7. **Гертнер Ю.** Большие уклонения от инвариантной меры.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 21, № 1, с. 27—42.
8. **Боровков А. А., Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I.— Сиб. мат. ж., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004.
9. **Donsker M. D., Varadhan S. R. S.** Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I — Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, N 6, p. 1—47.
10. **Дынкин Е. Б.** Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, с. 859.
11. **Могульский А. А.** Малые уклонения в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 4, с. 755—765.
12. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, с. 752.
13. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 367 с.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РАЗРЫВАМИ

И. Ф. ПИНЕЛИС

1. Введение и формулировка основных результатов

Скорость сходимости в граничных задачах была предметом исследования многих авторов (см. [1]). С. В. Нагаев [1] предложил метод определения скорости сходимости в граничных задачах, позволивший получить оценку скорости сходимости «правильного» порядка $1/\sqrt{n}$ для областей весьма общего вида.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения F, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{M}\xi_1^2 = 1$, $c_3 = \mathbf{M}|\xi_1|^3 < \infty$.

Рассмотрим случайное блуждание в $\mathbf{R}^2$, определенное так, что если $(t, x) \in \mathbf{R}^2$ есть положение блуждающей точки в момент времени m, то в следующий момент времени $m+1$ она оказывается на луче $\{t+1/n\} \times \times (-\infty, y)$ с вероятностью $F((y-x)\sqrt{n})$. Обозначим

$$\xi_n(t, x, m) = \left(\xi_n^{(1)}(t, x, m), \xi_n^{(2)}(t, x, m)\right)$$

положение блуждающей точки в момент времени m при условии, что блуждание началось в момент времени 0 в точке (t, x).

Пусть $[x]$ — целая часть x, $]x[= -[-x]$. Пусть $\xi(t)$ — стандартный (непрерывный) винеровский процесс на $[0, \infty)$. Для произвольного $D \subseteq \subseteq R^2$ положим

$$D(t) = \{x : (t, x) \in D\}(-\infty < t < \infty).$$

Пусть

$$P_n(t, x, D, b) = \mathbf{P}(\xi_n(t, x, m) \in D(0 \leqslant m \leqslant [n(b-t)]));$$

$$P(t, x, D, b) = \mathbf{P}(\xi(u) + x \in D(t+u)(0 \leqslant u \leqslant b-t)),$$

если эти вероятности определены. Иначе говоря, $P_n(t,x,D,b)(P(t,x,D,b))$ есть вероятность того, что траектория случайного блуждания (винеровского процесса), начавшегося в нулевой момент времени в точке (t, x), будет лежать в D в интервале $[0, b-t]$.

Из [1] вытекает, что если

$$D = \{(t, x): \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ g_2(t) < x < g_1(t)\},$$

где g_1, g_2 удовлетворяют условию Липшица с постоянной K, то

$$(P_n - P)(0, 0, D, 1) = O\left((K+1)c_3^2/\sqrt{n}\right). \tag{1}$$

Здесь и далее постоянная в $O(\cdot)$ предполагается абсолютной; как обычно, значения разности функций равны разности значений функций.

А. И. Саханенко [2], используя метод работы [1], доказал, что c_3^2 в (1) можно заменить на c_3. В дальнейшем, не оговаривая этого специально, будем пользоваться замечаниями из [2] относительно замены c_3^2 на c_3, c_3 на 1.

Отметим, что оценка $O((K+1)c_3/\sqrt{n})$ неулучшаема в том смысле, что в правой части (1) нельзя писать

$$O(f(K)c_3/\sqrt{n}),\text{ если } f(K)/K\to 0 \text{ при } K\to\infty.$$

Действительно, рассуждая так же, как в [2], из справедливости оценки $O(f(K)c_3/\sqrt{n})$ выводим, что

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0<m<Nn}\big(\xi_n^{(2)}(0,0,m)-m/n\big)\geqslant x\Big)=$$

$$=\mathbf{P}\Big(\sup_{0<t<N}(\xi(t)-t)\geqslant x\Big)+O\big(f(\sqrt{N})\,c_3/\sqrt{Nn}\big),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant m<\infty}\big(\xi_n^{(2)}(0,0,m)-m/n\big)\geqslant x\Big)=\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t<\infty}(\xi(t)-t)\geqslant x\Big),$$

что, вообще говоря, неверно (см., например, [3]).

Перейдем теперь к формулировкам основных результатов, полученных в настоящей работе. Будем считать, что $D\subseteq R^2$ есть область, имеющая не более s разрывов на $[a,b]$ $(s\geqslant 2)$ (в точках $a=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_{s-1}=b$), если для любого $t\in[a,b]$ (сечение) $D(t)$ есть объединение конечного числа $m(t)$ непересекающихся непустых (открытых, замкнутых или полуоткрытых) интервалов $\delta_i(t)$ с концами $g_2^{(i)}(t)<g_1^{(i)}(t)$ $(i=1,\ldots$ $\ldots,m(t))$, причем $m(t)\equiv m_j$ при $t\in\Delta_j=(t_{j-1},t_j)$ и функции $g_1^{(i)}(t)$, $g_2^{(i)}(t)$ удовлетворяют условию Липшица по t с постоянной K_j на интервале Δ_j $(i=1,\ldots,m_j,\ j=1,\ldots,s-1)$.

Например, все области, полученные из областей вида

$$D=\{(t,x):g_2(t)<x<g_1(t)(c\leqslant t\leqslant d)\},\tag{1'}$$

где g_1, g_2 удовлетворяют условию Липшица, путем вычитания s областей такого же вида, принадлежат к классу областей, имеющих не более $2s+2$ разрывов.

Области вида (1′) с кусочно-липшицевыми границами g_1, g_2 также принадлежат рассматриваемому классу, для них $m(t)\equiv 1$ для $D(t)\neq\varnothing$.

Особо выделим области вида

$$D=\{(t,x):g_2(t)<x<g_1(t)\ \ (c\leqslant t<d),\ x<y\ \ (t=d)\},$$

где g_1, g_2 — липшицевы.

Центральным результатом является

Теорема 1. *Пусть*

$$D_y=\{(t,x):\ g_2(t)<x<g_1(t)\ \ (0\leqslant t<1),\ x<y\ \ (t=1)\},$$

где $g_2(t)<g_1(t)$, g_1, g_2 удовлетворяют условию Липшица на $[0,1]$ *с постоянной K. Тогда*

$$(P_n-P)(0,x,D_y,1)=O((K+1)c_3/\sqrt{n}).$$

Положим $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ $(n=1,2,\ldots)$.

Следствие 1.

$$\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i<x,\ S_n<y\Big)=$$

$$=\mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\xi(t)<x/\sqrt{n},\ \xi(1)<y/\sqrt{n}\Big)+O(c_3/\sqrt{n}).$$

Назовем область D, имеющую не более s разрывов на $[a, b]$, правильной (на $[a, b]$), если $D(t_j) \subseteq D(t_j-0) \cap D(t_j+0)(1 \leqslant j \leqslant s-2)$, $D(a) \subseteq \subseteq D(a+0)$, $D(b) \subseteq D(b-0)$, где

$$D(t \pm 0) = \bigcup_{i=1}^{m(t\pm 0)} \delta_i (t \pm 0);$$

$$\delta_i (t \pm 0) = \left(g_2^{(i)}(t \pm 0),\, g_1^{(i)}(t \pm 0)\right);\quad (i=1,\ldots,m(t\pm 0)).$$

Введем также «правильную» вероятность $P_n^r(a, x, D, b)$ для правильной области D следующим образом. Для $(t, x) \in D$ положим $i(t, x) = i$, если $x \in \delta_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m(t))$.

Предположим, что nt_j $(j = 0, \ldots, s-1)$ — целые числа. Тогда пусть $P_n^r(a, x, D, b)$ есть вероятность того, что $\xi_n(a, x, m) \in D(0 \leqslant m \leqslant n(b - a))$, причем

$$i\left(\xi_n^{(1)}(m), \xi_n^{(2)}(m)\right) = i\left(\xi_n^{(1)}(n(t_{j-1}-a)) + 0,\, \xi_n^{(2)}(n(t_{j-1}-a))\right) = i\left(\xi_n^{(1)}(n(t_j-a)) - 0,\, \xi_n^{(2)}(n(t_j-a))\right)$$

для $n(t_{j-1} - a) < m < n(t_j - a)$ $(j = 1, \ldots, s-1)$; здесь $\xi_n^{(\alpha)}(m) = \xi_n^{(\alpha)}(a, x, m)$ $(\alpha = 1, 2)$. Иначе, $P_n^r(a, x, D, b)$ есть вероятность того, что траектория $\xi_n(a, x, m)$ пребывает в D, не пересекая границ $g_i^{(\alpha)}(t)$.

Теорема 2. *Пусть D есть правильная область, имеющая не более s разрывов на $[a, b]$, причем nt_j $(j = 0, \ldots, s-1)$ — целые числа. Тогда*

$$\left|\left(P_n^r - P\right)(a, x, D, b)\right| \leqslant \Psi_s c_3/\sqrt{n};$$

где

$$\Psi_s = L \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j \prod_{i=j}^{s-1} \mu_i;$$

$$\lambda_j = K_j + 1/\sqrt{|\Delta_j|};\ |\Delta_j| = t_j - t_{j-1};\ \mu_j = 2m(t_j) \qquad (j = 1, \ldots, s-1);$$

L — абсолютная постоянная.

Следствие 2. *Пусть D есть область вида (1′) с кусочно-липшицевыми границами, точнее, D есть (не обязательно правильная) область, имеющая не более s разрывов на $[a, b]$, причем $m(t) \equiv 1$ $(t \in [a, b])$ и nt_j $(j = 0, \ldots, s-1)$ — целые числа. Тогда*

$$|(P_n - P)(a, x, D, b)| \leqslant L \sum_{j=1}^{s-1} 2^{s-j}\left(K_j + 1/\sqrt{|\Delta_j|}\right) c_3/\sqrt{n}.$$

Если же, например, точки разрыва t_j иррациональны, и, следовательно, nt_j не могут быть целыми числами, представляется более целесообразным использовать случайные процессы с непрерывным временем, построенные по случайному блужданию $\xi_n(t, x, m)$.

Так, пусть $\widehat{s}_n(u) = \widehat{s}_{n,a,x}(u)$ — случайная ломаная с вершинами $\xi_n(t, x, m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, $\bar{s}_n(u) = \bar{s}_{n,a,x}(u) = \xi_n^{(2)}(a, x, [n(u-a)])$ — «ступенчатый» процесс. Пусть для правильной области D, имеющей не более s разрывов на $[a, b]$, $\bar{P}_n^r(a, x, D, b)$ есть вероятность того, что $\bar{s}_n(u) \in \in D(u)$ $(u \in [a, b])$, причем

$$i(u, \bar{s}_n(u)) = i(t_{j-1} + 0, \bar{s}_n(t_{j-1})) = i(t_j - 0, \bar{s}_n(t_j))$$

для $t_{j-1} < u < t_j$ $(j = 1, \ldots, s-1)$.

Для $D \subseteq \mathbf{R}^2$ положим

$$\bar{P}_n(a, x, D, b) = \mathbf{P}(\bar{s}_n(u) \in D(u)(u \in [a, b]));$$

$$\widehat{P}_n(a, x, D, b) = \mathbf{P}(\widehat{s}_n(u) \in D(u)(u \in [a, b])).$$

Замечание 1. Введение правильных областей и «правильных» вероятностей связано с разрывностью $\bar{s}_n(u)$ и $\xi_n(t, x, m)$; оно позволяет избежать излишне громоздких формулировок.

Каждой области D, имеющей не более s разрывов на $[a, b]$, можно поставить в соответствие правильную область D^r, заменяя сечения $D(t_j)$ на $D(t_j) \cap D(t_j - 0) \cap D(t_j + 0)$ $(j = 1, \ldots, s-2)$, $D(a)$ — на $D(a) \cap D(a+0)$, $D(b)$ — на $D(b) \cap D(b-0)$. Очевидно,

$$\widehat{P}_n(a, x, D^r, b) = \widehat{P}_n(a, x, D, b);$$

$$P(a, x, D^r, b) = P(a, x, D, b).$$

Используя лемму 11 (см. далее), можно показать, что

$$\bar{P}_n(a, x, D^r, b) = \bar{P}_n(a, x, D, b) + O\left(\frac{c_3}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{s-1}\frac{m_j}{\sqrt{t_j - a}}\right)\right);$$

$$P_n(a, x, D^r, b) = P_n(a, x, D, b) + O\left(\frac{c_3}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{s-2}\frac{m_j + m_{j+1}}{\sqrt{t_j - a}}\right).$$

При рассмотрении «неправильных» вероятностей $P_n(a, x, D, b)$, $\bar{P}_n(a, x, D, b)$ вместо $P_n^r(a, x, D, b)$, $\bar{P}_n^r(a, x, D, b)$ мы столкнулись бы с членом вида

$$O\left(\frac{c_3}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{s-1}\frac{|\Delta_j|}{(d_j - 2K_j/n)^3}\right),$$

где

$$d_j = \inf\{g_2^{(i+1)}(t) - g_1^{(i)}(t) : i = 1, \ldots, m_j - 1, t \in \Delta_j\} \times$$
$$\times (j = 1, \ldots, s-1),\ n > 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant s-1} K_j/d_j.$$

Теорема 1′. *Пусть*

$$D = \{(t, x) : g_2(t) < x < g_1(t)(c \leqslant t < d),\ x < y(t = d)\},$$

где $g_2(t) < g_1(t)$, g_1, g_2 *удовлетворяют условию Липшица на* $[c, d]$ *с постоянной* K. *Тогда*

$$(\widehat{P}_n - P)(c, x, D, d) = O((K + 1/\sqrt{d-c})c_3/\sqrt{n}),$$

и такая же оценка имеет место для $\bar{P}_n(c, x, D, d)$.

Теорема 2′. *Пусть* D *есть правильная область, имеющая не более* s *разрывов на* $[a, b]$. *Тогда*

$$|(\widehat{P}_n - P)(a, x, D, b)| \leqslant \widehat{\Psi}_s c_3/\sqrt{n},$$

где

$$\widehat{\Psi}_s = L\sum_{j=1}^{s-1}\widehat{\lambda}_j\prod_{i=j}^{s-1}\mu_i;$$

$$\widehat{\lambda}_j = \lambda_j + \Delta\widehat{\lambda}_j;$$

$$\Delta\widehat{\lambda}_j = \begin{cases}1/\sqrt{t_{j-1} - a} + K_j/c_3\sqrt{n} & (nt_{j-1} \text{ — не целое число}),\\ & (nt_{j-1} \text{ — целое число})\end{cases}$$

(очевидно, $\Delta\widehat{\lambda}_j \leqslant 1/\sqrt{t_{j-1} - a} + K_j$ при $j = 2, \ldots, s-1$; $\widehat{\lambda}_1 = \lambda_1$); L — *абсолютная постоянная.*

Аналогично

$$|(\bar{P}_n^r - P)(a, x, D, b)| \leqslant \widehat{\Psi}_s c_3/\sqrt{n}.$$

Следствие 2′. *Пусть D есть область вида* (1′) *с кусочно-липшицевыми границами, точнее, D есть (не обязательно правильная) область, имеющая не более s разрывов на $[a, b]$, причем $m(t) \equiv 1$ $(t \in [a, b])$. Тогда*

$$(\bar{P}_n - P)(a, x, D, b) = O\left(\sum_{j=1}^{s-1} 2^{s-j}(K_j + 1/\sqrt{|\Delta_j|})\, c_3/\sqrt{n}\right),$$

и такая же оценка имеет место для $\hat{P}_n(a, x, D, b)$.

Замечание 2. Если, например, $g_2(t) \equiv -\infty$, то в следствиях 2, 2′ имеет место оценка

$$O\left(\sum_{j=1}^{s-1}(K_j + 1/\sqrt{|\Delta_j|})\, c_3/\sqrt{n}\right).$$

Это вытекает из доказательства теорем 2, 2′.

В разделе 2, наиболее объемном, доказывается теорема 1. Основную трудность в доказательстве теоремы 1 составляет получение оценки устойчивости решения граничной задачи по времени, т. е. оценки разности вида $\Delta_n(h) = P_n(a(a+h, x, D, b) - P_n(a, x, D, b)$. В разделе 2 будет получена оценка $\Delta_n(h) = O((K^2 + 1/(b-a))h + (K + 1/\sqrt{(b-a)})(c_3/\sqrt{n} + h|\ln h|/\sqrt{b-a}))$. Эта оценка, хотя и не вполне точная, достаточна для доказательства теоремы 1. В свою очередь, используя теорему 1, можно получить более точную оценку

$$\Delta_n(h) = O((K^2 + 1/(b-a))h + (K + 1/\sqrt{b-a})c_3/\sqrt{n}). \tag{1″}$$

Этот результат является обобщением леммы 9 из [1].

Выводу оценки (1″) и аналогичной оценки для винеровского процесса посвящен раздел 3. Отметим, что оценка для винеровского процесса вытекает в силу принципа инвариантности из (1″). Мы получим, однако, сначала оценку устойчивости по времени для винеровского процесса, из которой, используя теорему 1, выведем (1″). В завершающем разделе 4 доказываются остальные результаты из числа сформулированных выше.

Автор выражает глубокую благодарность С. В. Нагаеву за постановку задач и ряд полезных замечаний и А. А. Боровкову за внимание к работе и замечания, способствовавшие ее улучшению.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство основано на методе [1], и в основном мы следуем обозначениям, принятым в этой работе. Для удобства часть из них воспроизведем. Пусть

$$D = \{(t, x) : c_1 \leqslant t \leqslant c_2,\ d_2(t) < x < d_1(t)\},$$

где d_1, d_2 — некоторые функции на $[c_1, c_2]$;

$$\tau_n(t, x, D) = \inf\{m : \xi_n(t, x, m) \notin D,\ m > 0\};$$

$$P_n(t, x, E_1, E_2, D) = \mathbf{P}(\xi_n(t, x, \tau_n(t, x, D)) \in E_1 \times E_2); \tag{2}$$

$$P_n(t, x, E_1, D) = P_n(t, x, E_1, \mathbf{R}^1, D),$$

где E_1, E_2 — борелевские множества на прямой; $P_n(t, x, D) = P_n(t, x, (c_2, \infty), D)$ при $(t, x) \in D$, 0 в противном случае.

Будем считать (это не умаляет общности), что F непрерывна, $x = 0$. Предположим, что

$$g_1(1) - K/n > y > g_2(1) + K/n. \tag{2′}$$

Вначале докажем некоторые вспомогательные результаты (леммы 1—6). Основным техническим средством доказательства теоремы является

Лемма 1. *Пусть* $0<b\leqslant 1$ *и на* $[0, b]$ *задана неубывающая функция* M_1, *причем*

$$M_1(t)=O\left(p_1\frac{h}{b+h-t}+p_2\frac{c_3\sqrt{K+1}}{\sqrt{n(b-t)}}+p_3\frac{(K+1)c_3}{\sqrt{nb}}+\right.$$
$$\left.+p_4\frac{c_3}{\sqrt{n(b-t)}}\ln\frac{b}{b-t}\right) \quad (3)$$

для любого $t\in[0, b)$ *и некоторого* $h\in(0, b)$. *Далее, пусть* M_2 — *заданная на* $[0, b]$ *функция с вариацией* $\operatorname{Var} M_2=O(1)$, *причем* $M_2(b)=0$ *и*

$$M_2(t)=O((K+1)((b-t)/b+qc_3/\sqrt{nb})). \quad (4)$$

В (3) *и* (4) $p_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, 3, 4)$, $q\geqslant 0$.

Пусть выполнено по меньшей мере одно из двух условий: $\operatorname{Var} M_1= O(1)$ *или в условии* (4) $q=0$. *Если* $q+\sum_{i=2}^{4}p_i=0(1)$, *то*

$$\int_0^b M_1(t)\,dM_2(t)=O\left((K+1)\left(p_1h\,|\ln h|/b+c_3/\sqrt{nb}\right)\right).$$

Доказательство леммы 1 достаточно провести для $b=1$, так как иначе можно заменить t, h на bt', bh', nb на n', $M_i(t)$ на $M_i'(t')= M_i(t/b)$ $(i=1, 2)$. Итак, считаем, что $b=1$. Тогда

$$\int_0^1 M_1(t)\,dM_2(t)=-M_1(0)\,M_2(0)-\int_0^1 M_2(t)\,dM_1(t), \quad (5)$$

так как $M_2(1)=0$. Учитывая, что $\operatorname{Var} M_2=O(1)$, получаем

$$M_1(0)M_2(0)=O(M_1(0)), \quad (6)$$

и в силу (3)

$$M_1(0)=O(p_1h+(K+1)c_3/\sqrt{n}). \quad (7)$$

Далее,

$$\int_0^1 M_2(t)\,dM_1(t)=\int_0^{K/(K+1)} M_2(t)\,dM_1(t)+\int_{K/(K+1)}^1 M_2(t)\,dM_1(t); \quad (8)$$

$$\int_0^{K/(K+1)} M_2(t)\,dM_1(t)=O\left(\int_0^{K/(K+1)} dM_1(t)\right); \quad (9)$$

так как $M_2(1)=0$, $\operatorname{Var} M_2=O(1)$;

$$\int_0^{K/(K+1)} dM_1(t)=M_1(K/(K+1))-M_1(0); \quad (10)$$

$$M_1(K/(K+1))=O((K+1)(p_1h+c_3/\sqrt{n})). \quad (11)$$

Учитывая (4), находим

$$\int_{K/(K+1)}^1 M_2(t)\,dM_1(t)=O\left(\int_{K/(K+1)}^1 (K+1)\left(1-t+qc_3/\sqrt{n}\right)dM_1(t)\right); \quad (12)$$

Так как либо $q = 0$, либо $\operatorname{Var} M_1 = O(1)$, то

$$\int\limits_{K/(K+1)}^{1} (K+1)\left(1 - t + qc_3/\sqrt{n}\right) dM_1(t) =$$

$$= \int\limits_{K/(K+1)}^{1} (K+1)(1-t)\, dM_1(t) + O\left((K+1)\, c_3/\sqrt{n}\right). \quad (13)$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\int\limits_{K/(K+1)}^{1} (K+1)(1-t)\, dM_1(t) = -M_1(K/(K+1) + \int\limits_{K/(K+1)}^{1} (K+1) M_1(t)\, dt. \quad (14)$$

В силу (3)

$$\int\limits_{K/(K+1)}^{1} (K+1)\, M_1(t)\, dt = O\left((K+1)\left(p_1 h \,|\ln h| + c_3/\sqrt{n}\right)\right). \quad (15)$$

Объединяя соотношения (5)—(15), получаем

$$\int\limits_0^1 M_1(t)\, dM_2(t) = O\left((K+1)\left(p_1 h\, |\ln h| + c_3/\sqrt{n}\right)\right),$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть*

$$D = \{(t,\, x) : 0 \leqslant t \leqslant b,\ d_1(t) > x > d_2(t)\};\ d_1(t) > d_2(t);$$

$$|d_i(t+h) - d_i(t)| \leqslant Kh (0 \leqslant t \leqslant t + h \leqslant b);\ d_1(0) > 0 > d_2(0).$$

Тогда [*см.* (2)]

$$P_n(0,\, 0,\, (t,\, b],\, D) = O((K\sqrt{b} + 1)((b - t)/b + c_3/\sqrt{nb})).$$

Доказательство леммы 2. При $b = 1$ утверждение леммы легко получается, если учесть оценку (2.16) из [1]. Общий случай отсюда получается так же, как в работе [1, см. (2.88), (2.33)].

Лемма 3. *При* $m < n = O(m)$

$$\mathbf{P}(S_m < x,\ S_n < y) = \mathbf{P}(\xi(m/n) < x/\sqrt{n},\ \xi(1) < y/\sqrt{n}) + O(c_3/\sqrt{n}).$$

Доказательство леммы 3. Пусть F_k — функция распределения S_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(S_m < x,\, S_n < y) = \int\limits_{-\infty}^{x} F_{n-m}(y-u)\, dF_m(u);$$

$$\mathbf{P}\left(\xi\left(\frac{m}{n}\right) < \frac{x}{\sqrt{n}},\ \xi(1) < \frac{y}{\sqrt{n}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Phi\left(\frac{y-u}{\sqrt{n-m}}\right) d_u \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right),$$

$$\text{где } \Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-v^2/2} dv.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}(S_m < x,\ S_n < y) = \mathbf{P}(\xi(m/n) < x/\sqrt{n},\ \xi(1) < y/\sqrt{n}) + I_1 + I_2, \quad (16)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{x} \left[F_{n-m}(y-u) - \Phi\left(\frac{y-u}{\sqrt{n-m}}\right)\right] d_u \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right);$$

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{x} F_{n-m}(u)\, d_u\left[F_m(u) - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{m}}\right)\right].$$

Известно следующее неравенство С. В. Нагаева [4]:

$$|F_k(x\sqrt{k})-\Phi(x)|=O\left(\frac{c_3}{\sqrt{k}(1+|x|)^3}\right).$$

Используя эту оценку, находим

$$I_1=O\left(c_3\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{m}}e^{-u^2/2m}\left(1+\left|\frac{y-u}{\sqrt{n-m}}\right|^3\right)^{-1}\frac{du}{\sqrt{n-m}}\right)=$$

$$=O\left(\frac{c_3}{\sqrt{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+|u|^3}\right)=O(c_3/\sqrt{n}). \quad (17)$$

Взяв интеграл по частям, имеем

$$I_2=\left(F_m(x)-\Phi(x/\sqrt{m})\right)F_{n-m}(y-x)-$$

$$-\int_{-\infty}^{x}\left[F_m(u)-\Phi(u/\sqrt{m})\right]d_uF_{n-m}(y-u)$$

откуда, используя оценку Берри — Эссеена, выводим

$$I_2=O(c_3/\sqrt{n}). \quad (18)$$

Утверждение леммы 3 следует из (16)—(18).

Лемма 4. *При* $m<n=O(m)$

$$\mathbf{P}(S_m<x,\ S_n\geqslant y)=P(S_m\geqslant -x,\ S_n<-y)+O(c_3/\sqrt{n}).$$

Лемма 4 следует из леммы 3 и симметрии распределения процесса $\xi(t)$.

Следующее утверждение, возможно, представляет самостоятельный интерес.

Лемма 5. *Пусть* $\tau_x=\inf\{m:S_m\geqslant x\}$, $\chi_x=S_{\tau_x}-x$ $(x>0)$ — *соответственно момент первого выхода и величина перескока через уровень* x. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n-2\chi_x\geqslant x)=\mathbf{P}(S_n\geqslant x)+O(c_3/\sqrt{n}).$$

Доказательство леммы 5. Положим $\overline{S}_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}S_k$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n\geqslant x,\ S_n<x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\tau_x=k,\ S_k\in du)\,\mathbf{P}(S_{n-k}<x-u).$$

Из леммы 4 (при $y=-\infty$) получаем, что

$$\mathbf{P}(S_{n-k}<x-u)=\mathbf{P}(S_{n-k}\geqslant u-x)+O(c_3/\sqrt{n-k}),$$

поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n\geqslant x,\ S_n<x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\tau_x=k,\ S_k\in du)\,\mathbf{P}(S_{n-k}\geqslant u-x)+$$

$$+R=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\tau_x=k,\ S_k\in du,\ S_n\geqslant 2u-x)+R=$$

$$=\mathbf{P}(S_n\geqslant 2\chi_x+x)+R, \quad (19)$$

где

$$R = O\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\tau_x = k) \min\left(c_3/\sqrt{n-k},\ 1\right)\right) =$$

$$= O\left(\int_0^1 \min\left(c_3/\sqrt{n(1-t)},\ 1\right) P_n(0,\ 0,\ dt,\ G_x)\right); \quad (20)$$

$G_x = \{(t,\ u) : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ u < x\}$. Положим

$$M_1(t) = \min(c_3/\sqrt{n(1-t)},\ 1); \quad (21)$$

$$M_2(t) = -P_n(0,\ 0,\ (1-t,\ 1],\ G_x). \quad (22)$$

В силу леммы 2

$$M_2(t) = O(1 - t + c_3/\sqrt{n}).$$

Поэтому условия леммы 1 выполнены с $b = 1$, $K = 0$, $p_1 = p_3 = p_4 = 0$, $p_2 = q = 1$, $\operatorname{Var} M_1 = O(1)$. Значит,

$$\int_0^1 M_1(t)\, dM_2(t) = O\left(c_3/\sqrt{n}\right). \quad (23)$$

Из (20)—(23) получаем $R = O(c_3/\sqrt{n})$, что вместе с (19) дает

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x,\ S_n < x) = \mathbf{P}(S_n - 2\chi_x \geqslant x) + O(c_3/\sqrt{n}). \quad (24)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x,\ S_n < x) = \mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) - \mathbf{P}(S_n \geqslant x). \quad (25)$$

В соответствии с основным результатом работы [2]

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x/\sqrt{n})) + O(c_3/\sqrt{n}). \quad (26)$$

Оценка Берри — Эссена вместе с (25), (26) дает

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n \geqslant x,\ S_n < x) = \mathbf{P}(S_n \geqslant x) + O(c_3/\sqrt{n}).$$

Сравнивая эту оценку с (24), получаем утверждение леммы 5.

Лемма 6. *Пусть* $x > 0$, $0 < r < p = O(r)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_m \geqslant x,\quad S_{m+r} < x,\quad S_{m+p} \geqslant x) =$$

$$= \mathbf{P}(\overline{S}_m \geqslant x,\ S_{m+r} \geqslant x,\ S_{m+p} < x) + O(c_3/\sqrt{m})$$

$$\left(\overline{S}_m = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} S_k \ \ (m = 1,\ 2,\ \ldots)\right).$$

Доказательство леммы 6. Положим

$$R_1 = \mathbf{P}(\overline{S}_m \geqslant x,\ S_{m+r} < x,\ S_{m+p} \geqslant x). \quad (27)$$

Имеем

$$R_1 = \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_x = k,\ S_k \in du)\, \mathbf{P}(S_{m+r-k} < x - u,\ S_{m+p-k} \geqslant x - u). \quad (28)$$

Так как $(m + p - k)/(m + r - k) \leqslant p/r = O(1)$ при $k \leqslant m$, то по лемме 4

$$\mathbf{P}(S_{m+r+k} < x - u,\ \ S_{m+p-k} \geqslant x - u) = \mathbf{P}(S_{m+r-k} \geqslant u - x,\ \ S_{m+p-k} < u - x) + R_2, \quad (29)$$

где

$$R_2 = O(c_3/\sqrt{m+p-k}) = O(c_3/\sqrt{m-k}). \quad (30)$$

Из (28)—(30) следует, что

$$R_1=\sum_{k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\tau_x=k,\ S_k\in du)\,\mathbf{P}(S_{m+r-k}\geqslant u-x,\ S_{m+p-k}<u-x)+R_3=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\tau_x=k,\ S_k\in du,\ S_{m+r}\geqslant 2u-x,\ S_{m+p}<2u-x)+R_3=$$

$$=\mathbf{P}(\bar S_m\geqslant x,\ S_{m+r}-2\chi_x\geqslant x,\ S_{m+p}-2\chi_x<x)+R_3, \quad (31)$$

где

$$R_3=O\left(\sum_{k=1}^{m}\mathbf{P}(\tau_x=k)\min\left(c_3/\sqrt{m-k},\,1\right)\right). \quad (32)$$

При $m=n$ сумма в правой части (32) совпадает с суммой в правой части (20). Поэтому [ср. с (23)]

$$R_3=O(c_3/\sqrt{m}). \quad (33)$$

Далее,

$$\mathbf{P}(\bar S_m\geqslant x,\ S_{m+r}-2\chi_x\geqslant x,\ S_{m+p}-2\chi_x<x)=\mathbf{P}(\bar S_m\geqslant x,\ S_{m+r}\geqslant x,\ S_{m+p}<x)+$$
$$+O(\mathbf{P}(S_{m+r}\geqslant x)-\mathbf{P}(S_{m+r}-2\chi_x\geqslant x))+O(\mathbf{P}(S_{m+p}\geqslant x)-\mathbf{P}(S_{m+p}-2\chi_x\geqslant x)). \quad (34)$$

Из (27), (31), (33), (34), используя лемму 5, получаем утверждение леммы 6.

Пусть

$$\bar G=\{(t,\ x):\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ g_2(t)<x<g_1(t)\};$$

$$G=G_{y,n}=\{(t,\ x):\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ g_2(t)<x<g_{1,n}(t)\},$$

где

$$g_{1,n}(t)=\begin{cases} g_1(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1-1/n,\\ y & \text{при } 1-1/n<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Положим $P_n(t,\ x)=P_n(t,\ x,\ G)$.

К сожалению, функция $g_{1,n}$ разрывна и тем более не удовлетворяет условию Липшица. Однако, по существу, условие Липшица использовалось в [1] только при доказательстве лемм 8 и 9. Леммы 7—10 являются аналогами соответственно лемм 8, 9, 16, 17 из [1].

Лемма 7. *При* $0\leqslant t<1$

$$P_n(t,\ x+l)-P_n(t,\ x)=O((K+1/\sqrt{1-t})(l+c_3/\sqrt{n})).$$

Формулировки лемм 8 из [1] и 7 выглядят одинаково, однако в лемме 7 $P_n(t,\ x)$ имеет другой смысл.

Доказательство леммы 7. Пусть

$$D=\{(t,\ x):\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ d_1(t)>x>d_2(t)\}.$$

Положим $A_x(D)=\{\tau_n(0,\ x,\ D)>n\}$, если $(0,\ x)\in D$, $A_x(D)=\varnothing$ в противном случае, $B(y)=\{\xi_n^{(2)}(0,\ x,\ n)<y\}$, $D-l=\{(t,\ x):(t,\ x+l)\in D\}$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(A_x(D))=P_n(0,\ x,\ D),\ \mathbf{P}(A_x(D-l))=P_n(0,\ x+l,\ D),\ A_x(G)=A_x(\bar G)B(y).$$

Пусть знак + между событиями здесь и далее означает симметрическую разность. Тогда

$$A_x(G-l)+A_x(G)=A_x(\bar G-l)B(y-l)+A_x(\bar G)B(y)\subseteq$$
$$\subseteq(B(y-l)+B(y))\cup(A_x(\bar G-l)+A_x(\bar G)). \quad (35)$$

По теореме Берри — Эссеена,

$$\mathbf{P}(B(y-l)+B(y))=O(l+c_3/\sqrt{n}). \tag{36}$$

В [1, см. (2.22) и ниже] фактически доказано, что

$$\mathbf{P}(A_x(\bar{G}-p))-\mathbf{P}(A_x(G_l))=O((K+1)(l+c_3/\sqrt{n}))$$

при $p=0,\ l$, где $G_l=\bar{G}\cap(\bar{G}-l)$. Поэтому

$$\mathbf{P}(A_x(\bar{G}-l)+A_x(\bar{G}))=O((K+1)(l+c_3/\sqrt{n})). \tag{37}$$

Из (35)—(37) следует, что

$$P_n(0,\ x+l,\ G)-P_n(0,\ x,\ G)=O(\mathbf{P}(A_x(G-l)+A_x(G)))=$$
$$=O((K+1)(l+c_3/\sqrt{n})),$$

что доказывает утверждение леммы 7 при $t=0$. Переход к общему случаю осуществляется так же, как в [1, см. (2.28)]. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *При* $0\leqslant t<t+h\leqslant 1$:

А) $P_n(t+h,\ x)-P_n(t,\ x)=O((K^2+1/(1-t))h+(K+1/\sqrt{(1-t)})\times$ $\times c_3/\sqrt{n}+\sqrt{h/(1-t)})$;

Б) $P_n(t+h,\ x)-P_n(t,\ x)=O((K^2+1/(1-t))h+(K+1/\sqrt{1-t})\times$ $\times(c_3/\sqrt{n}+h|\ln h|/\sqrt{1-t}))$.

Доказательство леммы 8. Как и в [1], положим

$$G_{h,1}=\{(t,\ x)\colon\ 0\leqslant t\leqslant 1-h,\ g_2(t)<x<g_1(t)\};$$
$$G_{h,2}=\{(t,\ x)\colon\ 0\leqslant t\leqslant 1-h,\ g_2(t+h)<x<g_1(t+h)\};$$
$$G_{h,3}=G_{h,1}\cap G_{h,2}.$$

Из доказательства леммы 9 в [1] видно, что, не ограничивая общности, можно считать: $x=0$, $t=0$. Введем события

$$A_{h,i}=\{\tau_n(0,\ 0,\ G_{h,i})>n_h\}\quad (i=1,\ 2,\ 3);$$
$$B_h=\{\xi_n^{(2)}(0,\ 0,\ n_h)<y\},\quad A=A_{0,1},\quad B=B_0.$$

Здесь и далее $n_h=[n(1-h)]$. Очевидно,

$$P_n(0,\ 0)=\mathbf{P}(AB),\ P_n(h,\ 0)=\mathbf{P}(A_{h,2}B_h).$$

Поэтому

$$P_n(h,\ 0)-P_n(0,\ 0)=O(\mathbf{P}(AB+A_{h,2}B_h))=O(\mathbf{P}(A+A_{h,2})+\mathbf{P}(B+B_h)). \tag{38}$$

Далее,

$$\mathbf{P}(A+A_{h,2})\leqslant\mathbf{P}(A+A_{h,1})+\mathbf{P}(A_{h,1}+A_{h,3})+\mathbf{P}(A_{h,3}+A_{h,2}); \tag{39}$$

$$\mathbf{P}(A+A_{h,1})=\mathbf{P}(A_{h,1}\backslash A)=P_n(0,\ 0,\ (1-h,\ 1],\ \bar{G})=$$
$$=O((h+c_3/\sqrt{n})(K+1)) \tag{40}$$

в силу леммы 2. В [1], по существу, доказано (см. доказательство леммы 9 из [1]), что при $i=1,\ 2$

$$\mathbf{P}(A_{h,i}+A_{h,3})=\mathbf{P}(A_{h,i})-\mathbf{P}(A_{h,3})=O((K+1)(Kh+c_3/\sqrt{n})). \tag{41}$$

Из (39)—(41) вытекает, что

$$\mathbf{P}(A+A_{h,2})=O((K^2+1)h+(K+1)c_3/\sqrt{n}). \tag{42}$$

Далее, в силу леммы 4

$$\mathbf{P}(B+B_h)=\mathbf{P}(B\backslash B_h)+\mathbf{P}(B_h\backslash B)=\mathbf{P}(\xi(1-h)\geqslant y,\ \xi(1)<y)+$$
$$+\mathbf{P}(\xi(1-h)<y,\ \xi(1)\geqslant y)+O(c_3/\sqrt{n}), \tag{43}$$

так как, не умаляя общности, можно считать $h<1/4$, что мы и сделаем.

Имеем

$$\mathbf{P}(\xi(1-h)\geqslant y, \xi(1)<y)=\int\limits_{y}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-h)}}e^{-u^2/2(1-h)}\Phi\left(\frac{y-u}{\sqrt{h}}\right)du=$$

$$=O\left(\sqrt{h}\int\limits_{-\infty}^{0}\Phi(u)\,du\right)=O(\sqrt{h}). \quad (44)$$

Аналогично,

$$\mathbf{P}(\xi(1-h)<y,\ \xi(1)\geqslant y)=O(\sqrt{h}). \quad (45)$$

Из (43)—(45) вытекает, что

$$\mathbf{P}(B+B_h)=O(c_3/\sqrt{n}+\sqrt{h}). \quad (46)$$

Из (38), (42), (46) следует утверждение «А» леммы 8 при $x=t=0$. Из (41) следует, что

$$\mathbf{P}(A_{h,1}+A_{h,2})=O((K+1)(Kh+c_3/\sqrt{n})).$$

Отсюда

$$P_n(h,\ 0)=\mathbf{P}(A_{h,2}B_h)=\mathbf{P}(A_{h,1}B_h)+O((K+1)(Kh+c_3/\sqrt{n})).$$

Поэтому

$$P_n(h,\ 0)-P_n(0,\ 0)=\mathbf{P}(A_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(AB)+O((K+1)(Kh+c_3/\sqrt{n})). \quad (47)$$

Далее,

$$|\mathbf{P}(A_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(AB)|\leqslant|\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(B_h)|+|\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(\bar{A}B)|. \quad (48)$$

По теореме Берри — Эссеена

$$|\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(B_h)|=|\Phi(y)-\Phi(y/\sqrt{1-h})|+$$
$$+O(c_3/\sqrt{n(1-h)})=O(h+c_3/\sqrt{n}), \quad (49)$$

так как при $0{,}5<a<1$, $x>0$

$$\Phi(x)-\Phi(ax)=(1-a)x\varphi(\theta x)=O(1-a),$$

где $a<\theta<1$, $\varphi(u)=\frac{d}{du}\Phi(u)$. Очевидно, что

$$|\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(\bar{A}B)|\leqslant|\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B)|+|\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B)-\mathbf{P}(\bar{A}B)|; \quad (50)$$

так как $\bar{A}_{h,1}\subseteq\bar{A}$, то в силу (40)

$$\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B)-\mathbf{P}(\bar{A}B)=O(\mathbf{P}(\bar{A}\diagdown\bar{A}_{h,1}))=O((h+c_3/\sqrt{n})(K+1)); \quad (51)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B_h)-\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B)=\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B_h\bar{B})-\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1}B\bar{B}_h). \quad (52)$$

Введем два события: C_h, заключающееся в том, что траектория (случайного блуждания, начавшегося в точке (0, 0) в некоторый момент времени, не превышающий n_h, выходит из области $\bar{G}$ (т. е. происходит событие $\bar{A}_{h,1}$) и затем в некоторый момент времени, не превышающий n, пересекает горизонтальный уровень y; и $\bar{C}_h$, заключающееся в том, что траектория в некоторый момент времени, не превышающий n_{2h}, выходит из области $\bar{G}$ (т. е. происходит событие $\bar{A}_{2h,1}$) и затем в некоторый момент времени, не превышающий n_{2h}, пересекает уровень y. Говоря о пересечении уровня y после момента времени m_1 и до момента времени

m_2, мы имеем в виду следующее:

$$\left(\xi_n^{(2)}(0, 0, m_1) - y\right)\left(\xi_n^{(2)}(0, 0, m_2) - y\right) \leqslant 0.$$

Легко видеть, что $C_h \supseteq \overline{A}_{h,1}B_h\overline{B} \cup \overline{A}_{h,1}B\overline{B}_h$, причем $C_h \subseteq \overline{A}_{h,1}$. Поэтому $\overline{A}_{h,1}B_h\overline{B} = C_hB_h\overline{B}$, $\overline{A}_{h,1}B\overline{B}_h = C_hB\overline{B}_h$, откуда, так как $\widetilde{C}_h \subseteq C_h$, получаем, что

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{h,1}B_h\overline{B}) - \mathbf{P}(\widetilde{C}_hB_n\overline{B})\,| + |\,\mathbf{P}(\overline{A}_{h,1}B\overline{B}_h) - \mathbf{P}(\widetilde{C}_hB\overline{B}_h)\,| \leqslant \leqslant 2\mathbf{P}(C_h \setminus \widetilde{C}_h). \tag{53}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(C_h \setminus \widetilde{C}_h) \leqslant \mathbf{P}(\overline{A}_{h,1} \setminus \overline{A}_{2h,1}) + \int_0^{1-2h}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(0, 0, dt, dx, \widetilde{G})\, P_n(t, x, (1-2h, 1], G_{y,x}). \tag{54}$$

Здесь $G_{y,x} = \{(t, u) : 0 \leqslant t \leqslant 1, u < y\}$, если $x < y$; $G_{y,x} = \{(t, u) : 0 \leqslant t \leqslant 1, u > y\}$ в противном случае.

В силу леммы 2

$$\mathbf{P}(\overline{A}_{h,1} \setminus \overline{A}_{2h,1}) = O((K+1)(h + c_3/\sqrt{n}));$$

$$P_n(t, x, (1-2h, 1], G_{y,x}) = O(M_1(t)),$$

где

$$M_1(t) = \min\left(1, \frac{h}{1-t} + c_3/\sqrt{n(1-t)}\right).$$

Поэтому вследствие (54)

$$\mathbf{P}(C_h \setminus \widetilde{C}_h) = O\left((K+1)(h + c_3/\sqrt{n})\right) + \int_0^{1-2h} M_1(t)\, dM_2(t), \tag{55}$$

где

$$M_2(t) = -P_n(0, 0, (t, 1-2h], \widetilde{G}).$$

Снова применяя лемму 2, получаем, что

$$M_2(t) = O((K+1)((1-2h-t) + c_3/\sqrt{n})).$$

Теперь, применяя лемму 1 с $b = 1-2h$, $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p_4 = 0$, $q = 1$, $\operatorname{Var} M_1 \leqslant 1$, получаем

$$\int_0^{1-2h} M_1(t)\, dM_2(t) = O\left((K+1)(h\,|\ln h| + c_3/\sqrt{n})\right).$$

Отсюда и из (55) заключаем, что

$$\mathbf{P}(C_h \setminus \widetilde{C}_h) = O((K+1)(h|\ln h| + c_3/\sqrt{n})). \tag{56}$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(\widetilde{C}_hB_h\overline{B}) = \int_0^{1-2h}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(0, 0, dt, dx, \widetilde{G})\, \mathbf{P}(A^{(1)}(t, x)); \tag{57}$$

$$\mathbf{P}(\widetilde{C}_hB\overline{B}_h) = \int_0^{1-2h}\int_{-\infty}^{\infty} P_n(0, 0, dt, dx, \widetilde{G})\, \mathbf{P}(A^{(2)}(t, x)), \tag{58}$$

где $A^{(1)}(t, x) = \{$траектория, вышедшая из точки (t, x) в момент n_{1-t}, до момента n_{2h} пересекает уровень y, причем в момент n_h проходит ниже этого уровня, а в момент n — выше}, а событие $A^{(2)}(t, x)$ отличается от $A^{(1)}(t, x)$ только тем, что траектория в момент n_h выше уровня y, а в момент n — ниже. Согласно лемме 6 при $0 \leqslant t < 1-2h$

$$\mathbf{P}(A^{(1)}(t, x)) = \mathbf{P}(A^{(2)}(t, x)) + O(c_3/\sqrt{n(1-2h-t)}) \tag{59}$$

(надо взять $m = [n(1-2h-t)]$, $r = n_h - n_{2h}$, $p = n - n_h$).

Из (57)—(59) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\widetilde{C}_h B_h \overline{B}) - \mathbf{P}(\widetilde{C}_h B \overline{B}_h) = O\left(\int\limits_0^{1-2h} M_1(t)\, dM_2(t)\right), \tag{60}$$

где

$$M_1(t) = \min(1, c_3/\sqrt{n(1-2h-t)});$$

$$M_2(t) = -P_n(0, 0, (t, 1-2h], G),$$

причем

$$M_2(t) = O((K+1)(1-2h-t+c_3/\sqrt{n})).$$

Вновь применяя лемму 1 с $b = 1-2h$, $p_1 = p_3 = p_4 = 0$, $p_2 = q = 1$, $\operatorname{Var} M_1(t) \leqslant 1$, получаем

$$\int\limits_0^{1-2h} M_1(t)\, dM_2(t) = O((K+1)\, c_3/\sqrt{n}). \tag{61}$$

Из (60), (61) следует, что

$$\mathbf{P}(\widetilde{C}_h B_h \overline{B}) - \mathbf{P}(\widetilde{C}_h B \overline{B}_h) = O((K+1)\, c_3/\sqrt{n}),$$

а это вместе с (52), (53), (56) дает

$$\mathbf{P}(\bar{A}_{h,1} B_h) - \mathbf{P}(\bar{A}_{h,1} B) = O((K+1)(h|\ln h| + c_3/\sqrt{n})).$$

Отсюда, учитывая (47)—(51), получаем

$$P_n(h, 0) - P_n(0, 0) = O((K^2+1)h + (K+1)(c_3/\sqrt{n} + h|\ln h|)),$$

что доказывает утверждение «Б» леммы 8 при $t = x = 0$. Лемма 8 полностью доказана.

Лемма 9. *При* $0 \leqslant t < 1$

$$\overline{P}_n(t, x) - P_n(t, x) = O\left(\left(K + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{K+2}{1-t}\right) \frac{c_3}{\sqrt{n}}\right)$$

(*здесь, как и в* [1], $\overline{P}_n(t, x) = S^{-1}(f_{12}^{(n)} S(P_n(t, x)))$, *где* S — *преобразование Фурье*).

Доказательство леммы 9 в основном повторяет доказательство леммы 16 из [1]. Отличия следующие:

1) вместо леммы 9 [1] для получения оценки вида (2.66) из [1] следует использовать утверждение «А» леммы 8, которое приводит к оценке

$$P_n(\alpha + 1/n + t, x - y) = P_n(t, x - y) + O((K + 1/\sqrt{1-t})c_3/\sqrt{n});$$

2) вместо леммы 8 из [1] следует всюду ссылаться на лемму 7;

3) оценивая интеграл

$$I_1 = \iint\limits_{\{-(K+1/\sqrt{1-t})^{-2} < s < -\alpha\}} (P_n(t-s, x-y) - P_n(t+\alpha, x-y))\, q_{n2}(s, y)\, ds dy,$$

который появляется в левой части формулы (2.79) из [1], с помощью утверждения «Б» леммы 8, получаем $I_1 = O(I_2 + I_3)$,
где

$$I_2 = (K^2 + 1/(1-t))\, e^3 \int\limits_{\alpha}^{(K+1/\sqrt{1-t})^{-2}} s^{-1/2} ds + \frac{c_3^2}{\sqrt{n}} (K + 1/\sqrt{1-t}) \int\limits_{\alpha}^{(K+1/\sqrt{1-t})^{-2}} s^{-3/2} ds;$$

$$I_3 = c_3 (K/\sqrt{1-t} + 1/(1-t)) \int\limits_{\alpha}^{(K+1/\sqrt{1-t})^{-2}} \frac{\ln s}{s^{1/2}}\, ds.$$

В [1] показано, что (при $\alpha = c_3^2/n$) $I_2 = O(c_3(K + 1/\sqrt{1-t}))$.

Далее,

$$I_3 = O\left(c_3 \frac{\ln\left(K + 1 + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)}{\sqrt{1-t}} \right) = O\left(\frac{c_3}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{K+2}{1-t} \right).$$

Поэтому
$$I_1 = O\left(c_3 \left(K + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{K+2}{1-t} \right) \right).$$

Отсюда, как и в [1], приходим к оценке (ср. с. (2.84) из [1])

$$P_{n3}\left(t, x, \frac{c_3^2}{n}\right) = O\left(\left(K + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{K+2}{1-t} \right) \frac{c_3}{\sqrt{n}} \right).$$

Эта оценка вместе с соотношениями (2.69), (2.74), (2.86), (2.88) из [1] приводит к утверждению леммы 9.

Лемма 10. *Если $y_0 < x < y$, где $y_0 = g_2(1 - 1/n) + K/n$, то*

$$\overline{P}_n (1 - 1/n, x) = 1 + O\left(n \left(\int\limits_0^{1/n} \frac{s\,ds}{(x-y)^2 + s} + \int\limits_0^{1/n} \frac{s\,ds}{(x-y_0)^2 + s} \right) \right);$$

если же $x > y$, то

$$\overline{P}_n (1 - 1/n, x) = O\left(n \int\limits_0^{1/n} \frac{s\,ds}{(x-y)^2 + s} \right).$$

Доказательство леммы 10. Имеем (ср. с (2.89) из [1])

$$\overline{P}_n (1 - 1/n, x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{1/n} ds \int\limits_{x-y}^{x - g_2(1-1/n+s)} e^{-u^2/2s} s^{-1/2} du.$$

Если $x > y$, то, как и в [1], получаем оценку

$$\overline{P}_n (1 - 1/n, x) = O\left(n \int\limits_0^{1/n} ds \int\limits_{x-y}^{\infty} e^{-u^2/2s} s^{-1/2} du \right) = O\left(n \int\limits_0^{1/n} \frac{s\,ds}{(x-y)^2 + s} \right).$$

Аналогично рассматривается случай $y_0 < x < y$.

Завершим теперь доказательство теоремы. Для этого надо повторить с соответствующими изменениями заключительную часть доказательства основного результата работы [1], начинающуюся после доказательства леммы 17. Опишем эти изменения:

1. Вместо $\Pi_n = \Pi_n(\mathbf{R}^1)$ надо положить $\Pi_n = \Pi_n((-\infty, y))$.

2. Для оценки интеграла

$$V_n = \int\limits_{g_2(1-1/n)}^{g_1(1-1/n)} \overline{P}_n(1 - 1/n,\ x)\,\Pi_n(dx)$$

нужно исходить из представления

$$V_n = \Pi_n + \int\limits_{g_2(1-1/n)}^{y} (\overline{P}_n(1 - 1/n,\ x) - 1)\,\Pi_n(dx) + \int\limits_{y}^{\infty} \overline{P}_n(1 - 1/n,\ x)\,\Pi_n(dx)$$

и пользоваться леммой 10 вместо леммы 17 работы [1]. В результате получается оценка

$$V_n = \Pi_n + O(n^{-1/2} + Kc_3n^{-1}).$$

3. Вместо (2.100) из [1] в силу леммы 9 имеем

$$\overline{P}_n(t,\ g_1(t)) = O\left(\left(K + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\ln\frac{K+2}{1-t}\right)\frac{c_3}{\sqrt{n}}\right).$$

После этого для оценки интеграла

$$\int\limits_0^{1-1/n} \overline{P}_n(t,\ g_1(t))\,\Pi^+(dt) = O\left(\int\limits_0^{1-1/n} M_1(t)\,dM_2(t)\right),$$

где

$$M_1(t) = \left(K + \frac{\ln(K+2)}{\sqrt{1-t}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\ln\frac{1}{1-t}\right)\frac{c_3}{\sqrt{n}};$$

$$M_2(t) = -\Pi^+\left(\left(t,\ \frac{n-1}{n}\right)\right),$$

используем лемму 1, полагая $b = 1 - 1/n$, $p_1 = q = 0$, $p_2 = p_3 = p_4 = 1$, в результате вместо (2.103) из [1] имеем $V_n^+ = O\left((K+1)\,c_3/\sqrt{n}\right)$ и аналогично $V_n^- = O\left((K+1)\,c_3/\sqrt{n}\right)$.

4. Оценка вида $\Pi_n^{\pm}(((n-1)/n,\ 1)) = O((K+1)/n)$ может здесь не иметь места. Однако, используя (2.106) из [1] и (44), (45), вместо (2.106) из [1] имеем

$$\Pi_n = P(0,\ 0,\ D_y,\ 1) + O(1/\sqrt{n} + K/n).$$

Теорема 1 доказана в предположении (2′).

Чтобы доказать теорему 1 в общем случае, потребуется следующее вспомогательное утверждение (которое будет использоваться и в дальнейшем).

Лемма 11. *Положим*

$$p_m(\varepsilon) = \sup_{\alpha,\beta} \mathbf{P}\left(S_m/\sqrt{m} \in (\alpha,\ \beta),\ S_{m-1}/\sqrt{m} \notin (\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)\right) +$$

$$+ \sup_{\alpha,\beta} \mathbf{P}\left(S_m/\sqrt{m} \notin (\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon),\ S_{m-1}/\sqrt{m} \in (\alpha,\ \beta)\right).$$

Тогда $p_m(\varepsilon) = O(c_3/\sqrt{m} + \varepsilon)$.

Доказательство леммы 11 вытекает из (46) и того, что $\Phi(x+\varepsilon) - \Phi(x) = O(\varepsilon)$.

Итак, пусть условие (2′) нарушено, например $y \geqslant g_1(1) - K/n$. В силу леммы 11

$$P_n(0,\ 0,\ D_y,\ 1) - P_n(0,\ 0,\ D_y,\ 1 - 1/n) = O(p_n(2K/n)) = O(c_3/\sqrt{n} + K/n). \quad (62)$$

В силу (1) $P_n(0,\ 0,\ D_y,\ 1 - 1/n) - P(0,\ 0,\ D_y,\ 1 - 1/n) =$

$$= O((K+1)c_3/\sqrt{n}). \quad (63)$$

Аналогично формуле (106) из [1] имеем

$$P(0,\,0,\,D_y,\,1-1/n)-P(0,\,0,\,D_{g^1(1)},\,1)=O((K+1)/n),$$

поэтому

$$P(0,\,0,\,D_y,\,1-1/n)=P(0,\,0,\,D_y,\,1)+O((K+1)/n).$$

Отсюда с учетом (62), (63) получаем утверждение теоремы 1 для $y\geqslant g_1(1)-K/n$. Аналогично рассматриваются значения $y\leqslant g_2(1)+K/n$. Теорема 1 полностью доказана.

3. Оценки устойчивости по времени решений граничных задач

Положим здесь

$$G=\{(t,\,x):0\leqslant t\leqslant 1,\;g_2(t)<x<g_1(t)\},$$

$$g_2(0)<0<g_1(0);\;g_2(t)<g_1(t);$$

$$|g_i(t+h)-g_i(t)|\leqslant Kh(0\leqslant t\leqslant t+h\leqslant 1,\;i=1,\,2);$$

$$G_h=G_{h,y}\equiv\{(t,\,x)\in G:x<y\;(t=1-h)\};$$

$$h_n=]nh[/n.$$

Теорема 3. *Для* $0\leqslant h<1$

$$P_n\left(0,\,0,\,G_{h_n},\,1-h\right)-P_n(0,\,0,\,G_0,\,1)=O\left((K^2+1)h+(K+1)c_3/\sqrt{n}\right).$$

Теорема 4. *Для* $0\leqslant h<1$

$$P(0,\,0,\,G_h,\,1-h)-P(0,\,0,\,G_0,\,1)=O((K^2+1)h).$$

Замечание 3. Пользуясь теоремой 3, можно улучшить оценку, данную в утверждении «Б» леммы 8. Действительно, переходя к обозначениям из разд. 2, имеем

$$P_n\left(0,\,0,\,G_{h_n},\,1-h\right)=\mathbf{P}\,(A_{h,1}B_h);\;\;P_n(0,\,0,\,G_0,\,1)=\mathbf{P}\,(AB).$$

Поэтому в силу теоремы 1 и формулы (47) получаем

$$P_n(h,\,0)-P_n(0,\,0)=O\left((K^2+1)\,h+(K+1)\frac{c_3}{\sqrt{n}}\right).$$

Это доказывает в случае $t=x=0$

Следствие 3. *При* $0\leqslant t<t+h\leqslant 1$

$$P_n(t+h,\,x)-P_n(t,\,x)=O\left(\left(K^2+\frac{1}{1-t}\right)h+\left(K+\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)\frac{c_3}{\sqrt{n}}\right).$$

Переход к случаю $t\neq 0$ или $x\neq 0$ совершается так же, как в доказательстве леммы 9 работы [1].

Доказательство теоремы 4. Приведем сначала три вспомогательных утверждения.

Лемма 12. *Неравенства*

$$x-Kt\leqslant\sqrt{t}\leqslant x+Kt(K,\,t,\,x>0)$$

имеют место тогда и только тогда, когда:

1) *при* $4Kx<1$ *либо* $t\geqslant t_1$, *либо* $t_3\leqslant t\leqslant t_2$;

2) *при* $4Kx\geqslant 1$ $t\leqslant t_3$; *здесь*

$$t_{1,2}=\frac{1-2Kx\pm\sqrt{1-4Kx}}{2K^2},\quad t_3=\frac{1+2Kx-\sqrt{1+4Kx}}{2K^2}.$$

Доказательство леммы 12 предоставляется читателю. Отметим лишь, что $t_{1,2}$ — корни уравнения $\sqrt{t}=x+Kt$, а t_3 — (единственный) корень уравнения $\sqrt{t}=x-Kt$, причем $t_3\leqslant t_2\leqslant t_1$ (при $4Kx<1$).

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{M}^+(K)$ — класс неотрицательных (измеримых по Лебегу) функций g, удовлетворяющих условию $|g(t)-g(0)|\leqslant Kt(0\leqslant t\leqslant 1)$. Положим для $g\in\mathfrak{M}^+(K)$*

$$I(g)=\int_0^1 \exp\{-g^2(t)/2t\}\,g(t)\,t^{-3/2}dt.$$

Тогда $M_K\equiv\sup\{I(g):g\in\mathfrak{M}^+(K)\}=O(K+1)$.

Доказательство леммы 13. Положим $\psi(g)=ge^{-g^2/2t}$ $(g>0)$. Эта функция возрастает при $\sqrt{t}>g>0$ и убывает при $g>\sqrt{t}$. Далее, для $g\in\mathfrak{M}^+(K)$ выполнены неравенства $x-Kt\leqslant g(t)\leqslant x+Kt$, где $x=g(0)$. Будем считать, что $x>0$, так как в противном случае $g(t)\leqslant\leqslant Kt$ и $I(g)\leqslant K\int_0^1 t^{-1/2}dt=2K$. Тогда

$$I(g)\leqslant\sum_{k=1}^{3}I_k, \tag{64}$$

где $I_k=\int_{E_k}\psi\left(g_k^0(t)\right)t^{-3/2}dt;$

$$g_1^0(t)=\sqrt{t},\ g_2^0(t)=x+Kt,\ g_3^0(t)=x-Kt;$$

$$E_1=\{t:0<t\leqslant 1,\ x-Kt\leqslant\sqrt{t}\leqslant x+Kt\};$$

$$E_2=\{t:0<t\leqslant 1,\ \sqrt{t}>x+Kt\};$$

$$E_3=\{t:0<t\leqslant 1,\ \sqrt{t}<x-Kt\}.$$

Оценим сначала I_1. В силу леммы 12 $E_1\subseteq[t_1,1]\cup[t_3,t_2]$ при $4Kx<1$, а при $4Kx\geqslant 1$ $E_1\subseteq[t_3,1]$. Далее, при $4Kx<1$ $t_1\geqslant 1/4K^2$, $t_2/t_3=O(1)$, а при $4Kx\geqslant 1$ $t_3\geqslant 1/4K^2$. Поэтому при $4Kx<1$

$$\int_{t_1}^1\psi(\sqrt{t})\,t^{-3/2}\,dt=O\left(\int_{1/4K^2}^1 t^{-1}dt\right)=O(\ln(K+1));$$

$$\int_{t_3}^{t_2}\psi(\sqrt{t})\,t^{-3/2}dt=O\left(\int_{t_3}^{t_2}t^{-1}dt\right)=O\left(\ln\frac{t_2}{t_3}\right)=O(1),$$

а при $4Kx\geqslant 1$

$$\int_{t_3}^1\psi(\sqrt{t})\,t^{-3/2}dt=O\left(\int_{1/4K^2}^1 t^{-1}dt\right)=O(\ln(K+1)).$$

Следовательно,

$$I_1=O(\ln(K+2)). \tag{65}$$

Оценим теперь I_2. Имеем

$$I_2=O\left(\int_0^1\psi(x+Kt)\,t^{-3/2}dt\right)=$$

$$=O\left(K\int_0^1 t^{-1/2}dt\right)+O\left(\int_0^\infty e^{-u^2/2}du\right)=O(K+1). \tag{66}$$

Оценим, наконец, I_3. Очевидно, $E_3 \subseteq [0, t^*]$, где $t^* = \min(1, x/K)$. Поэтому $I_3 \leqslant f(K)$, где

$$f(K) = \int_0^{t^*} \psi(x - Kt)\, t^{-3/2} dt.$$

Так как t^* не возрастает при увеличении K, то при $K \neq x$

$$\frac{df(K)}{dK} \leqslant \int_0^{t^*} e^{-(x-Kt)^2/2t}[(x-Kt)^2 - t]\, t^{-3/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \exp\{-(x-Kt)^2/2t\} \frac{(x-Kt)^2}{t} t^{-1/2} dt = O(1).$$

Кроме того, $f(0) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-u^2/2} du$. Поэтому

$$I_3 \leqslant f(0) + K \max_{\substack{0<L<K \\ L \neq x}} \frac{df(L)}{dL} = O(K+1). \tag{67}$$

Утверждение леммы 13 следует из (64)—(67).

Лемма 14. *Пусть $W(h)$ $(0 \leqslant h < 1)$ — событие, состоящее в том, что траектория $\xi(t)$ выходит из области G до момента времени $1-h$, после чего впервые пересекает горизонтальный уровень y в интервале времени $(1-h, 1]$. Тогда* $\mathbf{P}(W(h)) = O((K^2+1)h)$.

Доказательство леммы 14. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(W(h)) = I_1 + I_2, \tag{68}$$

где

$$I_k = \int_0^{1-h} P_k(dt, G)\, P((1-h-t, 1-t], y - g_k(t));$$

$$P_k(E, G) = \mathbf{P}\{(\exists \tau \in E)(\forall t < \tau)\xi(t) \in G,\ \xi(\tau) = g_k(\tau)\};$$

$$P(E, u) = \mathbf{P}\{(\exists \tau \in E)(\forall t < \tau)\xi(t) \neq u,\ \xi(\tau) = u\};$$

E — борелевское множество в $\mathbf{R}^1$, $k = 1, 2$. Не умаляя общности, можно считать, что $h < 1/4$.

Из леммы 2, устремляя n к ∞, получаем в силу принципа инвариантности

$$P_i((t_1, t_2], G) = O((K+1)(t_2 - t_1)/t_2) \quad (i = 1, 2), \tag{69}$$

где $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$. Отсюда следует, в частности, что

$$I_1 = I_3 + O((K+1)h), \tag{70}$$

где

$$I_3 = \int_0^{1-2h} P_1(dt, G)\, P((1-h-t, 1-t], y - g_1(t)).$$

Положим

$$I_{31} = \int_0^{1/2} P_1(dt, G)\, P((1-h-t, 1-t], y - g_1(t));$$

$$I_{32} = I_3 - I_{31}. \tag{71}$$

Имеем при $0 \leqslant t \leqslant 1 - 2h$

$$P((1-h-t, 1-t], y - g_1(t)) = 2\left|\Phi\left(\frac{g_1(t)-y}{\sqrt{1-t}}\right) - \Phi\left(\frac{g_1(t)-y}{\sqrt{1-t-h}}\right)\right| =$$

$$= 2h\cdot\varphi\left(\frac{g_1(t)-y}{\sqrt{1-t-\theta h}}\right)(1-t-\theta h)^{-3/2}|g_1(t)-y| \leqslant$$

$$\leqslant 2h\cdot\varphi\left(\frac{g_1(t)-y}{\sqrt{1-t}}\right)\cdot 2^{3/2}(1-t)^{-3/2}|g_1(t)-y|,$$

где $0<\theta<1$. Поэтому

$$I_{31}=O\left(h\cdot\max_x\{x\varphi(x)\}\int_0^{1/2}P_1(dt,G)\right)=O(h),$$

и с учетом (69)

$$I_{32}=O((K+1)h\cdot M_K)=O((K+1)^2h),$$

ввиду леммы 13. Последние две оценки дают в силу (71) $I_3=O((K^2+1)h)$. Отсюда и из (70) следует, что $I_1=O((K^2+1)h)$. Аналогично $I_2=O((K^2+1)h)$. Поэтому, учитывая (68), видим, что лемма 14 доказана.

Завершим доказательство теоремы 4. Положим

$$A_h=\{\xi(t)\in G(t)(0\leqslant t\leqslant 1-h)\};$$
$$B_h=\{\xi(1-h)<y\},\ A=A_0,\ B=B_0.$$

Утверждение теоремы 4 равносильно тому, что

$$\mathbf{P}(A_hB_h)-\mathbf{P}(AB)=O((K^2+1)h).$$

Рассуждая подобно тому, как это делается в доказательстве леммы 8 (все выкладки значительно упрощаются, вследствие непрерывности и симметричности процесса $\xi(t)$), получаем оценку $\mathbf{P}(A_hB_h)-\mathbf{P}(AB)=O((K+1)h)+O(\mathbf{P}(W(h)))$, после чего остается воспользоваться леммой 14. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 4 достаточно показать, что при $0\leqslant h\leqslant 1/2$

$$\Delta_n(h)\equiv P_n\left(0,0,G_{h_n},1-h\right)-P(0,0,G_h,1-h)=$$
$$=O\left((K+1)c_3/\sqrt{n}+(K^2+1)h\right),\quad (72)$$

а это следует из теоремы 1, если nh — целое число. Далее, в силу теоремы 4

$$P\left(0,0,G_{\tilde h_1},1-\tilde h_1\right)-P\left(0,0,G_{\tilde h_2},1-\tilde h_2\right)=O\left((K^2+1)\left(\tilde h_1+\tilde h_2\right)\right),$$

поэтому $\Delta_n(h)=\Delta_n(h_n)+O((K^2+1)(h+1/n))$, что доказывает (72) в общем случае. Теорема 3 доказана.

4. Доказательства

Не умаляя общности, считаем, что F непрерывна.

Доказательство теоремы 1'. Можно считать, что $c=0$. Используя лемму 11, нетрудно видеть, что рассмотрение можно свести к случаю, когда $(c-d)n$ — целое число. Путем растяжения (сжатия) по t приходим к $d=1$.

Положим теперь

$$\bar D_n=\{(t,x):g_2(t)+K/n<x<g_1(t)-K/n;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$0\leqslant P_n(0,x,D,1)-\hat P_n(0,x,D,1)\leqslant$$
$$\leqslant P_n(0,x,D,1-1/n)-P_n(0,x,\bar D_n,1).\quad (73)$$

В силу теоремы 3

$$P_n(0,x,\bar D_n,1)=P_n(0,x,\bar D_n,1-1/n)+O((K+1)c_3/\sqrt{n}).\quad (74)$$

Далее (см. (2.22) и ниже в [1]),

$$P_n(0,x,D,1-1/n)-P_n(0,x,\bar D_n,1-1/n)=$$
$$=O((K+1)(K/n+c_3/\sqrt{n}))=O((K+1)c_3/\sqrt{n}).\quad (75)$$

Из (73)—(75) вытекает утверждение теоремы 1′ для $\hat{P}_n(c, x, D, d)$. Оценка для $\bar{P}_n(c, x, D, d)$ получается аналогично. Теорема 1′ доказана.

Доказательство теорем 2, 2′ проводится индукцией по s. Пусть $s=2$. Тогда теоремы 2, 2′ следуют из теорем 1, 1′. Пусть $s>2$ и для областей, имеющих не более $s-1$ точек разрыва, теоремы 2, 2′ доказаны.

Пусть $Q_n = Q_n(a, x, D, b)$ — общее обозначение для функций P_n^r, $\bar{P}_n^r$, $\dot{P}_n$, P (напомним, что функция $P_n^r(a, x, D, b)$ определена только для таких областей D, что nt_j — целые числа). Не умаляя общности, можно считать, что все $|\Delta_j| > 2/n$.

Положим для краткости $\tau =]nt_{s-2}[/n$. Тогда

$$Q_n(a, x, D, b) = \int\limits_{D(\tau+0)} Q_n(\tau, u, D, b)\, d_u Q_n(a, x, D, \tau, u),$$

где
$$Q_n(a, x, D, t, u) = Q_n(a, x, D_u, t);$$
$$D_u = D \setminus (\{t\} \times [y, \infty)).$$

Поэтому
$$(Q_n - P)(a, x, D, b) = I_1 + I_2, \tag{76}$$
где

$$I_1 = \int\limits_{D(\tau+0)} (Q_n - P)(\tau, u, D, b)\, d_u Q_n(a, x, D, \tau, u);$$

$$I_2 = \int\limits_{D(\tau+0)} P(\tau, u, D, b)\, d_u ((Q_n - P)(a, x, D, \tau, u)).$$

Положим
$$D^{(i)} = \{(t, x) : x \in \delta_i(t+0)(\tau \leqslant t < b),$$
$$x \in \delta_i(b-0) \cap D(b)(t=b)\} \quad (i = 1, \ldots, m_{s-1}).$$

Тогда для $u \in \delta_i(\tau + 0)$
$$Q_n(\tau, u, D, b) = Q_n(\tau, u, D^{(i)}, b) \quad (i = 1, \ldots, m_{s-1}).$$

Далее, в силу теорем 1, 1′
$$(Q_n - P)(\tau, u, D^{(i)}, b) = O(m(b)(K_{s-1} + 1/\sqrt{|\Delta_{s-1}|})c_3/\sqrt{n}).$$
Отсюда заключаем, что
$$I_1 = O(m(b)(K_{s-1} + 1/\sqrt{|\Delta_{s-1}|})c_3/\sqrt{n}). \tag{77}$$

Далее, интегрируя по частям, имеем
$$I_2 = -\Sigma, \tag{78}$$
где
$$\Sigma = \sum_{i=1}^{m_{s-1}} \int\limits_{\delta_i(\tau+0)} (Q_n - P)(a, x, D, \tau, u)\, d_u P(\tau, u, D^{(i)}, b).$$

В силу леммы 11 для $u \in D(\tau + 0)$
$$Q_n(a, x, D, \tau, u) - Q_n(a, x, D, t_{s-2}, u) =$$
$$= O(P_{n(\tau-a)}(K_{s-1}/n)) = O\left(\frac{c_3}{\sqrt{n(t_{s-2} - a)}} + \frac{K_{s-1}}{n}\right). \tag{79}$$

По индукции,
$$|(Q_n - P)(a, x, D, t_{s-2}, u)| \leqslant \Psi_{s-1}^0 \frac{c_3}{\sqrt{n}}, \tag{80}$$

где $\Psi_{s-1}^0 = \Psi_{s-1}$ для $Q_n = P_n^r$, $\Psi_{s-1}^0 = \hat{\Psi}_{s-1}$ для $\hat{P}_n$, $\bar{P}_n^r$, P. Из (79), (80) следует, что

$$|\Sigma| \leqslant \left(\Psi^0_{s-1} + O\left(\Delta\hat{\lambda}_{s-1}\right)\right) \frac{c_3}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{m_{s-1}} V_i, \tag{81}$$

где $\quad V_i = \operatorname*{Var}_{u \in \delta_i(\tau+0)} P\left(\tau, u, D^{(i)}, b\right) \quad (i = 1, \ldots, m_{s-1}).$

Для оценки V_i потребуется

Лемма 15. *Пусть* $D = \{(t, x) : d^-(t) < x < d^+(t) \ (c \leqslant t < d)\}$, $d^\pm$ *— непрерывные функции,* $\xi_x(t) = \xi_0(t) + x$, *где* $\xi_0(t)$ *— непрерывный случайный процесс на* $[c, d]$, $\xi_0(c) = 0$ *п. н.*,

$$\pi_{x, D}(E_m) = \mathbf{P}(\xi_x(t) \in D(t) (c \leqslant t < d);\ \xi_x(d) \in E_m),$$

где E_m *— объединение не более чем* m *интервалов. Тогда* $\operatorname*{Var}_{-\infty < x < \infty} \pi_{x,D}(E_m) \leqslant \leqslant 2m$.

Доказательство леммы 15. Достаточно, как нетрудно видеть, показать, что для $-\infty < \alpha_- < \alpha_+ < \infty$

$$\operatorname*{Var}_{x \in D(c)} \pi_{x,D}((\alpha_-, \alpha_+)) \leqslant 2. \tag{82}$$

Пусть, для $x \in D(c), \pi^{\pm}_{x,D}(\alpha_\pm)$ есть вероятности того, что или: 1) $\xi_x(t)$ выйдет из D на $[c, d)$, причем в момент первого выхода τ_x $\xi_x(\tau_x) = d^\pm(\tau_x)$, или же: 2) $\xi_x(t) \in D(t) (c \leqslant t < d)$, но $\pm\xi_x(d) \geqslant \pm\alpha_\pm$. Тогда

$$\pi_{x,D}((\alpha_-, \alpha_+)) = 1 - \pi^+_{x,D}(\alpha_+) - \pi^-_{x,D}(\alpha_-), \tag{83}$$

причем $\pi^+_{x,D}(\alpha_+)$ не убывает по x, $\pi^-_{x,D}(\alpha_-)$ не возрастает по x. Поэтому из (83) вытекает (82). Лемма 15 доказана.

Продолжим доказательство теорем 2, 2′. Из (81) в силу леммы 15 следует, что

$$|\Sigma| \leqslant 2m(t_{s-1}) \left(\Psi^0_{s-1} + O\left(\Delta\hat{\lambda}_{s-1}\right)\right) c_3/\sqrt{n}. \tag{84}$$

Подытоживая (76)—(78), (84), видим, что

$$|(Q_n - P)(a, x, D, b)| \leqslant 2m(t_{s-1}) \left[\Psi^0_{s-1} + O\left(\lambda_{s-1} + \Delta\hat{\lambda}_{s-1}\right)\right] c_3/\sqrt{n},$$

иначе говоря,

$$|(Q_n - P)(a, x, D, b)| \leqslant \Psi^0_s c_3/\sqrt{n},$$

где $\Psi^0_s = \mu_{s-1}\left[\Psi^0_{s-1} + L\hat{\lambda}_{s-1}\right] (s > 2)$; $\Psi^0_2 = L\mu_1\hat{\lambda}_1$; $\quad L > 0$ — некоторая абсолютная постоянная. Отсюда следуют утверждения теорем 2, 2′.

Для доказательства следствий 2, 2′ достаточно отметить, что $\mu_j = 2$ $(j = 1, \ldots, s-1)$; $\Delta\hat{\lambda}_j = O(\lambda_{j-1} + \lambda_j)$ $(j = 2, \ldots, s-1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нагаев С. В.** О скорости сходимости в одной граничной задаче. I, II.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 25, вып. 2, с. 179—199; 1970, т. 25, вып. 3, с. 419—441.
2. **Саханенко А. И.** О скорости сходимости в одной граничной задаче.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, вып. 2, с. 416—421.
3. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 367 с.
4. **Нагаев С. В.** Некоторые предельные теоремы для больших уклонений.— Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, вып. 2, с. 231—254.