ЧАСТЬ II

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНЫХ БЛИЗКИХ ГИПОТЕЗ

А. А. БОРОВКОВ, А. И. САХАНЕНКО

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой излагается общий принцип, который можно было бы назвать «статистический принцип инвариантности», позволяющий конструировать асимптотически наиболее мощные критерии для проверки близких гипотез. Этот принцип тесно связан с идеями Ле-Кама, в частности с понятием контигуальности, и является некоторым обобщением результатов Чибисова, полученных им для одномерного случая в 1969 г. Вторая часть работы посвящена построению асимптотически оптимальных минимаксных критериев для некоторых специальных классов гипотез.

Всюду, если не оговорено противное, пределы берутся при $n\to\infty$, а интегрирование производится по всему пространству.

1. Общая форма статистического принципа инвариантности

Чтобы пояснить естественность рассматриваемой постановки задачи, начнем с конечномерного параметрического случая. Пусть $X=(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i\in R$, есть выборка из распределения P_θ на прямой R с данной плотностью $p(x, \theta)$, где $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — неизвестный параметр.

Мы будем рассматривать близкие альтернативы для гипотезы $H^0=\{\theta=\theta^0\}$, т. е. альтернативы, соответствующие значениям параметра

$$\theta=\theta^0+h/b(n),\ h\in R^k, \tag{1}$$

где $b(n)\to\infty$ и $b(n)\leqslant\sqrt{n}$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\theta^0=0$. Тогда если плотность $p(x, \theta)$ есть гладкая функция по θ в точке $\theta=0$, то плотность P_θ относительно P_0 может быть представлена в виде

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}=1+\frac{\gamma_n(x)}{b(n)}; \tag{2}$$

$$\gamma_n(x)\to\gamma(x)=\sum_{j=1}^{k}h_jf_j(x), \tag{3}$$

где $f_j(x)=\left.\dfrac{\partial p(x, \theta)}{\partial\theta_j}\right|_{\theta=0}$. В этом представлении при помощи линейного преобразования параметра h всегда можно добиться того, чтобы новые функции f_j в (3) были ортонормальными относительно меры P_0.

Рассмотрим теперь гипотезу H, состоящую в том, что параметр θ имеет некоторое априорное распределение в R^k. Точнее, мы будем предполагать, что величина h в (1) случайна и ее распределение Q^n слабо сходится к некоторому распределению Q. Это означает, что элементы выборки x_i при гипотезе H имеют случайную плотность (2) и эта плотность есть случайный процесс, причем $\gamma_n(x)$ сходится в некотором смысле к предельному процессу $\gamma(x)$ вида $\sum_{j=1}^{k} \gamma_j f_j(x)$. Распределение γ здесь в известном смысле выраждено, так как оно определяется распределением случайной величины $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ в R^k.

Сказанное выше делает естественной следующую постановку задачи. Будем считать, что «параметр» θ задан в произвольном пространстве. Это равносильно переходу к изучению общих статистических задач, в том числе и тех, которые с точки зрения обычной классификации рассматриваются как непараметрические (т. е. такие, где параметр вовсе отсутствует). Относительно природы наблюдаемых значений x_i также не будет делаться никаких предположений. Измеримое пространство, в котором принимают значения x_i, мы обозначим $(\mathscr{X}, \sigma(\mathscr{X}))$.

Итак, пусть $X_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nn})$, $x_{ni} \in \mathscr{X}$, есть выборка из распределения P_{γ_n}на $(\mathscr{X}, \sigma(\mathscr{X}))$ с плотностью

$$\frac{dP_{\gamma_n}}{dP_0} = 1 + \frac{\gamma_n(x)}{b(n)}, \quad b(n) \to \infty,$$

относительно данного распределения P_0. Мы будем проверять гипотезу $H^0 = \{\gamma_n = 0\}$ против сложной гипотезы $H = H_n = \{\gamma_n \neq 0\}$.

Если множество допустимых траекторий γ_n достаточно богато, то многие подходы и результаты конечномерного случая теряют свою силу. Например, метод максимального правдоподобия становится бессмысленным.

Будем считать, что на множестве альтернатив $\{\gamma_n\}$ задано априорное распределение Q^n. Это означает, что γ_n можно рассматривать как не зависящий от X_n случайный процесс (или поле), природа которого в отличие от конечномерного случая может быть произвольной. При этом в данном разделе предполагаем, что $b(n) = \sqrt{n}$, а распределение Q^n процессов γ_n сближается с распределением Q некоторого процесса γ. Задача состоит в отыскании в этом случае асимптотической формы наиболее мощного критерия.

Введем гильбертово пространство $L_2 = L_2(\mathscr{X}, \sigma(\mathscr{X}), P_0)$ измеримых функций на $\mathscr{X}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int f(x) g(x) \, dP_0(x)$ и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ и обозначим L_2^0 подпространство L_2, состоящее из функций f таких, что $(f, 1) = 0$. Будем предполагать, что существует процесс γ из L_2^0 $(\mathbf{P}(\|\gamma\| < \infty) = 1)$, который является предельным для γ_n в следующем смысле (символ $\Rightarrow$ между случайными величинами будет означать слабую сходимость их распределений):

А) $(f, \gamma_n) \Rightarrow (f, \gamma)$ для всех ограниченных и измеримых f. Так как $(\gamma_n, 1) = 0$, то автоматически $\gamma \subset L_2^0$;

$$\text{В}_1) \quad \rho_n \equiv \sqrt{n} \int\limits_{\gamma_n(x) \geqslant \sqrt{n}} \gamma_n(x) \, dP_0(x) \Rightarrow 0;$$

$$\text{В}_2) \quad \int\limits_{\gamma_n(x) < \sqrt{n}} \gamma_n^2(x) \, dP_0(x) \Rightarrow \|\gamma\|^2.$$

Здесь условия В_1, В_2 есть условия компактности для Q^n, а условие А означает слабую сходимость Q^n для специального класса множеств, образуемых подпространствами $(f, \gamma) > t$. Эти условия близки к минимальным с точки зрения формулируемой далее теоремы. Можно заметить также, что условие $\mathbf{P}(\|\gamma\| < \infty) = 1$ в известном смысле не ограничивает общности, так как в противном случае предельные меры, соответствующие гипотезам H_0 и H, сингулярны. Можно еще отметить, что в условиях А, В_1, В_2 не требуется принадлежности $\gamma_n \in L_2$.

Если дана последовательность $a=(a_1, a_2, \ldots)$, то через $a^{(k)}$ мы будем обозначать «обрезанную» последовательность, т. е. $a^{(k)}=(a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$. Для суммируемых в квадрате последовательностей a и b будут использоваться обозначения $(a, b)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$, $\|a\|=(a, a)^{1/2}$, и это не вызовет недоразумений, поскольку из контекста всегда ясно, какому из пространств, L_2 или l_2, принадлежат рассматриваемые элементы.

Далее, критерием мы всегда будем называть критическую функцию φ (т. е. $\varphi(X)$ есть вероятность при данной выборке X отвергнуть гипотезу H_0). Обозначим $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$ уровень значимости и мощность критерия φ соответственно, когда выборка имеет объем n.

Фиксируем α, $0<\alpha<1$. Последовательность критериев $\{\varphi_n^*\}$ будем называть асимптотически наиболее мощной, если $\alpha_n(\varphi_n^*)\to\alpha$ и для любой другой последовательности φ_n, $\alpha_n(\varphi_n)\to\alpha$ справедливо

$$\liminf\left(\beta_n(\varphi_n^*)-\beta_n(\varphi_n)\right)\geqslant 0.$$

Сформулируем теперь упоминавшийся выше «статистический принцип инвариантности».

Теорема 1. *Справедливы следующие три утверждения.*

I. *Для любой ортонормированной системы $\{g_j\}$ в L_2^0 конечномерные распределения последовательности $G_n=(G_{n1}, G_{n2}, \ldots)$, где $G_{nj}=n^{-1/2}\times\sum_{i=1}^{n} g_j(x_{ni})$, слабо сходятся, при гипотезе H_0, к распределениям последовательности $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.*

II. *При гипотезе $H_n=H_n(Q^n)$, состоящей в том, что распределение x_{ni} есть P_{γ_n}, и при выполнении условий* A, B$_1$, B$_2$ *конечномерные распределения G_n слабо сходятся к распределениям $\xi+\zeta=(\xi_1+\zeta_1, \xi_2+\zeta_2, \ldots)$, где последовательности $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)=((g_1, \gamma), (g_2, \gamma), \ldots)$ и ξ независимы, а обозначение ξ имеет прежний смысл.*

Чтобы сформулировать третье основное утверждение принципа, обозначим $Y=(Y_1, Y_2, \ldots)$ наблюдение (выборку единичного объема) над случайной последовательностью $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Пусть относительно η справедлива одна из двух простых гипотез:

1) гипотеза h^0: распределение η совпадает с распределением ξ;

2) гипотеза h: распределение η совпадает с распределением $\xi+\zeta$.

Критерии для проверки гипотезы h^0 против h мы будем называть предельными и обозначим их буквой ψ в отличие от допредельных критериев, которые мы обозначим буквой φ. Из леммы Неймана — Пирсона нетрудно получить явный вид (см. ниже замечание 2) наиболее мощного предельного критерия ψ^* уровня α.

III. *Если подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{g_j\}$, является носителем распределения процесса γ, т. е.*

$$\lim_{k\to\infty} Q\left(\|\gamma\|^2-\sum_{j=1}^{k}(\gamma, g_j)^2>\delta\right)=0 \quad \forall\delta>0, \tag{4}$$

то существует последовательность $k_0(n)$ такая, что последовательность критериев $\varphi_n^*(X_n)=\psi^*\left(G_n^{(k(n))}\right)$ для всех $k(n)\to\infty$, $k(n)\leqslant k_0(n)$, будет асимптотически наиболее мощной.

Термин «принцип инвариантности» в обозначении сформулированного утверждения уместен, поскольку природа предельных распределений, фигурирующих в нем, не зависит ни от выбранной системы функций $\{g_j\}$, ни от основного распределения P_0.

Замечания. 1. Рассматривая конечномерный случай и переходя затем к пределу, нетрудно найти, что плотность $q(y)$ распределения $\xi+\zeta$ относительно распределения ξ в точке $y=(y_1, y_2, \ldots)$ равна

$$q(y)=\mathbf{M}\exp[(y,\ \zeta)-\|\zeta\|^2/2]. \tag{5}$$

2. Имеет место следующая альтернатива: либо $\mathbf{P}(\|\gamma\|=0)=1$ и $q(y)\equiv 1$, либо

$$\mathbf{P}(\|\gamma\|=0)<1, \tag{6}$$

и тогда $\mathbf{P}(q(\xi)=c)=0$ для всех c. Для доказательства достаточно заметить, что из (6) и равенства $\|\gamma\|^2=\|\xi\|^2$ следует существование такого k, что $\mathbf{P}(|\zeta_k|=0)<1$, а потому

$$\frac{d^2 q(y)}{dy_k^2}=\mathbf{M}\zeta_k^2\exp[(y,\zeta)-\|\zeta\|^2/2]>0 \quad \forall y.$$

Из последнего соотношения немедленно вытекает $\mathbf{P}(q(\xi)=c)=0$, поскольку для любого сечения

$$\mathbf{P}(q(\xi)=c/\xi_1=y_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1}=y_{k-1},\ \xi_{k+1}=y_{k+1},\ \ldots)=0.$$

Поэтому мы всюду полагаем, что $\psi^*\equiv\alpha$, *при* $\mathbf{P}(\|\gamma\|=0)=1$, *и что при выполнении* (6) ψ^* *совпадает с индикатором множества* $\{q(y)>c_\alpha\}$, *где* c_α *есть единственное решение уравнения* $\mathbf{P}(q(\xi)>c_\alpha)=\alpha$.

3. Пункт III теоремы 1 показывает, что, пользуясь конечным числом статистик $G_{n1}, \ldots, G_{nk}$, можно построить критерий $\psi^*(G_n^{(k)})$ с параметрами, сколь угодно близкими к параметрам наиболее мощного критерия.

4. Условие (4), очевидно, всегда будет выполнено, если система $\{g_j\}$ полна.

5. Утверждение пункта III, вообще говоря, перестает быть верным, если положить $k(n)\equiv\infty$. На это указывает пример 2, приведенный в конце данного раздела.

Сформулируем теперь утверждение, из которого теорема 1 будет следовать как частный случай. *Условимся заданную на пространстве последовательностей функцию* $\psi(y)$ *называть почти непрерывной, если при каждом* k *функция* $\psi(y^{(k)})$ *непрерывна почти всюду относительно меры Лебега в* R^k *и*

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}(|\psi(\xi)-\psi(\xi^{(k)})|>\delta)=0 \quad \forall\delta>0. \tag{7}$$

Ниже, в лемме 2, показано, что определенная в (5) функция q, а следовательно, и ψ^* являются примерами почти непрерывных функций. Символами $\alpha(\psi)$ и $\beta(\psi)$ мы будем обозначать уровень значимости и мощность предельного критерия ψ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A, B_1, B_2 *и задана последовательность критериев* $\varphi_n(X_n)$. *Тогда*

I. *Если критерий* ψ *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\psi — \textit{почти непрерывная функция}; \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} P_0\left(\left|\varphi_n(X_n)-\psi\left(G_n^{(k)}\right)\right|>\delta\right)=0 \ \forall\delta>0, \tag{9}$$

то $\alpha_n(\varphi_n)\to\alpha(\psi)$ *и* $\beta_n(\varphi_n)\to\beta(\psi)$.

II. *Если ортонормированная система* $\{g_j\}$ *удовлетворяет условию* (4), *а* (9) *выполняется при* $\psi=\psi^*$, *то последовательность критериев* φ_n *является асимптотически наиболее мощной.*

Сравним полученное утверждение с результатами Чибисова [1]. Нетрудно заметить, что если $\mathscr{X}=R$ и все функции ступенчаты, то выполнение условий (8) и (9) гарантирует, по терминологии [1], принадлежность последовательности классу ω. Утверждение теоремы 2 в этом случае будет следовать из результатов Чибисова, если найдется такое вероятностное пространство $(\Theta, \sigma(\Theta), \pi)$ и измеримые отображения $\Delta(\cdot, \cdot)$ и $\Delta_n(\cdot, \cdot)$ из $\mathscr{X}\times\Theta$ в $\mathscr{X}$, что $\gamma_n(x)=\Delta_n(x, \theta)$ и $\gamma(x)=\Delta(x, \theta)$ и разность $\Delta_n-\Delta$ удовлетворяет следующему условию.

$$\text{C)}\ P_0\left(\left|\sum_{i=1}^{n}[\Delta_n(x_{ni}, \theta)-\Delta(x_{ni}, \theta)]\right|>\sqrt{n}\delta\right)\to 0\quad \forall\delta>0$$

равномерно по $\theta\in\Theta_1$ для любого компакта $\Theta_1\subset\Theta$ (здесь и далее компактом будем называть любое $\Theta_1\subset\Theta$ такое, что множество $\{\Delta(\cdot, \theta)\colon \theta\in\in\Theta_1\}$ относительно компактно в L_2^0).

Требуется, следовательно, задать меры Q и Q^n на одном вероятностном пространстве таким образом, чтобы выполнялось условие C, что, если и возможно, не всегда просто сделать. Отметим, что в то время как условие C используется по существу в доказательствах в [1], предположения, что $\mathscr{X}=R$, а g_j ступенчаты, нужны там лишь для описания предельной задачи, отличающегося от нашего. Поэтому, далее будем считать, что утверждения теоремы 2 доказаны в [1] для любой меры $\bar{Q}$ и последовательности мер $\bar{Q}_n$, которые удовлетворяют условию C вместо A, B_1, B_2.

Заметим еще, что, поскольку $\Delta_n(x, \theta)\geqslant-\sqrt{n}$, $\int\Delta^2(x, \theta)\,dP_0(x)<\infty$ и $\int\Delta_n(x, \theta)\,dP_0(x)=\int\Delta(x, \theta)\,dP_0(x)=0$, из критерия вырожденной сходимости (см. [2], с. 331) нетрудно получить, что C эквивалентно выполнению следующих двух условий, более удобных, чем (3.3)—(3.5) в [1]:

$$\text{C}_1)\ \rho_n(\theta)\equiv\sqrt{n}\int\limits_{\Delta_n(x,\theta)\geqslant\sqrt{n}}\Delta_n(x, \theta)\,dP_0(x)\to 0;$$

$$\text{C}_2)\ \int\limits_{\Delta_n(x,\theta)<\sqrt{n}}(\Delta_n(x, \theta)-\Delta(x, \theta))^2dP_0(x)\to 0,$$ где сходимость должна иметь место равномерно по θ на любом компакте из Θ.

Доказательство теоремы 2. Фиксируем ортонормированную последовательность $\{g_j\}$ в L_2^0, удовлетворяющую условию (4), и положим

$$\gamma_n^*(x)=\min\{\gamma_n(x), \sqrt{n}\};\quad \zeta_{nj}=(\gamma_n^*, g_j);\quad \zeta_n^{(k)}=(\zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nk}, 0, 0, \ldots);$$

$$\gamma^{(k)}(x)=\gamma(x)-\sum_{j=1}^{k}\zeta_j g_j(x);\quad \gamma_n^{(k)}=\gamma_n^*(x)-\sum_{j=1}^{k}\zeta_{nj}g_j(x).$$

Условие (4) в этом случае можно переписать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}(\|\gamma^{(k)}\|>\delta)=0\quad\forall\delta>0. \tag{10}$$

Обозначим символом $\mu_n^{(k)}$ расстояние Леви — Прохорова между распределениями в R^k, соответствующими случайным векторам $\zeta^{(k)}$ и $\zeta_n^{(k)}$. В силу приводимой ниже леммы 1 $\mu_n^{(k)}\to 0$ для всех k. Поэтому можно подобрать такую последовательность $k(n)\to\infty$, что $\mu_n^{(k(n))}\to 0$.

Возьмем в качестве π меру в $\Theta=[0, 1]\times l_2$, порожденную распределением пары (ζ_0, ζ), где ζ_0 и ζ независимы и ζ_0 равномерно распределена на $[0, 1]$, и положим $\Delta(x, \theta)=\gamma(x)$. В силу теоремы Штрассена (см. [3]) существует функция $\Delta_n(x, \theta)$ такая, что $\Delta_n(x, \theta)$ одинаково распределена с $\gamma_n(x)$ и при $\gamma_n(x)=\Delta_n(x, \theta)$

$$\pi\left(\theta\colon \|\zeta_n^{(k(n))}-\zeta^{(k(n))}\|>\mu_n^{(k(n))}\right)\leqslant\mu_n^{(k(n))}.$$

Полагая далее $\gamma_n(x)=\Delta_n(x, \theta)$, из последнего соотношения и (10) имеем

$$\|\zeta_n^{(k(n))}-\zeta\|\leqslant\|\zeta_n^{(k(n))}-\zeta^{(k(n))}\|+\|\gamma^{(k(n))}\|\Rightarrow 0.$$

Используя эту сходимость и переписывая B_2 в виде

$$\|\gamma_n^*\|^2 = \|\zeta_n^{(k(n))}\|^2 + \|\gamma_n^{(k(n))}\|^2 \Rightarrow \|\gamma\|^2$$

получим $\|\gamma_n^{(k(n))}\| \Rightarrow 0$. Отсюда, из B_1 и (10) следует, что можно найти последовательность $\delta(n) \to 0$ такую, что для события

$$\overline{\Theta}_n = \{\|\zeta_n^{(k(n))} - \zeta^{(k(n))}\| \leqslant \delta(n),\ \|\gamma_n^{(k(n))}\| \leqslant \delta(n), \|\gamma^{(k(n))}\| \leqslant \delta(n),\ \rho_n(\theta) \leqslant \delta(n)\}$$

справедливо $\pi\{\theta: \theta \notin \overline{\Theta}_n\} \leqslant \delta(n)$.

Определим функции $\overline{\Delta}_n$, полагая $\overline{\Delta}_n(x,\ \theta) = \Delta_n(x,\ \theta)$ при $\theta \in \overline{\Theta}_n$, и $\overline{\Delta}_n(x,\ \theta) = 0$ в противном случае. Построенная таким образом последовательность $\overline{\Delta}_n$ удовлетворяет условиям C_1 и C_2, поскольку при $\theta \in \overline{\Theta}_n$

$$\sqrt{n} \int\limits_{\overline{\Delta}_n(x,\theta) \geqslant \sqrt{n}} \overline{\Delta}_n(x,\ \theta)\, dP_0(x) \leqslant \delta(n);$$

$$\|\overline{\Delta}_n(x,\ \theta) - \Delta(x,\ \theta)\| \leqslant \|\zeta_n^{(k(n))} - \zeta^{(k(n))}\| + \|\gamma_n^{(k(n))}\| + \|\gamma^{(k(n))}\| \leqslant 3\delta(n).$$

Таким образом, утверждение теоремы 2 справедливо для последовательности распределений $\overline{Q}^n$, соответствующих процессам $\gamma_n = \overline{\Delta}_n(\cdot,\ \theta)$. Обозначая $\overline{\beta}_n(\varphi)$ мощность критерия φ при гипотезе $H_n(\overline{Q}^n)$, нетрудно заметить, что

$$|\beta_n(\varphi) - \overline{\beta}_n(\varphi)| \leqslant \pi(\theta: \Delta_n(\cdot,\ \theta) \neq \overline{\Delta}_n(\cdot,\ \theta)) \leqslant \delta(n) \to 0.$$

Отсюда вытекает, что для любой последовательности критериев φ_n пределы их мощности при альтернативах $H_n(Q^n)$ и $H_n(\overline{Q}^n)$ совпадают. Теорема 2 доказана.

Лемма 1. $\zeta_n^{(k)} \Rightarrow \zeta^{(k)}\ \ \forall k$.

Доказательство. Пусть $g \in L_2$. Обозначим g^c срезку функции g на уровне c, т. е. произведение g на индикатор множества $\{x: |g(x)| \leqslant c\}$. Поскольку g^c — ограниченная функция, то в силу условия $\overline{A}$ $(g^c,\ \gamma_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow (g^c,\ \gamma)$, а потому можно выбрать $c(n) \to \infty$, $c(n) \leqslant \sqrt{n}$, такую, что $(g^{c(n)},\ \gamma_n) \Rightarrow (g,\ \gamma)$. Отсюда, из B_1, B_2 и неравенства

$$|(g, \gamma_n^*) - (g^{c(n)}, \gamma_n)| \leqslant \|g - g^{c(n)}\| \|\gamma_n^*\| + c(n) \int |\gamma_n^* - \gamma_n|\, dP_0(x)$$

следует $(g, \gamma_n^*) \Rightarrow (g, \gamma) \qquad \forall g \in L_2$.

Так как последнее соотношение выполняется для всех g вида $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i g_i$, то (см., например, [4], с. 36) из него следует требуемое утверждение.

Лемма 2. *Функция $q(y)$ почти непрерывна.*

Доказательство. Функция $q(y^{(k)})$ непрерывна по $y^{(k)}$, так как

$$\exp(y_j z_j - z_j^2/2) \leqslant \exp(y_j^2/2),\ |z_j| \exp(y_j z_j - z_j^2/2) \leqslant \exp(y_j^2),$$

а потому $\left|\dfrac{q}{q y_j} q(y^{(k)})\right| \leqslant \exp(\|y^k\|^2/2 + y_j^2/2) < \infty$.

Докажем теперь, что функция $q(y)$ удовлетворяет условию (7). Заметим, что при $z \in l_2$ случайная величина $(\xi,\ z)$ имеет нормальное распределение, а потому

$$\mathrm{M} \exp[(\xi,\ z) - \|z\|^2/2] = 1;$$

$$\mathrm{M}\,|\exp[(\xi, z) - \|z\|^2/2] - 1| = (2\pi)^{-1/2} \int |\exp[-(t - \|z\|)^2/2] -$$

$$- \exp[-t^2/2]|\, dt = 2(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\|z\|/2}^{\|z\|/2} \exp(-t^2/2)\, dt \leqslant 2 \min\{\|z\|, 1\}.$$

Используя полученные соотношения и независимость ζ, $\xi^{(k)}$ и $\xi - \xi^{(k)}$, имеем

$$\mathbf{P}(|q(\xi) - q(\xi^{(k)})| > \delta) \leqslant \delta^{-1}\mathbf{M}|q(\xi) - q(\xi^{(k)})| =$$
$$= \delta^{-1}\mathbf{M}\{\mathbf{M}_\zeta \exp[(\xi^{(k)}, \zeta^{(k)}) - \|\zeta^{(k)}\|^2/2]\mathbf{M}_\zeta|\exp[(\xi - \xi^{(k)}, \zeta - \zeta^{(k)}) -$$
$$- \|\zeta - \zeta^{(k)}\|/2] - 1|\} \leqslant 2\delta^{-1}\mathbf{M}\min\{\|\zeta - \zeta^{(k)}\|, 1\} \leqslant 2\delta^{-1}(\varepsilon + \mathbf{P}(\|\zeta - \zeta^{(k)}\| > \varepsilon)).$$

Поскольку $\|\zeta - \zeta^{(k)}\| = \|\gamma^{(k)}\|$, переходя к пределу сначала при $k \to \infty$, а затем при $\varepsilon \to 0$ и используя (10), получим требуемое утверждение.

Пример 1. Пусть γ — гауссовский процесс. Для простоты предположим, что нормально распределенные случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ независимы, и обозначим $a_j = \mathbf{M}\zeta_j$, $\lambda_j = \mathbf{D}\zeta_j$. Несложно подсчитать, что

$$q(y) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j)^{-1/2}\right) \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j y_j^2 + 2a_j y_j - a_j^2}{1 + \lambda_j}\right].$$

Следовательно, при выполнении (6) $\left(\text{т. е. при } 0 < \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + a_j^2) < \infty\right)$ наиболее мощный предельный критерий ψ^* совпадает с индикатором множества вида

$$S(y) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j y_j^2 + 2a_j y_i}{1 + \lambda_j} > c_\alpha.$$

Отметим, что при всех $k(n) \to \infty$ последовательность критериев $\psi^*\left(G_n^{(k(n))}\right)$ удовлетворяет условию (9), поскольку при $k(n) > k$

$$\mathbf{M}\left|S\left(G_n^{(k(n))}\right) - S\left(G_n^{(k)}\right)\right| \leqslant \mathbf{M}\left(\sum_{j=k+1}^{k(n)} \lambda_j G_{nj}^2\right) +$$
$$+ 2\left(\mathbf{M}\left|\sum_{j=k+1}^{k(n)} a_j (1 + \lambda_j)^{-1} G_{nj}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j +$$
$$+ 2\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^2\right)^{1/2} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, последовательность критериев, совпадающих с индикатором множества $S\left(G_n^{(k(n))}\right) > c_\alpha$, является наиболее мощной при всех $k(n) \to \infty$, в частности и при $k(n) \equiv \infty$.

Пример 2. Пусть P_0 — равномерное распределение на $[0, 1]$, а $\{g_{mj}\}$ — треугольный массив функций на $[0, 1]$ вида

$$g_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{m/2} & \text{при } (j-1)2^{-m} \leqslant x < (2j-1)2^{-m-1}, \\ -2^{m/2} & \text{при } (2j-1)2^{-m-1} \leqslant x < j2^{-m}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $1 \leqslant j \leqslant 2^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае система функций $\{g_{mj}\}$ является ортонормированной и ортогональной к $g_0 \equiv 1$. Введем независимые треугольные массивы $G_n = \{G_{nmj}\}$ и $\zeta = \{\zeta_{mj}\}$, где

$$G_{nmj} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} g_{mj}(x_{ni}); \; \mathbf{P}(\zeta_{mj} = \pm 1, \zeta_{rs} = 0$$
$$\forall (r, s) \neq (m, j)) = 2^{-2m-1},$$

и положим $\gamma(x) = \sum\limits_{m,j} \zeta_{mj} g_{mj}(x)$, $\gamma_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{m(n)} \sum\limits_j \zeta_{mj} g_{mj}(x)$, где $n/2 < 2^{m(n)} \leqslant n$. В этом случае наиболее мощный предельный критерий ψ^* совпадает с индикатором множества вида

$$q(y) \equiv e^{1/2} \sum_{m,j} 2^{-2m-2} [\exp(y_{mj}) + \exp(-y_{mj})] > c_\alpha.$$

Отметим, что в данном случае критерий $\psi^*(G_n)$ не будет асимптотически наиболее мощным. Действительно, при каждом n с вероятностью 1 найдется интервал вида $\left[(j_0-1)\,2^{-m_0},\, j_0 2^{-m_0}\right)$, в который попадает только один из элементов выборки $x_{n1}, \ldots, x_{nn}$, далее обозначаемый x^*. Тогда при $m > m_0$ можно найти вложенный в $\left[(j_0-1)\,2^{-m_0},\, j_0 2^{-m_0}\right)$ интервал $[(j_m-1)2^{-m},\, j_m 2^{-m})$, также содержащий ровно один элемент выборки (причем тот же самый x^*). Далее имеем

$$G_{nmj_m} = n^{-1/2} g_{mj_m}(x^*) = \pm 2^{m/2} n^{-1/2};$$

$$q(G_n) \geqslant e^{1/2} \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{-2m-2} \exp\left|G_{nmj_m}\right| = e^{1/2} \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{-2m-2} \exp(2^{m/2} n^{-1/2}) \equiv \infty.$$

Замечание 6. В приведенных выше рассмотрениях простая гипотеза H^0 имела вид $\{\gamma_n = 0\}$. На самом деле, утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, будут иметь место и для «симметричной» задачи, когда проверяются две сближающиеся гипотезы H_n^0 и H_n^1, где гипотеза H_n^i состоит в том, что выборка $X_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nn})$ взята из распределения с плотностью $1 + n^{-1/2}\gamma_n^i(x)$ относительно фиксированной вероятностной меры P_0 на $\mathscr{X}$, а $\gamma_n^i(x)$ есть траектория некоторого случайного процесса со значениями в $\mathscr{X}$.

Предположим, что при каждом $i = 0, 1$ существуют предельные процессы γ^i со значениями в L_2^0 такие, что $\gamma_n = \gamma_n^i$ и $\gamma = \gamma^i$ удовлетворяют условиям А, В$_1$, В$_2$. В этом случае справедливы утверждения пункта I теоремы 2 и при $H_n = H_n^i$ и $\zeta_n = \zeta_n^i$ пункта II теоремы 1. Предельная задача теперь формулируется следующим образом: по выборке единичного объема Y над случайной последовательностью η проверить гипотезу h^0 против h^1, где гипотеза h^i состоит в том, что распределение η совпадает с $\xi + \zeta^i$. Плотность распределения $\xi + \zeta^1$ относительно распределения $\xi + \zeta^0$ в точке y имеет вид $q^1(y)/q^0(y)$, где $q^i(y)$ совпадает с $q(y)$ в (5) при $\zeta = \zeta^i$. В соответствии с замечанием 2 наиболее мощный предельный критерий ψ^* уровня α однозначно определим как индикатор множества вида $\{q^1(y)/q^0(y) > c_\alpha\}$, если хотя бы при одном i процесс $\gamma = \gamma^i$ удовлетворяет (6), и $\psi^* = \alpha$ в противном случае. Для построенного таким образом ψ^* справедливы утверждения пункта III теоремы 1 и пункта II теоремы 2, если только ортонормированная система $\{g_j\}$ удовлетворяет (4) при $\gamma = \gamma^0$ и $\gamma = \gamma^1$.

2. Асимптотически минимаксные критерии

Начнем опять с конечномерного параметрического случая. Пусть выполнены соотношения (1), (2) и распределения Q^n процессов γ_n слабо сходятся к распределению Q (Q^n и Q есть распределения в R^k).

Справедливо следующее утверждение, которое можно получить из [5]. Обозначим $q^n(y)$ и $q(y)$ соответственно плотности распределений Q^n и Q относительно меры Лебега в точке y.

Теорема 3. *Пусть $b(n) = o(\sqrt{n})$, а распределение Q^n и Q таковы, что существуют плотности $q^n(0)$ и $q(0) > 0$ в точке $y = 0$ и наряду со сходимостью $Q^n \Rightarrow Q$ имеет место сходимость плотностей $q^n(0) \to q(0) > 0$. Пусть далее c_α есть решение уравнения*

$$\mathbf{P}(\|\xi\|^2 > c_\alpha) = \mathbf{P}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 > c_\alpha) = \alpha, \tag{11}$$

где вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ состоит из независимых случайных величин, *имеющих стандартное нормальное распределение. Тогда для любого Q среди всех тестов φ_n асимптотического уровня α критерий $\overset{*}{\varphi}_n$, совпадающий с индикатором множества*

$$\left\{X_n : \sum_{j=1}^{k}\left(n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f_j(x_i)\right)^2 > c_\alpha\right\}, \tag{12}$$

будет асимптотически наиболее мощным для проверки гипотезы H^0 против $H(Q^n)$. Это означает, что для отношения вероятностей ошибок второго рода выполняется $\limsup\left(1-\beta_n\left(\overset{*}{\varphi}_n\right)\right)/\left(1-\beta_n(\varphi_n)\right) \leqslant 1$ *для любого критерия φ_n с $\alpha_n(\varphi_n)\to\alpha$.*

Нетрудно проверить, что критерий $\overset{*}{\varphi}_n$ совпадает с критерием максимального правдоподобия. Он дает в известном смысле универсальный тест для проверки H^0 против сложной гипотезы $H=\{\theta=h/b(n),\ h\neq 0\}$, так как не зависит от Q.

Возможны ли такие универсальные тесты в общем (непараметрическом) случае при $b(n)=\sqrt{n}$? Ответ на этот вопрос, скорее, отрицательный, однако при некотором изменении постановки вопроса оказывается возможным указать критерии вида, близкого к (12), которые будут оправданы и в новых условиях.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $b(n)=\sqrt{n}$.

Пусть, например, предельный процесс γ является гауссовским с нулевым средним, а выборочное пространство $\mathscr{X}$ произвольно. Известно [4, с. 247], что в этом случае существует ортонормированная система $\{g_j\}$ в $\mathscr{X}$ такая, что $\gamma(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j g_j(x)$, где ζ_j независимы и нормально распределены с нулевыми средними и дисперсиями, равными λ_j. Функции g_j определяются как собственные функции корреляционного оператора $Tg(x)=\int g(y)R(x,y)\,dP_0(y)$, где $R(x, y)$ — корреляционная функция процесса γ, а λ_j — соответствующие g_j собственные числа.

Из примера 1 в разделе 1 вытекает следующее

Следствие. *В сформулированных условиях асимптотически наиболее мощный критерий φ_n^* совпадает с индикатором множества $\left\{X_n : \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(1+\lambda_j)^{-1}G_{nj}^2 > C_\alpha\right\}$, где C_α есть решение уравнения $\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(1+\lambda_j)^{-1}\xi_j^2 > C_\alpha\right)=\alpha$* (обозначения G_{nj} и ξ_j введены в теореме 1).

Из приведенного утверждения следует, в частности, что критерий $\overset{*}{\varphi}_n$ существенно зависит от предельной меры Q. Это положение сохранится, очевидно, и в параметрическом случае.

Само по себе предположение о гауссовости предельного процесса γ в ряде случаев можно было бы считать оправданным (например, при проверке неалгоритмических датчиков случайных чисел). Однако вряд ли можно рассчитывать на то, что нам будет известен вид корреляционной функции $R(x, y)$, определяющей форму асимптотически оптимального теста (т. е. систему функций g_j и чисел λ_j). Поэтому желательно получить критерии, по возможности не зависящие от предельного распределения Q (так же как это было в теореме 3).

Итак, рассмотрим следующую задачу. Пусть задана некоторая конечная система ортонормированных функций $\{g_1, \ldots, g_k\}$ (вообще говоря, никак не связанная с корреляционной функцией $R(x, y)$), относительно которой известно (гипотеза H), что

$$\mathbf{M}\sum_{j=1}^{k}(\gamma, g_j)^2 \geqslant \Lambda > 0. \tag{13}$$

Это означает, что мы заранее знаем, что γ содержит «гармоники» $g_1, \ldots, g_k$ и суммарная «мощность» проекции γ на подпространство, натянутое на $g_1, \ldots, g_k$, не меньше чем Λ. В остальном распределение процесса γ произвольно.

Дополним $\{g_1, \ldots, g_k\}$ до системы, удовлетворяющей (4), и обозначим через Ψ^α класс всех последовательностей критериев $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющих при некотором $\psi(y)=\psi(y, \{\varphi_n\})$ условиям (8), (9) и $\alpha(\psi)=\alpha$. Из теоремы 2 следует, что для любой $\{\varphi_n\} \in \Psi^\alpha$ справедливо

$$\alpha_n(\varphi_n) \to \alpha \text{ и } \beta_n(\varphi_n) \to \beta(\psi) = \beta(\psi(\cdot, \{\varphi_n\}), Q)$$

(относительно обозначений см. теорему 1).

В сделанных предположениях справедлива

Теорема 4. *В классе Ψ^α асимптотически минимаксным критерием для проверки гипотезы H_0 против H является критерий $\psi^*\left(G_n^{(k)}\right)$, где $\psi^*(y)$ есть индикатор множества $\{\|y^{(k)}\| > c_\alpha\}$, а c_α есть решение уравнения* (11).

Асимптотическая минимаксность понимается здесь как точная минимаксность для предельных вероятностей ошибок второго рода

$$\sup_Q [1-\beta(\psi^*, Q)] = \min_\psi \sup_Q [1-\beta(\psi, Q)],$$

где супремум берется по всем распределениям Q, удовлетворяющим (13), а минимум — по всем ψ с $\alpha(\psi)=\alpha$. Мы видим, что критерий (12) оказывается оправданным и в новых условиях. Утверждение теоремы 4 будет вытекать из теоремы 2 и приводимой ниже теоремы 5.

Пусть, как и в теореме 1, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ — независимые последовательности, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение и $\zeta^{(k)}=(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, 0, 0, \ldots)$. Обозначим через $\mathscr{T}$ множество всех ортонормированных преобразований в R^k, и пусть $T\zeta$ — вектор, первые k координат которого получены применением преобразования T к первым k координатам ζ, а все последующие координаты заменены нулями, так что $T\zeta=(T\zeta)^{(k)}=T(\zeta^{(k)})$.

Предположим, что нам задано некоторое множество $\mathscr{F}$ распределений Q_ζ последовательности ζ, обладающее следующим свойством:

$$\text{если } Q_\zeta \in \mathscr{F}, \text{ то } Q_{T\zeta} \in \mathscr{F} \quad \forall T \in \mathscr{T}. \tag{14}$$

Требуется по Y — выборке единичного объема из распределения, соответствующего $\xi+\zeta$ —, проверить гипотезу $H^0=\{\zeta=0\}$ против $H=\{Q_\zeta \in \mathscr{F}\}$. Как и прежде, обозначим $\alpha(\psi)=\mathbf{M}\psi(\xi)$ и $\beta(\psi, Q_\zeta)=\mathbf{M}\psi(\xi+\zeta)$ уровень значимости и соответственно мощность критерия ψ при фиксированном распределении Q_ζ при альтернативе H.

Теорема 5. *Определенный в теореме 4 критерий ψ^* является минимаксным (минимизирующим максимальную возможную ошибку второго рода) среди критериев уровня α:*

$$\inf_{\mathscr{F}} \beta(\psi^*, Q_\zeta) = \max \inf_{\mathscr{F}} \beta(\psi, Q_\zeta),$$

где максимум берется по всем ψ таким, что $\alpha(\psi)=\alpha$.

Из этого утверждения вытекает, что теорема 4 будет справедлива и в том случае, если гипотеза H состоит в выполнении (13) не во всем классе распределений γ, а лишь в некотором подклассе, выдерживающем вращение [см. (14)], например в классе всех гауссовских распределений.

Доказательство теоремы 5. Из соотношения

$$\inf_{\mathscr{F}} \beta(\psi(y), Q_\zeta) \leqslant \inf_{\mathscr{F}} \beta\left(\psi(y), Q_{\zeta^{(k)}}\right) = \inf_{\mathscr{F}} \beta\left(\psi\left(y^{(k)}\right), Q_\zeta\right)$$

вытекает, что мы можем ограничиться критериями, зависящими лишь от $y^{(k)}$. Далее, из результатов раздела 3 главы 8 в [6] следует, что минимаксный критерий необходимо искать среди критериев, инвариантных относительно группы преобразований $\mathcal{T}$, поскольку в силу (14) и одинаковой распределенности $\xi^{(k)}$ и $T\xi^{(k)}$, гипотезы H_0 и H инвариантны относительно $\mathcal{T}$. Однако среди инвариантных критериев критерий ψ^* обладает даже более сильным свойством, чем минимаксность,— он является равномерно наиболее мощным (см. [6], с. 415, при $r=s=q=k$). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда известно, что носитель распределения Q отделен от нуля гиперплоскостью. Фиксируем $\alpha\in(0, 1)$ и для любого $\theta\in l_2$, $\theta\neq 0$, обозначим, через ψ_θ критерий, совпадающий с индикатором множества $(y, \theta)>c_\alpha\|\theta\|$, где c_α — решение уравнения

$$\Phi_0(c_\alpha)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{c_\alpha}^{\infty}\exp(-t^2/2)\,dt=\alpha. \qquad (15)$$

Обозначим δ_ζ вероятностную меру, сосредоточенную в точке $\zeta\in l_2$. В этом случае из пункта II теоремы 1 следует, что

$$\beta(\psi_\theta, \delta_\zeta)=\Phi_0(c_\alpha-(\zeta, \theta)/\|\theta\|). \qquad (16)$$

Пусть Γ — замкнутое выпуклое множество в l_2, не содержащее нуля, а $\mathcal{F}$ — множество всех распределений на Γ. В этом случае существует очень простой минимаксный критерий для различения по выборке Y из распределения $\xi+\zeta$ гипотез $H^0=\{\zeta=0\}$ и $H=\{Q_\zeta\in\mathcal{F}\}$.

Теорема 6. *Пусть θ^* — ближайшая к нулю точка из Γ. Тогда критерий ψ_{θ^*} является минимаксным критерием уровня α, т. е.*

$$\inf_{\mathcal{F}}\beta(\psi_{\theta^*}, Q_\zeta)=\max\inf_{\mathcal{F}}\beta(\psi, Q_\zeta), \qquad (17)$$

где максимум берется по всем ψ таким, что $\alpha(\psi)=\alpha$.

Доказательство. Заметим, что критерий ψ_{θ^*} обладает следующими двумя свойствами: он является наиболее мощным при проверке гипотезы $H^0=\{\zeta=0\}$ против альтернативы $H^*=\{\zeta=\theta^*\}$ и $\min\limits_{\zeta\in\Gamma}\beta(\psi_{\theta^*}, \delta_\zeta)=\beta(\psi_{\theta^*}, \delta_{\theta^*})$. Следовательно, в силу теоремы 1 на с. 446 в [6], распределение на $\mathcal{F}$, приписывающее единичную массу точке δ_{θ^*}, является наименее благоприятным, а критерий ψ_{θ^*} — минимаксным среди критериев уровня α.

Замечания. 1. Пусть $\Gamma_0=\Gamma\cup\{\zeta:-\zeta\in\Gamma\}$, а $\mathcal{F}_0$ есть множество распределений на Γ_0. Тогда критерий, совпадающий с индикатором множества $|(y, \theta^*)|>c_{\alpha/2}\|\theta^*\|$, является минимаксным среди всех критериев уровня α. Для доказательства достаточно заметить, что наименее благоприятным будет распределение, приписывающее равные массы точкам δ_{θ^*} и $\delta_{-\theta^*}$.

2. Если Γ — произвольное множество, то определим θ^* как ближайшую к нулю точку в замыкании выпуклой оболочки $\overline{\Gamma}$ множества Γ и предположим, что $\overline{\Gamma}$ не содержит нуля. В этом случае ψ_{θ^*} является минимаксным среди линейных критериев уровня α, т. е. (17) выполняется, когда максимум берется по всем ψ вида ψ_θ. В силу (16) достаточно доказать, что

$$\inf_{\zeta\in\Gamma}(\zeta, \theta^*)/\|\theta^*\|=\|\theta^*\|=\max_{\theta}\inf_{\zeta\in\Gamma}(\zeta, \theta)/\|\theta\|.$$

Последнее соотношение следует из того факта, что гиперплоскость $(y, \theta^*)=\|\theta^*\|^2$ является касательной к множеству Γ и отделяет его от нуля, а для любой другой гиперплоскости вида $(y, \theta)=\|\theta\|^2$ с этими свойствами имеем $\|\theta\|\leqslant\|\theta^*\|$.

3. Если определенная в замечании 2 точка θ^* не принадлежит Γ, то критерий ψ_{θ^*} может не быть минимаксным в классе всех критериев уровня α. Действительно, пусть Γ состоит из двух точек: $a = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ и $b = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$. Тогда $\theta^* = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots) \notin \Gamma$. Легко видеть, что в этом случае наименее благоприятное распределение на $\mathscr{F}$ приписывает равные вероятности точкам δ_a и δ_b, а потому в силу леммы Неймана — Пирсона наиболее мощный критерий уровня α совпадает с индикатором множества вида

$$c_\alpha < \frac{(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-(y_1-1)^2/2-(y_2-1)^2/2\right]+(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-(y_1-1)^2/2-(y_2+2)^2/2\right]}{2(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-y_1^2/2-y_2^2/2\right]} = $$

$$= 2^{-1}e^{-1}e^{y_1}\left(e^{y_2}+e^{-y_2}\right).$$

Аналогично предыдущему можно заметить, что критерий $\psi_{\theta^*}(G_n)$ является асимптотически минимаксным в классе критериев Ψ^α, где асимптотическая минимаксность понимается, как в теореме 4. Полагая $g^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j^* g_j(x)$, критерий $\psi_{\theta^*}(G_n)$ можно представить как индикатор множества

$$\left\{X_n : n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} g^*(x_{ni}) > c_\alpha \| g^* \|\right\},$$

где c_α определяется в (15).

В заключение рассмотрим одно приложение теоремы к задачам распознавания образов. Допустим, что требуется проверить гипотезу H^0 против гипотезы H_{γ_0}, где плотность $1 + n^{-1/2}\gamma_0(x)$ неизвестна и оценивается с помощью отдельной выборки объема m. Пользуясь известными оценками для плотности, можно получить оценку $\tilde{\gamma}_m(x)$ для $\gamma_0(x)$ и построить для γ_0 «доверительный шар» Γ_m в L_2 некоторого радиуса ε с центром в точке $\tilde{\gamma}_m$. Считая, что $\|\tilde{\gamma}_m\| > \varepsilon$ и $\gamma_0 \in \Gamma_m$, и применяя теорему, получим $g^* = \tilde{\gamma}_m(1 - \varepsilon/\|\tilde{\gamma}_m\|)$, так что асимптотически оптимальный в указанном выше смысле критерий будет иметь вид

$$\left\{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\gamma}_m(x_{ni}) > c\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chibisov D. M.** Transition to the limiting process for deriving asymptotically optimal tests.— Sankhya, 1969, v. A31, N 3, p. 241—258.
2. **Лоэв М.** Теория вероятностей.— М.: ИЛ, 1962. 720 с.
3. **Schay G.** Nearest random variables with given distributions.— Ann. Probability, 1974, v. 2, N 1, p. 163—166.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
5. **Боровков А. А.** Асимптотически оптимальные тесты для проверки сложных гипотез.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XX, № 3, с. 463—487.
6. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.

ОБ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ОТ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $\mathscr{R}$ — линейное пространство конечных мер μ, заданных на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}$ некоторого метрического пространства X, $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$ — класс вероятностных мер на $\mathscr{B}$. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$,