) > e^H\delta) \leqslant \sum_{k=0}^{2^N} \mathbf{P}\left(\sum_{t_j^{2i-1} \in \Gamma(t_N^k)} |\Delta_1(t_j^{2i-1})| > \delta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-1} \sum_{k=0}^{2^N} \sum_{t_j^{2i-1} \in \Gamma(t_N^k)} \mathbf{E}|\Delta_1(t_j^{2i-1})|.$$

Остается только заметить (см. [1]), что для любой точки t_d^{2k-1}

$$\mathbf{E}|\Delta_1(t_d^{2k-1})| = \int\int \mathbf{P}(\xi(t_{d-1}^{k-1}) \in du;\ \xi(t_{d-1}^{k}) \in dv) \times$$

$$\times \int_0^1 dz \left| Q^{2^{-d}}_{\xi(t_d^{2k-1})}(z \mid u, v) - Q^{2^{-d}}_{\eta(t_d^{2k-1})}(z \mid u, v) \right| = \mu(t_d^{2k-1}), \tag{14}$$

и воспользоваться условием 3. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{z_j;\ j \geqslant 0\}$ — последовательность независимых с. в., распределенных равномерно на $[0, 1]$.

Построение процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ на одном вероятностном пространстве начнем с задания величин $\xi(0)$ и $\eta(0)$ по формулам $l^*(0) = Q_l^{0,N}(z_0 \mid 0)$, где $l(t)$ по-прежнему обозначает любой из процессов $\xi(t)$ или $\eta(t)$, $Q_l^{k,N}(x \mid u) = \sup\{y : F_l^{k,N}(y \mid u) < x\}$.

Теперь с помощью рекуррентного соотношения

$$l^*(t_{k+1}) = l^*(t_k) + Q_l^{k+1,N}(z_{k+1} \mid l^*(t_k)) = \sum_{j=0}^{k+1} Q_l^{j,N}(z_j \mid l^*(t_{j-1}))$$

определяем значения процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в точках t_k, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Лемма 4. *Совместные распределения совокупностей* $\{l^*(t_j);\ 0 \leqslant j \leqslant N\}$ *и* $\{l(t_j);\ 0 \leqslant j \leqslant N\}$ *совпадают.*

Доказательство. Будем сравнивать распределения совокупностей $\{l^*(t_j);\ 0 \leqslant j \leqslant M\}$ и $\{l(t_j);\ 0 \leqslant j \leqslant M\}$ для $M = 0, 1, 2, \ldots, N$. Доказательство проведем индукцией по M.

При $M = 0$ утверждение, очевидно, выполнено. Пусть теперь утверждение справедливо при $M = k \geqslant 0$. Тогда для $M = k + 1$ с учетом марковости $l(t)$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k+1}\{l^*(t_j) < x_j\}\right) = \int_{-\infty}^{x_k} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1}\{l^*(t_j) < x_j\};\ l^*(t_k) \in dy\right) \times$$

$$\times \mathbf{P}\left(Q_l^{k+1,N}(z_{k+1} \mid y) < x_{k+1} - y\right) = \int_{-\infty}^{x_k} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1}\{l(t_j) < x_j\};\ l(t_k) \in dy\right) \times$$

$$\times F_l^{k+1,N}(x_{k+1} - y \mid y) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k+1}\{l(t_j) < x_j\}\right),$$

где $\bigcap\limits_{j=0}^{k-1}\{\ldots\}$ при $k = 0$ есть, по определению, все пространство элементарных исходов. Лемма доказана.

Таким образом, на расширенном вероятностном пространстве $R^{N+1} \times \times \mathscr{F}[0, 1] \times \mathscr{F}[0, 1]$ (подробнее см. доказательство теоремы 1) с помощью леммы 4 можно задать случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Далее, поступая так же, как и при доказательстве теоремы 1, сводим оценку $\mathbf{P}(\rho(\xi, \eta) > 2(1 + a)\delta)$ к оценке $\mathbf{P}(\rho(\xi_N, \eta_N) > 2a\delta)$, где $a > 0$; $l_N(t) = l([tN]N^{-1})$; $t \in [0, 1]$.

Обозначим

$$\Delta_k^{(1)} = Q_\xi^{k,N}(z_k \mid \xi(t_{k-1})) - Q_\eta^{k,N}(z_k \mid \xi(t_{k-1}));$$
$$\Delta_k^{(2)} = Q_\eta^{k,N}(z_k \mid \xi(t_{k-1})) - Q_\eta^{k,N}(z_k \mid \eta(t_{k-1})).$$

Теперь, применяя неравенство Чебышева для первых моментов, получаем

$$\mathbf{P}(\rho(\xi_N, \eta_N) > 2a\delta) \leqslant \mathbf{P}\left(\max_{0 \leqslant s \leqslant N}\left|\sum_{k=0}^{s} \Delta_k^{(1)}\right| > a\delta\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant s \leqslant N}\left|\sum_{k=0}^{s} \Delta_k^{(2)}\right| > a\delta\right) \leqslant (a\delta)^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{N} \mathbf{E}\left|\Delta_k^{(1)}\right| + \sum_{k=0}^{N} \mathbf{E}\left|\Delta_k^{(2)}\right|\right\}. \quad (15)$$

С учетом замечания, сделанного при выводе (14), имеем

$$\mathbf{E}\left|\Delta_k^{(1)}\right| = \mathbf{E}\nu_{k,N}(\xi(t_{k-1})), \quad 0 \leqslant k \leqslant N.$$

Лемма 5. *Для любого* $k \geqslant 0$

$$\mathbf{E}\left|\Delta_k^{(2)}\right| \leqslant \gamma(1 + \varepsilon)^k, \quad (16)$$

где $\varepsilon = C_1/N$; $\gamma = C_2\delta^2/N$; C_1, C_2 *определены в теореме* 3.

Доказательство. Обозначим через u и v величины $Q_\eta^{k,N}(z_k \mid \xi(t_{k-1}))$ и $Q_\eta^{k,N}(z_k \mid \eta(t_{k-1}))$. Тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, получаем

$$F_{\eta}^{k,N}(u \mid \xi(t_{k-1})) = F_{\eta}^{k,N}(v \mid \eta(t_{k-1})).$$

Отсюда, а также из формулы конечных приращений и условия 2 теоремы следует неравенство

$$|\Delta_k^{(2)}| = |u - v| \leqslant \varepsilon |\xi(t_{k-1}) - \eta(t_{k-1})|, \tag{17}$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$. Поскольку для любого $k \geqslant 0$

$$\xi(t_k) - \eta(t_k) = \xi(t_{k-1}) - \eta(t_{k-1}) + \Delta_k^{(1)} + \Delta_k^{(2)},$$

из (17) при $k \geqslant 1$ получаем

$$\mathbf{E}|\Delta_k^{(2)}| \leqslant \varepsilon \mathbf{E}|\xi(t_{k-1}) - \eta(t_{k-1})| \leqslant \varepsilon \{\mathbf{E}|\xi(t_{k-2}) - \eta(t_{k-2})| + \\ + \mathbf{E}|\Delta_k^{(1)}| + \mathbf{E}|\Delta_k^{(2)}|\} \leqslant \varepsilon \{(1+\varepsilon)\mathbf{E}|\xi(t_{k-2}) - \eta(t_{k-2})| + \gamma\} \leqslant \\ \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon\gamma \sum_{i=0}^{k-1} (1+\varepsilon)^i \leqslant \gamma(1+\varepsilon)^k.$$

При $k = 0$ оценка (16) тривиальна $(\Delta_0^{(2)} = 0)$. Лемма доказана.

Далее, имеем

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{E}|\Delta_k^{(2)}| \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{N} (1+\varepsilon)^k = \gamma\varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)^{N+1} - 1] \leqslant \\ \leqslant \gamma\varepsilon^{-1}(e^{2C_1} - 1) = \delta^2 (e^{2C_1} - 1) C_2/C_1.$$

Кроме того, в силу условия 3

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{E}|\Delta_k^{(1)}| \leqslant \gamma(N+1) \leqslant 2C_2\delta^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\rho(\xi, \eta) > 2(1+a)\delta) \leqslant [2C_0 + a^{-1}(2C_2 + (e^{2C_1} - 1) C_2/C_1)]\,\delta.$$

Понятно, что в качестве оптимального a необходимо взять положительный корень уравнения

$$2(1+a) = 2C_0 + a^{-1}[2C_2 + (e^{2C_1} - 1) C_2/C_1],$$

откуда

$$a = \frac{1}{2}\left(C_0 - 1 + \sqrt{(1+C_0)^2 + 4(e^{2C_1} - 1) C_2/C_1}\right).$$

Теорема доказана.

3. Некоторые частные случаи

1. Конкретизируем условие 2 сформулированных теорем в случае, когда в качестве предельного выступает произвольный гауссовский марковский процесс $\eta(t)$. Сначала остановимся на условии 2 теорем 1, 2. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$, $t_j \in [0, 1]$. Тогда для любого гауссовского процесса $\eta(t)$ с корреляционной функцией $R(t, s)$ справедливо представление

$$\mathbf{P}(\eta(t_2) < x \mid \eta(t_1) = u,\ \eta(t_3) = v) = \mathbf{P}(\eta(t_2) - \\ - c_1(t_1, t_2, t_3)\eta(t_1) - c_2(t_1, t_2, t_3)\eta(t_3) < x - c_1(t_1, t_2, t_3)u - c_2(t_1, t_2, t_3)v), \tag{18}$$

где $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} R(t_1, t_2) = c_1 R(t_1, t_1) + c_2 R(t_1, t_3), \\ R(t_2, t_3) = c_1 R(t_1, t_3) + c_2 R(t_3, t_3). \end{cases} \tag{19}$$

Это является следствием того факта, что с. в. $\eta(t_2)-c_1\eta(t_1)-c_2\eta(t_3)$ не зависит от пары с. в. $\eta(t_1)$ и $\eta(t_3)$ (поскольку с. в. $\eta(t_2)-c_1\eta(t_1)-c_2\eta(t_3)$ и $\alpha\eta(t_1)+\beta\eta(t_3)$ для любых $\alpha,\ \beta\in R$ не коррелированы и имеют нормальное совместное распределение).

Если $D=R(t_1,\ t_1)R(t_3,\ t_3)-R^2(t_1,\ t_3)\neq 0$, то система (19) имеет единственное решение

$$c_1(t_1,\ t_2,\ t_3)=(R(t_1,\ t_2)R(t_3,\ t_3)-R(t_2,\ t_3)R(t_1,\ t_3))D^{-1};$$
$$c_2(t_1,\ t_2,\ t_3)=(R(t_1,\ t_1)R(t_2,\ t_3)-R(t_1,\ t_3)R(t_1,\ t_2))D^{-1}.$$

Отметим, что с помощью леммы 6, которая будет далее сформулирована, нетрудно показать, что $c_i(\cdot)\geqslant 0,\ i=1,\ 2.$

Если же $D=0$, то при некоторых $\alpha,\ \beta\in R$ имеет место равенство $\alpha\eta(t_1)+\beta\eta(t_3)=0$ с вероятностью 1. Это означает, что система (19) имеет бесконечно много решений, так что в качестве $c_1,\ c_2$ мы возьмем любое решение (19) (например, $c_1=R(t_1,\ t_2)/R(t_1,\ t_1),\ c_2=0$). Всюду в дальнейшем для определенности считаем, что $D\neq 0$.

Таким образом, из (19) следует, что

$$F^{\Delta}_{\eta(t)}(x\,|\,u,\ v)=\Phi_{t,\Delta}(x-c_1(\cdot)\,u-c_2(\cdot)\,v),$$

где $\Phi_{t,\Delta}(\cdot)$ — функция распределения гауссовской с. в. $\eta(t)-c_1(\cdot)\eta(t-\Delta)-c_2(\cdot)\eta(t+\Delta)$. Следовательно, условие 2 теоремы 1 в этом случае перейдет в требование

$$c_1(t-\Delta,\ t,\ t+\Delta)+c_2(t-\Delta,\ t,\ t+\Delta)\leqslant 1+h(\Delta) \tag{20}$$

при всех $t,\ \Delta\in[0,\ 1]$ таких, что $t-\Delta,\ t+\Delta\in[0,\ 1]$, причем $h(\cdot)\geqslant 0$ и $\sum\limits_{s=0}^{\infty}h\left(2^{-s}\right)<\infty$. Например, в случае, когда $\eta(t)=w(t)$ — стандартный винеровский процесс или $\eta(t)=\overset{\circ}{w}(t)$ — «броуновский мост», имеет место $c_1(\cdot)\equiv c_2(\cdot)\equiv 1/2$. Так что условие (20) выполнено.

Обозначим через $\mathscr{K}$ класс гауссовских процессов на $[0,\ 1]$, корреляционные функции которых представимы в виде $R(t,\ s)=T(\min(t,\ s))L(\max(t,\ s))$. Это достаточно широкий класс, включающий в себя, например, гауссовские процессы с независимыми приращениями ($L(\cdot)\equiv\text{const}$) и стационарные гауссовские марковские процессы ($T(t)=Be^{\alpha t},\ L(t)=e^{-\alpha t},\ \alpha\geqslant 0$).

Отметим, что все случайные процессы из $\mathscr{K}$ — марковские. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться следующим критерием марковости гауссовских процессов.

Лемма 6. [8]. *Гауссовский процесс $\eta(t)$ будет марковским тогда и только тогда, когда*

$$R(t_1,\ t_2)R(t_2,\ t_3)=R(t_2,\ t_2)R(t_1,\ t_3)$$

для любых $t_1<t_2<t_3$ из области определения $\eta(t)$.

Отметим также следующий полезный факт.

Лемма 7. *Для любых функций $T(\cdot)$ и $L(\cdot)$, удовлетворяющих условиям*

$$T(s)/L(s)\leqslant T(t)/L(t)\ \text{ при }\ s<t;\quad T(s)L(s)\geqslant 0, \tag{21}$$

функция $R(t,\ s)=T(\min(t,\ s))L(\max(t,\ s))$ есть корреляционная функция.

Доказательство. Нам достаточно показать, что для любых $t_1<t_2<\ldots<t_r$ квадратичная форма

$$Q=\sum_{i,j=1}^{r}R(t_i,t_j)\,z_iz_j,\qquad z_k\in R,$$

неотрицательна. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $L(t_j) \neq 0$ при всех $j \leqslant r$. Тогда

$$Q = \sum_{i=1}^{r} T(t_i) L(t_i) z_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{r-1} T(t_i) z_i \sum_{j=i+1}^{r} L(t_j) z_j =$$

$$= T(t_r) L(t_r) z_r^2 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{T(t_i)}{L(t_i)} \left[\sum_{j=i}^{r} L(t_j) z_j \right]^2 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{T(t_i)}{L(t_i)} \left[\sum_{j=i+1}^{r} L(t_j) z_j \right]^2 =$$

$$= \frac{T(t_1)}{L(t_1)} \left[\sum_{j=1}^{r} L(t_j) z_j \right]^2 + \sum_{i=1}^{r-1} \left[\frac{T(t_{i+1})}{L(t_{i+1})} - \frac{T(t_i)}{L(t_i)} \right] \left[\sum_{j=i+1}^{r} L(t_j) z_j \right]^2 \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Условия (21) сформулированной леммы в терминах $R(t, s)$ выглядят как $R^2(t, s) \leqslant R(t, t) R(s, s)$ и $R(s, s) \geqslant 0$, т. е. они являются необходимыми для того, чтобы $R(t, s) = T(\min(t, s)) L(\max(t, s))$ была корреляционной функцией.

Таким образом, для представителей класса $\mathscr{K}$ условие (20) перейдет в требование

$$\frac{L(t+\Delta)[T(t+2\Delta) - T(t)] - T(t+\Delta)[L(t+2\Delta) - L(t)]}{L(t) T(t+2\Delta) - T(t) L(t+2\Delta)} \leqslant 1 + h(\Delta)$$

или

$$[L(t+\Delta) - L(t)][T(t+2\Delta) - T(t)] - [T(t+\Delta) - T(t)][L(t+2\Delta) - L(t)] \leqslant$$
$$\leqslant h(\Delta)\{L(t)[T(t+2\Delta) - T(t)] - T(t)[L(t+2\Delta) - L(t)]\} \qquad (22)$$

при всех Δ, $t \in [0, 1]$ и некоторой $h(\cdot) \geqslant 0$, удовлетворяющей условию $\sum_{s=0}^{\infty} h(2^{-s}) < \infty$.

Легко проверить, что гауссовские процессы с независимыми приращениями и стационарные гауссовские марковские процессы удовлетворяют (22) с функцией $h(\cdot) \equiv 0$.

Соотношение (22) несколько проясняет вероятностный смысл условия 2 теорем 1, 2, которое в известной степени можно понимать как условие регулярности траекторий процесса $\eta(t)$.

Конкретизируем теперь условие 2 теоремы 3. Пусть по-прежнему $\eta(t)$ — произвольный гауссовский марковский процесс. Тогда по аналогии с (18) получаем

$$F_{\eta(t_j)}(x \mid u) = \mathbf{P}(\eta(t_j) - \eta(t_{j-1}) < x \mid \eta(t_{j-1}) = u) = \mathbf{P}(\eta(t_j) -$$
$$- c(t_{j-1}, t_j)\eta(t_{j-1}) < x + (1 - c(t_{j-1}, t_j))u), \qquad (23)$$

где $c(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $R(t_{j-1}, t_j) - cR(t_{j-1}, t_{j-1}) = 0$.

Для простоты рассуждений будем считать, что с. в. $\eta(t_{j-1})$ не вырождена (т. е. $R(t_{j-1}, t_{j-1}) \neq 0$). Тогда

$$c(t_{j-1}, t_j) = \frac{R(t_{j-1}, t_j)}{R(t_{j-1}, t_{j-1})}.$$

Таким образом, из (23) получаем

$$F_{\eta(t_j)}(x \mid u) = \Phi_j(x + (1 - c(t_{j-1}, t_j))u),$$

где $\Phi_j(\cdot)$ — функция распределения гауссовской с. в. $\eta(t_j) - c(t_{j-1}, t_j)\eta(t_{j-1})$. Условие 2 теоремы в этом случае сводится к соотношению

$$\left| 1 - \frac{R(t_{j-1}, t_j)}{R(t_{j-1}, t_{j-1})} \right| \leqslant c/N \qquad (24)$$

равномерно по $j \leqslant N$.

Для представителей класса $\mathcal{K}$ условие (24) имеет вид

$$\left|\frac{L(t_j)-L(t_{j-1})}{L(t_{j-1})}\right| \leqslant c/N$$

равномерно по $j \leqslant N$. В свою очередь, это будет выполнено, если

$$\max_{j<N} \frac{\sup\limits_{t_{j-1}<t<t_j} |L'(t)|}{L(t_{j-1})} \leqslant C < \infty.$$

2. Проиллюстрируем на конкретных примерах один способ проверки условия 3 теоремы 1.

Рассмотрим сначала классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова. В этом случае

$$\xi(t) = S_n(t) = \sum_{k \leqslant [nt]} \xi_k / \sqrt{n}, \quad \eta(t) = w(t),$$

где $\{\xi_k\}$ — независимые одинаково распределенные с. в. с нулевым средним и единичной дисперсией. Для упрощения записи считаем, что $n = 2^{N_0}$ (N_0 — натуральное число).

Предположим, что выполнены условия теоремы 1 в [4]. Тогда справедлива следующая

Лемма 8. *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что в условии*

$$F^{2^{-d}}_{w\left(t_d^{2k-1}\right)}(x-\gamma \mid u, v) \leqslant F^{2^{-d}}_{S_n\left(t_d^{2k-1}\right)}(x \mid u, v) \leqslant F^{2^{-d}}_{w\left(t_d^{2k-1}\right)}(x+\gamma \mid u, v) \quad (25)$$

в качестве $\gamma(\cdot)$ *можно взять функцию*

$$\gamma\left(2^{-d}, t_d^{2k-1}, x, u, v\right) = C_1 2^{d-N_0/2}\left[(u-x)^2 + (x-v)^2\right] + C_2/\sqrt{n}, \quad (26)$$

если только

$$|u-x| \leqslant \varepsilon 2^{N_0/2-d}, \quad |v-x| \leqslant \varepsilon 2^{N_0/2-d}, \quad (27)$$

и $\gamma(\cdot) = \infty$ *в противном случае.*

Доказательство. Заметим, что в нашем случае

$$F^{\Delta}_{l(t)}(x \mid u, v) = \mathbf{P}(l(t) - l(t-\Delta) - [l(t+\Delta) - l(t)] < 2x - u -$$
$$- v \mid l(t+\Delta) - l(t-\Delta) = v - u) = \widetilde{F}^{\Delta}_{l(t)}(2x - u - v \mid v - u).$$

Для $l(t) = S_n(t)$ асимптотика $\widetilde{F}^{\Delta}_{S_n(\cdot)}(\cdot)$ в области больших уклонений была получена в [4], откуда и следует справедливость (25) при условии (27) для функции $\gamma(\cdot)$ вида (26). Лемма доказана.

Далее, нетрудно понять, что в силу независимости и одинаковой распределенности с. в. $\{\xi_k\}$, а также способа построения множеств $\Gamma(\cdot)$ с. в.

$$\Lambda\left(t_d^{2k-1}\right) = \sum_{t_j^{2i-1} \in \Gamma\left(t_d^{2k-1}\right)} \gamma\left(2^{-j}, t_j^{2i-1} S_n\left(t_j^{2i-1}\right), S_n\left(t_{j-1}^{i-1}\right), S_n\left(t_{j-1}^{i}\right)\right)$$

совпадает по распределению со с. в. $\Lambda\left(t_d^1\right)$. В свою очередь, на множестве $A_d = \bigcap_{j=0}^{d} \left\{ \left|S_n\left(t_j^1\right)\right| \leqslant \varepsilon 2^{N_0/2-j};\ \left|S_n\left(t_j^1\right) - S_n\left(t_{j+1}^1\right)\right| \leqslant \varepsilon 2^{N_0/2-j} \right\}$

$$\Lambda\left(t_d^1\right) = C_1 \sum_{j=0}^{d} \frac{2^j}{\sqrt{n}} S_n^2\left(t_j^1\right) + C_1 \sum_{j=0}^{d-1} \frac{2^j}{\sqrt{n}} \left[S_n\left(t_j^1\right) - S_n\left(t_{j+1}^1\right)\right]^2 +$$
$$+ C_2(d+1)/\sqrt{n}. \quad (28)$$

Затем к выражению

$$S_n^2(t_j^1) = [S_n(t_d^1) + (S_n(t_{d-1}^1) - S_n(t_d^1)) + \ldots + (S_n(t_j^1) - S_n(t_{j+1}^1))]^2$$

применим неравенство Гёльдера вида

$$\left(\sum_{i=1}^{M} a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{M} q^i a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{M} q^{-i}\right) \quad \text{при} \quad q = \sqrt{2}.$$

Тогда первая сумма в (28) оценивается сверху величиной

$$C_1 \sum_{j=0}^{d} \frac{2^j}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{d-j-1} 2^{i/2} [S_n(t_{j+i}^1) - S_n(t_{j+i+1}^1)]^2 \left(\sum_{i=0}^{d-j+1} 2^{-i/2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{j=0}^{d} \frac{2^j}{\sqrt{n}} \sum_{k=j}^{d-1} 2^{(k-j)/2} [S_n(t_k^1) - S_n(t_{k+1}^1)]^2 = \frac{C_2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{d-1} 2^{k/2} [(S_n(t_k^1) -$$

$$- S_n(t_{k+1}^1)]^2 \sum_{j=0}^{k} 2^{j/2} \leqslant C_3 \sqrt{n} \sum_{k=0}^{d-1} 2^{k-N_0} [S_n(t_k^1) - S_n(t_{k+1}^1)]^2.$$

Таким образом, на множестве A_d

$$\Lambda(t_d^1) \leqslant C_4 \sqrt{n} \sum_{k=0}^{d-1} 2^{k-N_0} [S_n(t_k^1) - S_n(t_{k+1}^1)]^2 + C_2(d+1)/\sqrt{n}.$$

Теперь положим $\delta = Kn^{-1/2} \log n$, $N = N_0 - \log N_0$. В [4] показано, что при достаточно большом K

$$\mathbf{P}(\rho(l_N, l) > \delta) \leqslant C_5 \delta;$$

$$n\mathbf{P}\left(C_4 \sqrt{n} \sum_{k=0}^{N-1} 2^{k-N_0} [S_n(t_k^1) - S_n(t_{k+1}^1)]^2 + C_2 N_0/\sqrt{n} > \delta\right) \leqslant C_6 \delta;$$

$$\mathbf{P}(A_N) \geqslant 1 - C_7/n^2.$$

Следовательно, теорема 1 утверждает, что

$$\varkappa_\rho(S_n, w) \leqslant Cn^{-1/2} \log n, \ n > 1.$$

Аналогичный результат справедлив и для процесса $S_n^0(t)$, распределение которого задается формулой

$$\mathbf{P}(S_n^0(\cdot) \in B) = \mathbf{P}(S_n(\cdot) \in B \mid S_n(1) = 0),$$

при условии, конечно, что выполнены предположения теоремы 2 в [9].

При $\delta = Kn^{-1/2} \log n$ условия теоремы будут выполнены и для эмпирических (классического и обратного) процессов (см. [9])

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 2, с. 177—238.
2. **Скороход А. В.** Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.
3. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 217—234.
4. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV'-s and sample DF. I.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1975, v. 32, N 1/2, p. 111—133.
5. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV'-s and sample DF. II.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, v. 34, N 1, p. 33—58.
6. **Major P.** The approximation of partial sums of independent RV'-s.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, v. 35, N 3, p. 213—220.

7. **Major P.** Approximation of partial sums of i. i. d. r. v. s. when the summands have only two moments.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, v. 35, N 3, p. 221—229.
8. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
9. **Борисов И. С.** О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 1, с. 67—79.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЫХОДОМ НЕДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ИЗ ИНТЕРВАЛА

В. И. ЛОТОВ

Рассматривается случайное блуждание S_0, S_1, S_2, $\ldots$, порожденное последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, $\ldots$, $S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $F(x)=\mathbf{P}(\xi_1<x)$. На протяжении всей работы будет предполагаться, что $F(x)$ удовлетворяет двум условиям крамеровского типа:

1) $F(x)$ имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту;

2) $\inf\{\lambda\colon \mathbf{M}e^{-\lambda\xi_1}<\infty\}<0$, $\sup\{\lambda\colon \mathbf{M}e^{-\lambda\xi_1}<\infty\}>0$. Пусть, кроме того, $\mathbf{M}\xi_1=0$. Для $a>0$ и $b>0$ введем $N=N(a, b)=\min\{k: S_k\notin [-a, b)\}$ и функции

$$F_n^{(0)}(x)=\mathbf{P}(S_n<x, N>n);\quad F_n^{(1)}(x)=\mathbf{P}(S_N<x, N=n). \tag{1}$$

Результаты работы позволяют получать полные асимптотические разложения распределений (1) в случае, когда $a=a(n)\to\infty$, $b=b(n)\to\to\infty$ при $n\to\infty$ во всем спектре уклонений $a+b=O(n)$, $a+b\geqslant C\sqrt{n}$. Отметим, что та же задача была решена ранее автором в [1, 2] при дополнительных предположениях о рациональности функции $\mathbf{M}(e^{i\lambda\xi_1};\xi_1<0)$

Исследованию распределений граничных функционалов, связанных с выходом случайного блуждания из интервала, посвящено большое количество работ (библиографию, хотя и далеко не полную, можно найти в [2]). Хорошо известны постановки задач, приводящие к исследованиям такого типа. Вспомним, например, классическую задачу о разорении игрока. В настоящей статье метод асимптотического анализа, развитый в [2, 3] для решения аналогичной задачи в схеме блужданий по решетке целых чисел, применяется к исследованию распределений в нашем случае. Изложение ведется кратко, подробности применения метода читатель найдет в [3]. Основное место в работе занимает получение асимптотических представлений для производящих функций вида $\sum z^n\mathbf{P}(S_N\in\in A, N=n)$ и $\sum z^n\mathbf{P}(S_n\in B, N>n)$ (теоремы 1—3 и следствия из них). К полученным результатам непосредственно применим асимптотический анализ [2] [1], включающий модификацию метода перевала, что позволяет сразу же выписать искомые полные асимптотические разложения. Некоторые из них приведены в теоремах 4 и 5.

Обозначим $r_z(\lambda)=1-z\mathbf{M}e^{i\lambda\xi_1}$;

$$Q_0(z,\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int_{-a}^{b}e^{i\lambda x}dF_n^{(0)}(x),\quad \operatorname{Im}\lambda=0,\quad |z|<1;$$

---

[1] Полное изложение метода содержится во второй части [3] (в печати).