cess expectations for large time. I.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 27. p. 1—47.
4. **Гертнер Ю.** Большие уклонения от инвариантной меры.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, № 1, с. 27—42.
5. **Groenboom P., Oosterhoff J., Ruymgart F. H.** Large deviation theorems for empirical probability measures. Preprint. Amsterdam, Mathematical Centre, 1976.
6. **Дуб Дж.** Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
7. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. **Дынкин Е. Б.** Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Varadhan S. R. S.** Asymptotic probabilities and differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, N 3, p. 261—286.

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. А. ТОПЧИЙ

1. Введение

В работе рассматриваются зависящие от возраста ветвящиеся процессы (процессы Беллмана — Харриса) с дискретным временем $\xi(n)$, $n = 0, 1, \ldots$ Случайные величины $\xi(n)$ принимают целочисленные значения, которые будем интерпретировать как размер популяции в момент времени n. Описание данных процессов см. в [1] или в [2] (модель 3).

Пусть процесс $\xi(n)$ определяется целочисленными случайными величинами η (продолжительность жизни частиц) с функцией распределения $F(k) = \mathbf{P}\{\eta \leqslant k\}$ (возможно $F(0) \neq 0$ и ζ (число потомков) с производящей функцией $h(z) = \sum h_k z^k$.

Введем обозначения: $P_n(z) = \mathbf{M}z^{\xi(n)}$; $p_{nk} = \mathbf{P}\{\xi(n) = k\}$; $Q_n(z) = 1 - P_n(z)$; $P_n = P_n(0)$; $Q_n = Q_n(0)$. Далее положим $A = h'(1)$; $B = h''(1)$; $\mu = \mathbf{M}\eta$; $\mu_k = \mathbf{M}\eta^k$; $\alpha = B/2\mu$; $f_k = F(k) - F(k-0)$; $q_k = \sum\limits_{j=k+1} f_j$; $f(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k u^k$. Будем рассматривать критический случай, т. е. $A = 1$. Из результатов Б. А. Севастьянова [3] следует, что для вероятности продолжения процесса выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} Q_n n = 1/\alpha \tag{1}$$

(при условии конечности третьих моментов у η и ζ). Однако, как показано М. И. Гольдштейном [4], для справедливости (1) достаточно существования второго момента у ζ и выполнения условий $k^2[1 - F(k)] \to 0$ при $k \to \infty$ и $F(0) = 0$ (от последнего условия легко избавиться). Отметим, что используемый в данной статье метод позволяет дать другое доказательство результата Гольдштейна (в том числе и для процессов с произвольным распределением времени жизни частиц).

В 1966 г. Кестеном, Неем и Спицером [5] для процессов Гальтона — Ватсона (последние совпадают с процессами Беллмана — Харриса при $\mathbf{P}\{\eta = 1\} = 1$) была доказана

Теорема 0. *Пусть $\xi(n)$ — процесс Гальтона — Ватсона; $A = 1$, $B > 0$, $\mathbf{M}\zeta^2 \ln \zeta < \infty$ и наибольший общий делитель (н. о. д.) s таких, что $h_s \neq 0$, равен d, тогда для любой константы $0 < c < \infty$*

$$\lim_{\substack{k,n\to\infty \\ k/n<c}} n^2 e^{kd/n\alpha} p_{nkd} = d/\alpha^2. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\sup_{k,n\geqslant 1} n^2 p_{nk} < \infty. \tag{3}$$

Одновременно с работой [5] появилась статья С. В. Нагаева и Р. Мухамедхановой [6]. В ней доказывается аналогичный результат, но при более ограничительных предположениях, которые существенно упрощают доказательство.

Для упрощения формулировки основного результата, доказываемого далее, введем следующее условие:

а) $\xi(n)$ не является процессом Гальтона — Ватсона или к нему сводящимся путем уменьшения масштаба времени с $d \neq 1$.

Теорема 1. *Пусть* $A = 1$, $B > 0$, $\mathrm{M}\zeta^2 \ln \zeta < \infty$, $\mu_3 < \infty$ *и выполняется условие* «а». *Тогда для любого* $0 < c < \infty$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{k,n\to\infty \\ k/n<c}} n^2 e^{k/n\alpha} p_{nk} = 1/\alpha^2. \tag{4}$$

и верна оценка (3).

При доказательстве теоремы в дополнение к условию «а» будем предполагать, что:

б) н. о. д. таких k, что $f_k \neq 0$, равен 1;

в) $F(0) = 0$.

Заметим, что формулировка теоремы 1 инвариантна относительно d, определенного в теореме 0. Если условие «а» не выполнено, то можно воспользоваться редукцией случая $d \neq 1$ к случаю $d = 1$, проводимой в [5], и из теоремы 1 получаем теорему 0. От условия «б» легко избавиться переопределением масштаба времени.

Для процессов с $F(0) \neq 0$ можно построить последовательность критических одинаково распределенных процессов с $F(0) = 0$, сумма случайного числа которых имеет те же конечномерные распределения, что и первоначальный. Этого, оказывается, достаточно для доказательства теоремы 1 в общем случае, если она доказана при условии «в».

Конкретизируем последнее. Определим последовательность независимых процессов Беллмана — Харриса $\xi_i(t)$ функцией распределения продолжительности жизни частиц $F^*(k) = (F(k) - F(0))(1 - F(0))^{-1}$ и производящей функцией числа потомков одной частицы $h^*(z) = h(P_0(z))$, где $P_0(z)$ находится из уравнения $P_0(z) = h(P_0(z))F(0) + (1 - F(0))z$.

Пусть ν — случайная величина с производящей функцией $P_0(z)$. Тогда $\xi(n)$ можно представить в виде $\xi(n) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(n)$.

Подробного доказательства для случая, когда условия «б» и «в» нарушены, проводить не будем, а ограничимся только что приведенными соображениями по поводу последнего. Теперь сделаем некоторые замечания о методе доказательства.

Доказательство локальной предельной теоремы для процессов Гальтона — Ватсона в [5] основано на изучении асимптотического поведения $P_n(x)$ при действительных x. В отличие от этой работы мы будем опираться на асимптотический анализ поведения последовательности $P_n(z)$ на единичной окружности комплексной области (аналогичный подход для процессов Гальтона — Ватсона использован в [6]). Исследование $P_n(z)$ на единичной окружности комплексной плоскости для процессов Беллмана — Харриса, по-видимому, ранее не проводилось. Основную трудность при этом представляет оценка для $|Q_n(z)|$ снизу.

Как известно [1, гл. 6], при $|z| \leqslant 1$ $P_n(z)$ является единичным решением системы уравнений

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} h(P_{n-k}(z)) f_k + z q_n, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{5}$$

На основании этой системы в работе С. В. Нагаева [7] получено представление для $Q_n(z)$, которое в нашем случае имеет вид

$$Q_n(z) = (1-z) + \sum_{k=0}^{n} (1 - h(P_{n-k}(z)) - Q_{n-k}(z))\, u_k \qquad (6)$$

(его выведем в разд. 2; там же определим числа u_k). Данное представление — отправной пункт доказательства.

Отметим, что при конечности четырех моментов у η и ζ доказательство можно было бы несколько упростить и существенно сократить за счет исследований, проводимых в [6].

Обратим внимание читателя на факты, которые в дальнейшем неоднократно используются без специальных оговорок.

Под z будем подразумевать комплексный аргумент, причем $|z| \leqslant 1$. Все функции от z аналитичны в области $|z| < 1$ и непрерывны вплоть до границы. Поэтому если $\varphi(z) = \sum\limits_0^\infty c_k z^k$ при $|z| < 1$ и равномерно ограничена, то $\varphi(e^{it}) = \sum\limits_0^\infty c_k e^{itk}$ (т. е. ее можно рассматривать как ряд Фурье на $|z| = 1$).

Для любой функции $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_k z^k$ определим линейный функционал $C_k(\varphi(z)) = a_k$ и норму $\|\varphi(z)\| = \sum\limits_0^\infty |a_k|$. Если $\|\varphi(z)\| < \infty$, то запишем $\varphi(z) \in l_1$.

В дальнейшем будут встречаться выражения $(n\alpha + 1/(1-z))^{-1}$ и $Q_n(z)(n\alpha + 1/(1-z))$, которые при $z = 1$ положим равными 0 и 1 соответственно, что в силу $Q_n'(1) = -1$ (см. [2]) является доопределением функций по непрерывности.

2. Вспомогательные результаты

Выведем (6). Из (5) следует

$$Q_k(z) = (1-z)\, q_k + \sum_{j=1}^{k} (1 - h(P_{k-j}(z)))\, f_j. \qquad (7)$$

Положим

$$q(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z)\, u^k. \qquad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) вытекает

$$q(z, u) = \frac{1 - f(u)}{1 - u}(1 - z) + q(z, u) f(u) + \varphi(z, u) f(u), \qquad (9)$$

где $\varphi(z, u) = \sum\limits_0^\infty [1 - h(P_k(z)) - Q_k(z)]\, u^k$.

Из (9) выводим тождество

$$q(z, u) = \frac{1 - z}{1 - u} + \frac{\varphi(z, u) f(u)}{1 - f(u)}. \qquad (10)$$

Выписывая коэффициенты при u^k в (10) и обозначая $u_k = C_k\left(\frac{f(z)}{1 - f(z)}\right)$, получаем

$$Q_n(z) = (1 - z) + \sum_{k=0}^{n} (1 - h(P_{n-k}(z)) - Q_{n-k}(z))\, u_k. \qquad (11)$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки u_k. Ввиду особой важности запишем их в форме теоремы. Предварительно заметим, что $\frac{f(z)}{1-f(z)} = \frac{1}{1-f(z)} - 1$.

Теорема 2. *Пусть $f^{(s)}(1) < \infty$ при $s \geqslant 2$ и выполнено условие «б» из раздела 1. Тогда*

$$u_k - u_{k-1} = 0(k^{-s}) \tag{12}$$

и

$$u_k - 1/\mu = 0(k^{-s+1}). \tag{13}$$

Кроме того, при $s = 3$

$$\Sigma k^2 |u_k - u_{k+1}| < \infty. \tag{14}$$

Введем еще одно обозначение: $b_k = u_k - 1/\mu$.

Следствие. *При $f'''(1) < \infty$*

$$\Sigma |b_k| < \infty \tag{15}$$

и

$$\Sigma k |b_k| < \infty. \tag{16}$$

Оценки (12) и (13) являются следствием теоремы 1 из статьи Б. А. Рогозина [8] (в ней указаны и более ранние работы, из которых также можно получить эти оценки).

Отметим эквивалентность (8) и условия

$$\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)'' \in l_1. \tag{17}$$

Из (12) следует, что

$$\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)' = \sum_1^\infty (b_k - b_{k-1})\, k z^{k-1} \in l_1. \tag{18}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)' = -\frac{1}{1-f(z)} + \frac{(1-z)\, f'(z)}{(1-f(z))^2} \tag{19}$$

и

$$\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)'' = -\frac{2f'(z)}{(1-f(z))^2} + \frac{(1-z)\, f''(z)}{(1-f(z))^2} + \frac{2(1-z)(f'(z))^2}{(1-f(z))^3}. \tag{20}$$

Из (20), (19), (18) и соотношения $\frac{f''(z)(1-z)}{1-f(z)} \in l_1$, которое верно в силу условий теоремы 2 и (12), следует, что (17) справедливо, если

$$-\frac{2f'(z)}{(1-f(z))^2} + \frac{f''(z)\, f'(z)(1-z)^2}{(1-f(z))^3} + \frac{2(1-z)(f'(z))^2}{(1-f(z))^3} \in l_1. \tag{21}$$

Легко вычислить, что

$$\left\| \frac{-2(1-f(z)) + 2f'(z)(1-z) + f''(z)(1-z)^2}{(1-z)^3} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{2\sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k \sum\limits_{i=0}^{k-2} z^i \sum\limits_{j=0}^{k-i-2} (z^{k-i-2} - z^j)}{1-z} \right\| = 0(\Sigma f_k k^3) < \infty.$$

Из полученной оценки ввиду соотношения $\frac{f'(z)(1-z)^3}{(1-f(z))^3} \in l_1$, которое справедливо в силу условий теоремы 2 и (12), следует (21), а следовательно, и (17). Теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству следствия. Соотношение (15) немедленно вытекает из (13). Неравенство (10) будет доказано, если мы установим, что

$$\left(\frac{1}{1-f(z)}-\frac{1}{\mu(1-z)}\right)'=\left(\frac{\mu(1-z)-(1-f(z))}{\mu(1-z)(1-f(z))}\right)'\in l_1.$$

Последнее следует из очевидных соотношений

$$\left(\frac{1-z}{1-f(z)}\right)'\in l_1$$

и

$$\frac{\mu(1-z)-(1-f(z))}{(1-z)^2}=\sum_{k=2}^{\infty}f_k\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1}z^j,$$

а также условия $f'''(1)<\infty$. Следствие доказано.

3. Представление для $Q_n(z)$ и $Q_n(z)-Q_n$

Всюду в данном разделе предполагаем, что

$$\mathrm{M}\eta^3<\infty \text{ и } \mathrm{M}\zeta^2\ln\zeta<\infty. \tag{22}$$

Положим $N=[n/2]$, $\sum\limits_a^b=\sum\limits_{[a]}^{[b]}$, если a или b — нецелые, и, наконец,

$$p_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h_k k^3+\sum_{n+1}^{\infty}h_k k^2,$$

где $h_k=\mathrm{C}_k(h(z))$, $p_0=1$.

В дальнейшем будем писать $\omega_n(z)=\tilde{O}(\varphi_n)$, если $\exists\, c_1<\infty$ такое, что $\forall n\|\omega_n(z)/\varphi_n\|\leqslant c_1$. Если для $\omega_n(z)$ существует $\bar{c}_1$ такое, что $\forall n|\omega_n(z)/\varphi_n|<\bar{c}_1(|\omega_n(z)/\varphi_n|\to O$ при $n\to\infty)$ равномерно по $|z|<1$, то будем писать $\omega_n(z)=O_n(\varphi_n)=O(\varphi_n)$ $(\omega_n(z)=o_n(\varphi_n)=o(\varphi_n))$. Функция φ_n может зависеть и от z.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$Q_n(z)=Q_{n-1}(z)-\alpha Q_{n-1}^2(z)+\frac{\tilde{O}(p_{n-1})}{(\alpha(n-1)+1/(1-z))^2}. \tag{23}$$

Доказательство. Сначала исследуем свойства p_n. Для любых $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2<\infty$ существует $c_{\alpha_1\alpha_2}$ такое, что для произвольных n_1 и n, удовлетворяющих условию $\alpha_1 n\leqslant n_1\leqslant\alpha_2 n$, справедливо неравенство

$$p_n/p_{n_1}\leqslant c_{\alpha_1\alpha_2}. \tag{24}$$

Кроме того, выполняются соотношения

$$p_n=o_n(1) \text{ и } 1/(n+1)=O(p_n). \tag{25}$$

В самом деле, при $n\leqslant n_1$

$$p_n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}h_k k^3+\sum_{n+1}^{\infty}h_k k^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}h_k k^3+\sum_{n_1+1}^{\infty}h_k k^2\leqslant$$

$$\leqslant(\alpha_2+1)\left[\frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n_1}h_k k^3+\sum_{n_1+1}^{\infty}h_k k^2\right]=(\alpha_2+1)\,p_{n_1},$$

а при $n>n_1$

$$p_n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}h_k k^3+\sum_{n+1}^{\infty}h_k k^2\leqslant\frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n}h_k k^3+\sum_{n+1}^{\infty}h_k k^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1}^{n_1}h_k k^3+\sum_{n_1+1}^{n}h_k k^2\frac{n}{n_1}+\sum_{n+1}^{\infty}h_k k^2\leqslant(1+\alpha_1^{-1})\times$$

$$\times\left(\frac{1}{n_1}\sum_1^{n_1} h_k k^3+\sum_{n_1+1}^{\infty} h_k k^2\right)=\left(1+\alpha_1^{-1}\right) p_{n_1}.$$

То, что $p_n \to 0$ при $n \to \infty$, следует из $\sum\limits_1^{\infty} h_k k^2<\infty$ и оценки

$$\frac{1}{n}\sum_1^n h_k k^3=\frac{1}{n}\sum_1^{\sqrt{n}-1} h_k k^3+\frac{1}{n}\sum_{\sqrt{n}}^{n} h_k k^3 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^{\infty} h_k k^2+\sum_{\sqrt{n}}^{n} h_k k^2.$$

Оценка $1/(n+1)=O(p_n)$ очевидна в силу определения p_n.

По определению $h(z)$ и $P_n(z)$, получаем

$$\frac{1-h\left(P_n(z)\right)-Q_n(z)+\frac{B}{2} Q_n^2(z)}{Q_n^2(z)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \sum\limits_0^{k-1} P_n^i(z)-1+\frac{B}{2} Q_n(z)}{Q_n(z)}=$$

$$=B/2-\sum_{k=2}^{\infty} h_k \sum_1^{k-1} \sum_0^{i-1} P_n^j(z)=\frac{B}{2}-\sum_{k=2}^{\infty} h_k \sum_0^{k-2}(k-j-1) P_n^j(z)=$$

$$=\sum_{k=2}^n h_k\left(\frac{k(k-1)}{2}-\sum_{j=0}^{k-2}(k-j-1) P_n^j(z)\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k\left(\frac{k(k-1)}{2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{k-2} P_n^j(z) \cdot(k-j-1)\right)=\sum_{k=2}^n h_k \sum_{j=0}^{k-2}(k-j-1) \sum_{i=0}^{j-1} P_n^i(z)\left(1-P_n(z)\right)+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k\left(\frac{k(k-1)}{2}-\sum_{j=0}^{k-2}(k-j-1) P_n^j(z)\right).$$

В силу того, что $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k$, $p_{nk} \geqslant 0$, $P_n(1)=1$ и выполняется (1),

$$Q_n(z)=\widetilde{O}\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{25a}$$

Эти факты совместно с очевидным равенством $P_n(z)=\widetilde{O}(1)$ влекут за собой

$$1-h\left(P_n(z)\right)-Q_n(z)+\frac{B}{2} Q_n^2(z)=Q_n^2(z) \cdot \widetilde{O}\left(\sum_{k=2}^n h_k \frac{k^3}{n}+\sum_{n+1}^{\infty} h_k k^2\right)= \tag{26}$$

$$=Q_n^2(z) \widetilde{O}(p_n).$$

Так как $Q_n(1)=Q_n(0)-\sum\limits_1^{\infty} p_{nk}=0$ и $P_n(1)=1$ (см. [7] или [8]), то из (1) следует, что существует $c_2<\infty$ такое, что

$$\left\|Q_n(z)\left(n\alpha+(1-z)^{-1}\right)\right\|=\left\|\left(Q_n(0)-\sum_1^{\infty} p_{nk} z^k\right) n\alpha+\right.$$

$$\left.+(1-z)^{-1} \sum_1^{\infty} p_{nk}\left(1-z^k\right)\right\| \leqslant c_2. \tag{27}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\left\|\frac{n\alpha+(1-z)^{-1}}{k\alpha+(1-z)^{-1}}\right\|=\left\|1+\frac{(n-k)\alpha}{\alpha k+(1-z)^{-1}}\right\|=\left\|1+\frac{(n-k)\alpha(1-z)}{(\alpha k+1)\left(1-\alpha k z(\alpha k+1)^{-1}\right)}\right\|=$$

$$=\left\|1+\frac{(n-k)\alpha}{\alpha k+1}\left(1-\sum_0^{\infty} \frac{(\alpha k)^i z^{i+1}}{(\alpha k+1)^{i+1}}\right)\right\|=\frac{\alpha n+1}{\alpha k+1}+\frac{|n-k|\alpha}{\alpha k+1}. \tag{28}$$

Взяв представление (11) для $Q_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$, легко найти, что

$$Q_{n-1}(z)-Q_n(z)=-(1-h(P_n(z))-Q_n(z))/\mu+\sum_{k=0}^{N}[h(P_{n-k}(z))+$$
$$+Q_{n-k}(z)-h(P_{n-k-1}(z))-Q_{n-k-1}(z)]\,b_k-\sum_{k=N+2}^{n}[1-h(P_{n-k}(z))-$$
$$-Q_{n-k}(z)](b_k-b_{k-1})-b_{N+1}[1-h(P_{n-N-1}(z))-Q_{n-N-1}(z)]. \tag{29}$$

Отсюда с помощью (26) получаем оценку

$$Q_{n-1}(z)-Q_n(z)=\alpha Q_n^2(z)+\sum_{k=0}^{N}\frac{B}{2}\left(Q_{n-k}^2(z)-Q_{n-k-1}^2(z)\right)b_k+$$
$$+\sum_{k=N+2}^{n}\frac{B}{2}Q_{n-k}^2(z)(b_k-b_{k-1})+b_{N+1}Q_{n-N-1}^2(z)+Q_n^2(z)\widetilde{O}(p_n)+$$
$$+\sum_{k=0}^{N}\left[Q_{n-k}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-k})+Q_{n-k-1}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-k-1})\right]b_k+$$
$$+\sum_{k=N+2}^{n}Q_{n-k}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-k})(b_k-b_{k-1})+b_{N+1}Q_{n-N-1}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-N-1}). \tag{30}$$

Оценки (12), (27) и (28) позволяют установить, что

$$\left\|\sum_{k=N+2}^{N}(n\alpha+(1-z)^{-1})^2\frac{B}{2}Q_{n-k}^2(z)(b_k-b_{k-1})\right\|=$$
$$=O\left(\sum_{k=N+2}^{N}\left\|\frac{n\alpha+(1-z)^{-1}}{(n-k)\alpha+(1-z)^{-1}}\right\|^2\frac{1}{n^3}\right)=O\left(\sum_{k=N+2}^{n}\frac{n^{-1}}{(n-k+1)^2}\right)=O(1/n). \tag{31}$$

Аналогично оценки (15), (24), (27) и (28) влекут за собой

$$\sum_{k=0}^{N}\left[Q_{n-k}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-k})+Q_{n-k-1}^2(z)\widetilde{O}(p_{n-k-1})\right]b_k=$$
$$=\left(n\alpha+\frac{1}{1-z}\right)^{-2}\sum_{k=0}^{N}\widetilde{O}(p_n)\,b_k=\frac{\widetilde{O}(p_n)}{(n\alpha+1/(1-z)^2}. \tag{32}$$

Из (13) и (27) следует

$$b_{N+1}Q_{n-N-1}^2=\frac{\widetilde{O}(n^{-2})}{(n\alpha+1/(1-z))^2}. \tag{33}$$

С учетом соотношения (25) представление (30) с помощью оценок (27), (31)—(33) приводится к виду

$$Q_{n-1}(z)-Q_n(z)=\alpha Q_n^2(z)+\sum_{k=0}^{N}\frac{B}{2}\left(Q_{n-k}^2(z)-\right.$$
$$\left.-Q_{n-k-1}^2(z)\right)b_k+\frac{\widetilde{O}(p_n)}{(\alpha n+1/(1-z))^2}. \tag{34}$$

Умножая (34) на $Q_{n-1}(z)+Q_n(z)$ и применяя к правой части полученного равенства оценки (15), (27) и (28), получаем

$$Q_{n-1}^2(z)-Q_n^2(z)=\frac{1}{(n\alpha+1/(1-z))^3}\widetilde{O}(1). \tag{35}$$

Равенство (35) с учетом оценок (28) и (15) позволяет заключить, что

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{B}{2}\left(Q^2_{n-k}(z)-Q^2_{n-k-1}(z)\right)b_k=\sum_{k=0}^{N}\frac{\widetilde{O}(1)}{((n-k)\alpha+(1-z)^{-1})^3}b_k=$$

$$=\frac{\widetilde{O}(1)}{(n\alpha+(1-z)^{-1})^3}\sum|b_k|=\frac{\widetilde{O}(1)}{(n\alpha+(1-z)^{-1})^3}. \qquad (36)$$

Заметим, что по аналогии с (28)

$$\left\|\frac{1}{n\alpha+(1-z)^{-1}}\right\|=\frac{1}{n\alpha+1}\left\|1-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha n)^i z^{i+1}}{(\alpha n+1)^{i+1}}\right\|=\frac{2}{1+n\alpha}. \qquad (37)$$

Из (34), (36), (37) и (25) получаем

$$Q_{n-1}(z)-Q_n(z)=\alpha Q^2_n(z)+\frac{1}{(\alpha n+1/(1-z))^2}\widetilde{O}(p_n),$$

что в силу (35), (37) и (25) и представляет утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $x'\geqslant x\geqslant 0$, $D_n(x',\ x)=D_n=P_n(x')-P_n(x)$. *Тогда существует постоянная* $d>0$ *такая, что* $\forall n$

$$D_n\geqslant d\frac{x'-x}{(n+1)^2}. \qquad (38)$$

Прежде чем приступать к доказательству леммы 2, приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть при* $n\geqslant m_0$ существует постоянная $c_3>0$ такая, что при $|z|\leqslant 1$ выполнено $|(Q_n(z)(n\alpha+(1-z)^{-1}))^{-1}|<c_3$. Тогда

$$Q_n(z)=\frac{1+O(\bar{p}_n)}{\alpha n+1/(1-z)}, \qquad (39)$$

где $\bar{p}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любого фиксированного k

$$Q_k^{-1}(z)=1/(1-z)+\widetilde{O}(1), \qquad (40)$$

если $P_k(z)\neq 1$ при $z\neq 1$ и $|z|\leqslant 1$ (это условие выполнено при $k\geqslant m_0$).

В самом деле,

$$\frac{1}{Q_k(z)}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-z)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{kn}\sum\limits_{0}^{n-1}z^i\right)}-\frac{1}{1-z}=\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}p_{kn}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{i-1}z^j}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{kn}\sum\limits_{0}^{n-1}z^i}.$$

Числитель и знаменатель в правой части последнего равенства принадлежат l_1 (так как $P''_n(1)<\infty$, см. [2, с. 295]).

Поскольку $P_k(z)\neq 1$ (при $z\neq 1$), то

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{kn}\sum_{0}^{n-1}z^i=\frac{1-P_k(z)}{1-z}\neq 0,$$

следовательно, по теореме Винера (см. [9, с. 331]) при $|z|=1$ $Q_n^{-1}(z)-1/(1-z)\in l_1$.

Это и доказывает (40).

Введем обозначение: $L_n=Q_n^{-1}(z)$.

Из леммы 1 и условий леммы 3 при $n>m_0$ получаем выражение

$$L_n=L_{n-1}\left[1-\alpha Q_{n-1}(z)+\frac{O(p_{n-1})}{\alpha(n-1)+1/(1-z)}\right]^{-1},$$

которое в силу (25), (27), (37) и условий леммы приводится к виду

$$L_n = L_{n-1}(1 + \alpha Q_{n-1}(z) + (n\alpha + (1-z)^{-1})^{-1} O(p_{n-1})) = \\ = L_{n-1} + \alpha + O(p_{n-1}).$$

Просуммировав по n полученные равенства, имеем

$$L_k = L_{m_0} + \alpha(k - m_0) + O\left(\sum_{i=m_0+1}^{k} O(p_{i-1})\right). \tag{41}$$

Легко вычислить, что

$$\sum_1^n p_i \sim \sum_{i=1}^{n} (1 + \ln n - \ln i)\, i^3 h_i + n \sum_{n+1}^{\infty} i^2 h_i.$$

Последнее позволяет записать:

$$\bar{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i = O\left(\frac{1 + \ln n}{n} \sum_1^n h_i i^3 + \sum_{n+1}^{\infty} h_i i^2\right), \tag{42}$$

а также в силу (25) при $n \to \infty$

$$\bar{p}_n \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\ln n}{n} = O(\bar{p}_n). \tag{43}$$

Из (40), (41) и (43) получаем

$$L_k = 1/(1-z) + \alpha k + kO(\bar{p}_k).$$

Последнее равенство совместно с (37) и (43) влечет за собой (39).

Лемма 4. *Для Q_n справедливо представление*

$$Q_n = \frac{1 + O(\bar{p}_n)}{\alpha n + 1}. \tag{44}$$

Доказательство. Из (1) следует, что существует k_0 такое, что $\forall n \geqslant k_0 \left| Q_n^{-1} \frac{1}{n} \right| < 2\alpha$. В силу леммы 3 при $z = 0$ это соотношение позволяет утверждать справедливость (44).

Лемма 5. *Существует постоянная $k_6 > 0$ такая, что для любого целого $s > 0$ и любого фиксированного $k_1 > 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \left(\frac{1}{(s+2-k)^2} - \frac{2\mu}{(s+2-k)^3} - \frac{k_1 \bar{p}_{s+2-k}}{(s+2-k)^3}\right) f_k \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{(s+2)^2}\left(1 - k_6 \frac{1}{s+2} \bar{p}_{s+2}\right). \tag{45}$$

Доказательство. Левую часть (45) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \left(-\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2-k)^2} - \frac{2\mu}{(s+2-k)^3} - \frac{k_1}{(s+2-k)^3} - \bar{p}_{s+2-k}\right) f_k + \\ + \frac{1}{(s+2)^2}\left(1 - \sum_{(s+2)/2+1}^{\infty} f_k\right). \tag{46}$$

Оценим полученное выражение по частям. Далее под $s > 0$ будем подразумевать целое число. Заметим, что

$$\bar{p}_{s-k} = \frac{1}{s-k} \sum_1^{s-k} p_i \leqslant \frac{s}{s-k} \bar{p}_s.$$

Это неравенство влечет за собой существование постоянной $k_2 > 0$ такой, что $\forall s > 0$

$$\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{k_1}{(s+2-k)^3}\, \bar{p}_{s+2-k} f_k \leqslant k_2 \bar{p}_{s+2} \frac{1}{(s+2)^3}.$$

В силу условия $M\eta^3 < \infty$ $\forall s > 0$ $\exists k_3 > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{2\mu}{(s+2-k)^3} f_k \leqslant \sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{2\mu}{(s+2)^3} f_k - \sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{2 f_k \mu}{(s+2)^3 (s+2-k)^3} \times$$
$$\times \left(3(s+2)k^2 - 3(s+2)^3 k - k^3\right) \leqslant \frac{2\mu}{(s+2)^3} + k_3 \frac{1}{(s+2)^4}.$$

Аналогично $\exists k_4 > 0$ и $\exists k_5 > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \left[\frac{1}{(s+2-k)^2} - \frac{1}{(s+2)^3}\right] f_k \geqslant \sum_{k=1}^{(s+2)/2} \left[\frac{2 f_k k}{(s+2-k)^2 (s+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{k^2 f_k}{(s+2-k)^2 (s+2)^2}\right] \geqslant \sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{2 f_k k}{(s+2)^3} - k_4 \frac{1}{(s+2)^4} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\mu}{(s+2)^3} - k_5 \frac{1}{(s+2)^4}.$$

Поскольку $\sum\limits_{(s+2)/2}^{\infty} f_k = o(s^{-2})$ и справедливы формулы (43), то (46) и следующие за ним оценки утверждают лемму 5. Все необходимые вспомогательные результаты получены, и теперь мы приведем

Доказательство леммы 2. Покажем, что

$$h'(P_n) = 1 - BQ_n + O\left(\frac{1}{n} p_n\right). \tag{47}$$

Действительно,

$$\frac{1 - h'(P_n) - BQ_n}{Q_n} = \frac{\sum\limits_1^{\infty} h_k k \left(1 - P_n^{k-1}\right) - BQ_n}{Q_n} =$$
$$= \sum_2^{\infty} h_k \left[k \sum_0^{k-2} P_n^i - k(k-1)\right] = \sum h_k k \sum_0^{k-2} \left(1 - P_n^i\right) =$$
$$= O\left(\sum_1^n h_k k^3 (1 - P_n) + \sum_{n+1}^{\infty} h_k k^2\right) = O(p_n).$$

В разложении $h(x)$ и $P_k(x)$ в ряд Тейлора в нуле все коэффициенты положительны, следовательно, $h'(x)$ и $P_k(x)$ — монотонно возрастающие функции по $0 \leqslant x \leqslant 1$, что позволяет записать:

$$h(P_k(x')) - h(P_k(x)) = \int_{P_k(x)}^{P_k(x')} h'(y)\, dy \geqslant h'(P_k) D_k. \tag{48}$$

Используя (5) и (48), получаем

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} \left[h(P_{n-k}(x')) - h(P_{n-k})(x))\right] f_k + (x' - x) q_n \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} D_{n-k} h'(P_{n-k}) f_k + (x' - x) q_n. \tag{49}$$

Отсюда, в силу того что $D_0 = x' - x \neq 0$ при $x' \neq x$ и $h'(P_n) > 0$, следует, что для любого $n D_n/(x' - x) > 0$. Следовательно, для любого n существуют $\beta_n > 0$ такие, что

$$D_n \geqslant (x' - x)\beta_n 1/(n+1)^2. \tag{50}$$

В силу (47), (44), (25) и определения $\bar{p}_n$ существует k_1 такое, что

$$h'(P_n) = 1 - BQ_n + O\left(\frac{1}{n}\,p_n\right) \geqslant 1 - \frac{2\mu}{n+1} - \frac{k_1}{n}\,\bar{p}_n. \tag{51}$$

Будем предполагать, что в (45) используется k_1 из (51). Выберем n_0 настолько большим, чтобы при s и k больших, чем n_0, правые части в (45) и (51) были положительны. При $n \leqslant n_0$ выберем $\beta_n > 0$ такими, чтобы они удовлетворяли условию (50) и $\beta_{n_0} \leqslant \beta_n$.

Займемся выбором β_n, $n \geqslant n_0$, таких, что для них справедливо (50), при этом (50) влечет за собой (38). Определим β_{n+1} при $n \geqslant n_0$ рекуррентным соотношением $\beta_{n+1} = \beta_n\left(1 - k_6\,\frac{1}{n+2}\,\bar{p}_{n+2}\right)$. Заметим, что β_n не возрастает по n. Допустим, при k таких, что $n_0 \leqslant k \leqslant s$, для выбранных β_n условие (50) выполняется. Тогда из (49) и (51) следует

$$D_{s+1} \geqslant \sum_{k=1}^{(s+2)/2} D_{s+1-k}\left(1 - \frac{2\mu}{s+2-k} - \frac{k_1}{s+2-k}\,\bar{p}_{s+2-k}\right) f_k \geqslant$$

$$\geqslant (x - x')\,\beta_s\left(\sum_{k=1}^{(s+2)/2} \frac{1}{(s+2-k)^2}\left(1 - \frac{2\mu}{s+2-k} - \frac{k_1\bar{p}_{s+2-k}}{s+2-k}\right) f_k\right).$$

Отсюда на основании леммы 5 получаем

$$D_{s+1} \geqslant (x' - x)\,\beta_s\,\frac{1}{(s+2)^2}\left(1 - k_6\,\frac{1}{s+2}\,\bar{p}_{s+2}\right). \tag{52}$$

Неравенство (52) показывает, что для данной последовательности β_n условие (50) выполняется.

Из получаемой на основании (42) оценки

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{s}\,\bar{p}_s = O\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1+\ln s}{s^2} \sum_{k=1}^{s} h_k k^3 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{s+1}^{\infty} h_k k^2\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k k^3 \sum_{k}^{\infty} \frac{\ln s}{s^2}\right) + O\left(\sum h_k k^2 \ln k\right) = O\left(\sum_{1}^{\infty} h_k\,(\ln k) k^2\right) < \infty \tag{53}$$

следует, что произведение $\prod_{n_0}^{\infty}\left(1 - k_6\,\frac{1}{s+2}\,\bar{p}_{s+2}\right) \neq 0$ сходится, т. е. ввиду очевидного неравенства $\beta_n \geqslant \beta_{n_0} \prod_{n_0}^{\infty}\left(1 - k_6\,\frac{\bar{p}_{s+2}}{s+2}\right)$ получено утверждение леммы 2.

Теорема 3. *Пусть $|z| = 1$, тогда существует постоянная $k_8 > 0$ и индекс $\bar{n}_0$ такие, что для любого $n \geqslant \bar{n}_0$ справедливо неравенство*

$$|Q_n(z)| \geqslant k_8/(n + 1/|1 - z|). \tag{54}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство при z, близких к 1. Заметим, что далее до леммы 8 включительно $\bar{n}_0$ можно полагать равным нулю.

Из работы [4] следует

$$Q_n(x)(n\alpha + 1/(1 - x)) \to 1 \tag{55}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $0 \leqslant x < 1$.

Как уже упоминалось ранее, $P'_n(1) = 1$, следовательно,

$$|Q_n(z)| = \left|\int_z^1 P'_n(z)\,dz\right| \leqslant |1 - z|. \tag{56}$$

Из (23), (42), (56) и равенства $Q_0(z) = 1 - z$ получаем

$$Q_n(z) = Q_0(z) - \alpha \sum_0^{n-1} Q_i^2(z) + (1-z)^2 \sum_0^{n-1} O(p_k) =$$

$$= (1-z) - \alpha \sum_0^{n-1} Q_i^2(z) + (1-z)^2 O(n\bar{p}_n), \tag{57}$$

а после возведения (23) в квадрат $Q_{n+1}^2(z) = Q_n^2(z) + O_n(|1-z|^3)$. Последнее равенство влечет за собой

$$Q_n^2(z) = Q_{n-k}^2(z) + kO_n(|1-z|^3). \tag{58}$$

Из (58) и (57) вытекает, что

$$Q_n(z) = 1 - z - \alpha n(1-z)^2 + O_n(n^2|1-z|^3) + O_n(|1-z|^2 n\bar{p}_n).$$

Очевидно, $1 - e^{it} = -it + O(t^2)$.

Так как $\bar{p}_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$Q_n(e^{it}) = -it + \alpha n t^2 + O_n(n^2t^3) + o_n(nt^2), \tag{59}$$

или

$$P_n(e^{it}) = 1 + it - \alpha n t^2 + O_n(n^2t^3) + o_n(nt^2). \tag{60}$$

Поскольку $|1 + it - \alpha nt^2| = \sqrt{(1-\alpha nt^2)^2 + t^2} = \sqrt{1 - 2\alpha nt^2 + O_n(n^2t^4) + t^2} = 1 - \alpha nt^2 + O_n(n^2t^4) + O_n(t^2)$, из (60) при $|nt| < 1$ следует

$$|P_n(e^{it})| = 1 - \alpha nt^2 + O_n(n^2t^3) + o_n(nt^2) \leqslant 1 -$$
$$- t[\alpha nt(1 + O_n(nt) + o_n(1))],$$

т. е. при достаточно малых ε_1 и $\varepsilon_2 (0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1)$ для n и t таких, что $\varepsilon_1 \leqslant |nt| \leqslant \varepsilon_2$, где $n \geqslant N_0$, а N_0 достаточно велико, можно найти $\eta_0 = \eta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, N_0} > 0$ такое, что

$$|P_n(e^{it})| \leqslant 1 - \eta_0|1 - e^{it}| = \rho_0(t) = \rho_0 < 1. \tag{61}$$

Из (59) следует $|Q_n(e^{it})| = t(1 + o_n(1))$ при $|nt| \to 0$. Последнее совместно с очевидной оценкой

$$\frac{1}{n + 1/|1 - e^{it}|} = \frac{t + O_n(t^2)}{n\left(t + O_n(t^2)\right) + 1} \quad \text{при } |nt| \to 0$$

означает справедливость следующего утверждения.

Лемма 6. *Существует ε_2' такое, что теорема 3 верна при* $|tn| < \varepsilon_2'$.

В дальнейшем (это относится к доказательству теоремы 3) ε_1, ε_2, ε_2', N_0 и η_0, определенные выше, будем считать фиксированными, причем, не ограничивая общности, можно положить $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' < 1$.

Пусть $n_1 = \min\{n: \varepsilon_1 \leqslant |tn|, \ |t| \leqslant \delta\}$, а $n_2 = \max\{n: |tn| \leqslant \varepsilon_2, \ |t| \leqslant \delta\}$, тогда для любого n_0 существует δ такое, что $0 < \delta \leqslant \varepsilon_1/N_0$ и $n_2 - n_1 \geqslant n_0$.

Выберем n_0 таким, чтобы при $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство

$$1 - (n+1)^2 q_n/d > 0, \tag{62}$$

где d — то же, что и в формулировке леммы 2. Это возможно потому, что неравенство $M\eta^3 < \infty$ влечет за собой $q_n n^2 \to 0$ при $n \to \infty$. По n_0 найдем и фиксируем $\delta > 0$ такое, что для него выполняются неравенства $n_2 - n_1 \geqslant n_0$ и $\delta \leqslant \varepsilon_1/N_0$.

Докажем с помощью индукции, что существует невозрастающая последовательность $\eta_k > 0$, $k \geqslant 0$, такая, что при фиксированном $t (t \neq 0$ и $|t| \leqslant \delta)$

$$\left|P_{n_1+k}(e^{it})\right| \leqslant P_k(\rho_k), \tag{63}$$

где $\rho_k=\rho_k(t)=1-\eta_k|1-e^{it}|$ и $\inf\eta_k>0$. Обратим внимание на то, что η_k не зависит от t.

Нам понадобится следующая

Лемма 7. *Для любых* δ^2 *и* ρ *таких, что* $0\leqslant\rho\leqslant\rho+\delta^2\leqslant 1$, *выполняются неравенства*

$$P_n(\rho)\leqslant P_{n+1}(\rho)\leqslant P_{n+1}(\rho+\delta^2). \tag{64}$$

Доказательство последнего неравенства очевидно, ввиду того, что $P_n(x)=\sum\limits_0^\infty p_{nk}x^k$, где $p_{nk}\geqslant 0$. Для доказательства первого неравенства (43) применим индукцию. Известно, что $h(x)$ возрастает по $0\leqslant x\leqslant\leqslant 1$ и $h(x)\geqslant x$ (см. [1]). Поэтому $P_1(x)=h(x)f_1+xq_1\geqslant x=P_0(x)$.

Пусть при $k\leqslant n\leqslant n_3$ $P_k(x)\leqslant P_n(x)$. Докажем, что $P_{n_3+1}(x)\geqslant P_{n_3}(x)$.

Из (5) и написанных выше неравенств следует

$$P_{n_3+1}(x)=\sum_{k=1}^{n_3+1}h\left(P_{u_3+1-k}(x)\right)f_k+xq_{n3+1}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n_3}h\left(P_{n_3-k}(x)\right)f_k+x\left(f_{n_3+1}+q_{n_3+1}\right)=P_{n_3}(x).$$

Полученное неравенство завершает доказательство леммы 7.

Перейдем к выводу (63). По определению, n_0 из (64) и (61) при $k\leqslant n_0$ получаем $\left|P_{n_1+k}(e^{it})\right|\leqslant\rho_0=P_0(\rho_0)\leqslant P_k(\rho_0)$, т. е. $\eta_k=\eta_0$ при $0\leqslant k\leqslant n_0$.

Определим η_{n_0+1}. Очевидно, что

$$\left|P_{n_0+n+1}(e^{it})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+n+1}h\left(\left|P_{n_1+n_0+1-k}(e^{it})\right|\right)f_k+$$

$$+q_{n_0+n_1+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+1}h\left(P_{n_0+1-k}(\rho_0)\right)f_k+q_{n_0+1}=P_{n_0+1}(\rho_0)+(1-\rho_0)q_{n_0+1},$$

где последнее равенство написано на основании (5).

По лемме 2

$$P_{n_0+1}\left(\rho_0+\frac{(1-\rho_0)(n_0+2)^2}{d}q_{n_0+1}\right)-P_{n_0+1}(\rho_0)\geqslant(1-\rho_0)q_{n_0+1}.$$

Отсюда

$$\left|P_{n_0+n+1}(e^{it})\right|\leqslant P_{n_0+1}\left(1-\eta_0\left|1-e^{it}\right|\left(1-\frac{(n_0+2)^2}{d}q_{n_0+1}\right)\right). \tag{65}$$

В силу (62) $\eta_{n_0+1}=\eta_0\left(1-\frac{(n_0+2)^2}{d}q_{n_0+1}\right)$ удовлетворяет индукционному предположению. Пусть при $k=s+n_0$ выполняется индукционное предположение. Докажем, что оно верно и при $k=s+n_0+1$. Следующее неравенство легко получить из тех же соображений, что и (65):

$$\left|P_{n_0+s+1+n_1}(e^{it})\right|\leqslant P_{n_0+s+1}(\rho_{s+n_0})+(1-\rho_{s+n_0})q_{n_0+s}\leqslant P_{n_0+s+1}(\rho_{s+n_0+1}),$$

где

$$\rho_{s+n_0+1}=1-\eta_{n_0+s}\left(1-\frac{(s+n_0+2)^2}{d}q_{s+n_0+1}\right)\left|1-e^{it}\right|,$$

что доказывает (63).

Так как $\sum\limits_{n_0}^\infty n^2q_n\leqslant\Sigma n^3f_n<\infty$, то произведение $\prod\limits_0^\infty\left(1-\frac{(n_0+k+2)^2}{d}\times\right.$

$\left.\times\, q_{n_0+k+1}\right)$ сходится и положительно, а это в силу (63) и (64) приводит к оценке

$$\left|P_{n_1+k}\left(e^{it}\right)\right| \leqslant P_k(\rho), \tag{66}$$

где

$$\rho = 1 - \eta_0 \prod_0^{\infty}\left(1 - \frac{(n_0+k+2)^2}{d}\, q_{n_0+k+1}\right)\left|e^{it}-1\right| = 1 - \bar{\eta}\left|e^{it}-1\right|.$$

Оценки (55) и (66) влекут за собой существование $k_9 > 0$ такого, что

$$\left|Q_{n_1+k}\left(e^{it}\right)\right| \geqslant 1 - \left|P_{n_1+k}\left(e^{it}\right)\right| \geqslant 1 - P_k(\rho) \geqslant \frac{k_9}{\alpha k + 1/\bar{\eta}\left|1-e^{it}\right|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_9}{\alpha(n_1+k) + 1/\bar{\eta}\left|1-e^{it}\right|} \geqslant \frac{k_9(1-1/\bar{\eta})^{-1}}{\alpha(n_1+k) + 1/\left|1-e^{it}\right|}.$$

Из этой оценки и леммы 6 вытекает

Лемма 8. *Существует такое $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ теорема 3 верна* (с $n_0 = 0$).

Нам осталось исследовать $P_n(z)$ при $|1-z| > \delta_1$ для произвольного фиксированного $\delta_1 > 0$. Если существует $\bar{n}_0$ такое, что при $z \neq 1$ для любого $n \geqslant \bar{n}_0$

$$|P_n(z)| \leqslant 1, \tag{67}$$

то $\forall n_0' > 0$ можно найти $\gamma_{n_0'} = \gamma_{n_0'\bar{n}_0\delta_1} < 1$ такое, что $|P_n(z)| < \gamma_{n_0'}$ при $\bar{n}_0 \leqslant n \leqslant \bar{n}_0 + n_0'$ и $|1-z| > \delta_1$, а следовательно, и $\rho_{n_0'} = 1 - \eta_{n_0'}$ такое, что $\eta_{n_0'} > 0$ и $|P_n(z)| \leqslant P_{n-\bar{n}_0}\left(\rho_{n_0'}\right)\left(\bar{n}_0 \leqslant n \leqslant \bar{n}_0 + n_0'\right)$. Поэтому, повторив почти дословно доказательство (63) и (66) с n_1, равным $\bar{n}_0$, $|1-e^{it}|$, равным 1, и прежним n_0, получаем, что существует $\rho < 1$ такое, что $|P_n(z)| \leqslant P_{n-\bar{n}_0}(\rho)$. В силу (55) и леммы 8 доказательство теоремы завершает

Лемма 9. *При выполнении условий «а» и «б» из раздела 1 неравенство* (67) *выполняется, начиная с некоторого $\bar{n}_0$.*

Доказательство. Сначала заметим, что используемые далее свойства характеристических функций можно найти в [10, с. 115]. Из условия «а» следует, что если лишь одно f_k отлично от нуля, т. е. $f_k = 1$, то $k = 1$. Тогда из условия «а» и свойств характеристических функций для решетчатых случайных величин следует, что $|h(z)| < 1$ при $|z| = 1$ и $z \neq 1$. Но $P_1(z) = h(z)$, а $P_k(z) = h(P_{k-1}(z))$. Значит, в этом случае $\bar{n}_0$ можно положить равным 1.

Осталось исследовать случай, когда существуют по крайней мере два $f_k \neq 0$ и выполнено условие «б» из раздела 1.

Ввиду того, что $h(1) = 1$, $h'(1) = 1$ и $h''(1) > 0$, получаем $h(0) > 0$. Это значит, что $h(e^{it})$ — характеристическая функция некоторой решетчатой случайной величины и 0 принадлежит решетке. Отсюда немедленно следует, что если $|h(z)| = 1$, то $h(z) = 1$, т. е. равенство $h(z) = z$ при $|z| = 1$ возможно лишь при $z = 1$. Назовем это свойством (*).

Введем обозначения: $S = \{k \mid f_k \neq 0\}$, $j = \sup\{k \mid k \in S\}$. В дальнейшем $S \setminus j = S$, если $j = \infty$. Из свойства (*), неравенства $|h(z)| < 1$ при $|z| < 1$, системы (5) и неравенства $|az_1 + bz_2| < 1$, которое справедливо при $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 \neq z_2$, а тем более при $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| < 1$, следует $|P_n(z)| < 1$ при $|z| = 1$, $z \neq 1$ и $n \in S \setminus j$. Из последнего неравенства и соображений, на основании которых оно получено, следует, что это неравенство верно и для n вида $\alpha_j j + \sum_{\substack{k \in S \setminus j \\ \alpha_k \geqslant 0}} k\alpha_k$, где $\alpha_j = 0$, если $j=\infty$, а α_k — целые и не все равны нулю при $k\neq j$. Полученное утверждение и следующая далее лемма 10 доказывают лемму 9.

Обратим внимание на следующий факт: из определенного выше множества S всегда можно выбрать конечное подмножество S' такое, что н. о. д. $k\in S'$ равен 1.

Лемма 10. *Существует $\bar n_0$ такое, что любое целое $n\geqslant \bar n_0$ может быть представлено в виде* $n=\sum\limits_{\substack{k\in S'\\ \alpha_k>0}}\alpha_k k$.

Данная лемма доказывается в [10, с. 207]. Хотя там в формулировке $\alpha_k\geqslant 0$, но в доказательстве замечено, что утверждение верно с условием $\alpha_k>0\ \ \forall k$.

Замечание. При малых n (54), вообще говоря, неверно. Например, $h(z)=1/2+z^2/2$, $f_4=f_3=1/2$. Нетрудно показать, что $P_0(z)=P_1(z)=$ $=P_2(z)=z$, $P_3(z)=\frac{1}{2}(z+h(z))$, $P_4(z)=h(z)$ и $P_4(-1)=1$, хотя выполнены условия «а» и «б» из раздела 1.

Следствие. Существуют $\bar n_0>0$ и константа k_{10} такая, что для любых $|z|\leqslant 1$ и $n\geqslant \bar n_0$

$$|Q_n(z)|\geqslant\frac{k_{10}}{|n\alpha+(1-z)^{-1}|}. \tag{68}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при $|z|<1$, во-первых, по определению $Q_n(z)$ и того, что $Q_n(1)=0$ ($P_n(1)=1$), имеет место $Q_n(z)\neq 0$; во-вторых, $n\alpha+1/(1-z)\neq 0$ ($\mathrm{Re}(n\alpha+(1-z)^{-1})>0$). Доопределим $Q_n(z)(n\alpha+(1-z)^{-1})$ при $z=1$ по непрерывности единицей, что возможно в силу (27). Эта функция аналитична в $|z|<1$, значит, если доказывать (68) при $|z|=1$, то на основании принципа максимума модуля (68) будет верно при $|z|\leqslant 1$. Требуемая оценка следует из (54) и неравенства

$$\frac{1}{n\alpha+|1-z|^{-1}}\geqslant\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n\alpha+(1-z)^{-1}}\right|$$

при $|z|=1$. Это неравенство эквивалентно $n\alpha|1-z|+1\leqslant 2|n\alpha(1-z)+$ $+1|$, которое следует из очевидных неравенств $|n\alpha(1-z)|\leqslant|n\alpha(1-z)+$ $+1|$ и $1\leqslant|n\alpha(1-z)+1|$.

Доказанное следствие делает правомерными дальнейшие ссылки на лемму 3 или формулу (39).

Теорема 4. *Существует $\bar m_0$ такое, что при $n\geqslant \bar m_0$*

$$Q_n(z)=\frac{1+\tilde O(\bar p_n)}{n\alpha+(1-z)^{-1}}. \tag{69}$$

Доказательство. Если бы при выводе (39) использовалась оценка

$$\|[(1/(1-z)+\alpha n)Q_n(z)]^{-1}\|\leqslant k_{11}<\infty,\ n\geqslant\bar m_0\geqslant\bar n_0, \tag{70}$$

то в доказательстве леммы 3 всюду O можно было бы заменить на $\tilde O$ и в результате мы пришли бы к (69).

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить (70).

Если при доказательстве (47) вместо P_n подставить s, удовлетворяющее условиям $|s|\leqslant 1$ и $|1-s|\leqslant\alpha'/n$, где $\alpha'>0$ — любое фиксированное, то получается оценка

$$|1-h'(s)-B(1-s)|\leqslant\frac{1}{n}O(p_n). \tag{71}$$

На основании свойств интеграла и оценок (27), (37) и (71) выводим, что

$$\left| \int\limits_{P_{n-k-1}(z)}^{P_{n-k}(z)} (1 - h'(z) - B(1-z))\,dz \right| \leqslant |Q_{n-k}(z) - Q_{n-k-1}(z)|\, O\left(\frac{p_{n-k}}{n-k}\right). \tag{72}$$

Из (23), (25а), (39), (72), (25), (27) и очевидного тождества

$$h(P_{n-k}(z)) + Q_{n-k}(z) - h(P_{n-k-1}(z)) - Q_{n-k-1}(z) = \frac{B}{2} Q^2_{n-k}(z) - \\ - \frac{B}{2} Q^2_{n-k-1} - \int\limits_{P_{n-k-1}(z)}^{P_{n-k}(z)} (1 - h'(z) - B(1-z))\,dz$$

следует, что

$$h(P_{n-k}(z)) + Q_{n-k}(z) - h(P_{n-k-1}(z)) - Q_{n-k-1}(z) = \\ = \frac{B}{2}\left(Q^2_{n-k}(z) - Q^2_{n-k-1}(z)\right) + \frac{O(p_{n-k})}{(n-k)(\alpha(n-k) + (1-z)^{-1})^2} = \\ = -\frac{B}{2} 2\alpha Q^3_{n-k-1}(z) + \frac{O(p_{n-k})}{(n-k)(\alpha(n-k) + (1-z)^{-1})^2}. \tag{73}$$

Используя соотношения (29), (26) и (73), получаем

$$Q_{n-1}(z) - Q_n(z) = -(1 - h(P_{n-1}(z)) - Q_{n-1}(z))/\mu + \\ + \frac{B}{\mu}\alpha Q^3_{n-1}(z) + \frac{O(p_n)}{n(\alpha n + (1-z)^{-1})^2} - B\alpha \sum_{k=0}^{N} Q^3_{n-k-1}(z)\, b_k + \\ + \sum_{k=0}^{N} \frac{O(p_{n-k})}{(n-k)(n-k+(1-z)^{-1})^2} b_k + \frac{B}{2} \sum_{k=N+2}^{n} Q^2_{n-k}(z) \times \\ \times \left(1 + \widetilde{O}(p_{n-k})\right)(b_k - b_{k-1}) + b_{N+1} Q^2_{n-N-1}(z)\left(1 - \widetilde{O}(p_{n-N+1})\right).$$

Из (24), (25) и (27) следует $Q^3_{n-1}(z) = Q^2_{n-1}(z)\,\widetilde{O}(p_n)$, а из (24), (5) и (28)

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{O(p_{n-k})\, b_k}{(n-k)((n-k)\alpha + (1-z)^{-1})^2} = \sum_{k=0}^{N} \frac{O(p_n)}{n(n\alpha + (1-z)^{-1})^2} b_k = \\ = \frac{O(p_n)}{n(n\alpha + (1-z)^{-1})^2}.$$

Последние равенства и оценки (33), (25) и (26) влекут за собой

$$Q_{n-1}(z) - Q_n(z) = \alpha Q^2_{n-1}(z)\left(1 + \widetilde{O}(p_n)\right) - \\ - B\alpha \sum_{k=0}^{N} Q^3_{n-k-1}(z)\, b_k + \frac{B}{2} \sum_{k=N+2}^{n} Q^2_{n-k}(z)(b_k - b_{k-1}) \times \\ \times \left(1 + \widetilde{O}(p_{n-k})\right) + \frac{O(p_n)}{n(\alpha n + (1-z)^{-1})^2}. \tag{74}$$

Из (23) легко получить при $k \leqslant N$

$$Q^3_{n-k}(z) = Q^3_n(z) + k\frac{\widetilde{O}(1)}{(\alpha n + (1-z)^{-1})^4}. \tag{75}$$

В самом деле, возводя (23) в куб и учитывая (27) и (28), имеем

$$Q^3_n(z) = Q^3_{n-1}(z) + \frac{\widetilde{O}(1)}{(\alpha n + (1-z)^{-1})^4}.$$

Сумма k таких равенств дает (75).

Из (16), (25), (37) и (75) следует оценка

$$\sum_{k=0}^{N} Q_{n-k-1}^{3}(z)\, b_k = Q_{n-1}^{3}(z) \sum_{k=0}^{N} b_k + \frac{\widetilde{O}(1)}{(\alpha n + (1-z)^{-1})^4} \sum_{k=0}^{N} |kb_k| =$$

$$= Q_{n-1}^{2}(z)\, \widetilde{O}(p_n) + \frac{\widetilde{O}(p_n)}{n(\alpha n + 1/(1-z))^2}. \qquad (76)$$

На основании (27), (28) и (14) заключаем, что

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left\| \frac{B}{2} \sum_{k=N+2}^{n} Q_{n-k}^{2}(z)(n\alpha + 1/(1-z))^2 (b_k - b_{k-1}) \right\| =$$

$$= O\left(\sum_{n=4}^{\infty} \sum_{k=N+2}^{n} \left(\frac{n}{n-k+1} \right)^2 |b_k - b_{k-1}| \right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=3}^{\infty} |b_k - b_{k-1}| \cdot \sum_{n=k}^{2k} \frac{n^2}{(n-k+1)^2} \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=3}^{\infty} |b_k - b_{k-1}|\, k^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right) = O(1). \qquad (77)$$

Неравенство $\Sigma p_n/n < \infty$ (следует из (46), (53) и определения p_n) и оценки (76) и (77) дают право утверждать существование $r_n > 0$ таких, что

$$-B\alpha \sum_{k=0}^{N} Q_{n-k-1}^{3}(z)\, b_k + \frac{B}{2} \sum_{k=N+2}^{n} Q_{n-k}^{2}(z)(b_k - b_{k-1})(1 + \widetilde{O}(p_{n-k})) =$$

$$= Q_{n-1}^{2}(z)\, \widetilde{O}(p_n) + \frac{\widetilde{O}(r_n)}{(n\alpha + 1/(1-z))^2}, \qquad (78)$$

и $\Sigma r_n < \infty$.

Итак, (78) позволяет привести (74) к виду

$$Q_n(z) = Q_{n-1}(z) - \alpha Q_{n-1}^{2}(z)(1 + \widetilde{O}(p_n)) + \frac{\widetilde{O}(r_n)}{(n\alpha + 1/(1-z))^2}. \qquad (79)$$

Заметим, что полученное равенство уточняет лемму 1.

Из леммы 3 в силу (68) при достаточно больших n следует

$$Q_n^{-1}(z) \frac{1}{n\alpha + 1/(1-z)} = O_n(1).$$

Однако мы ничего пока не можем сказать о норме данного выражения, т. е. не имеем оснований $O_n(1)$ заменить на $\widetilde{O}(1)$. Поэтому далее придется кое-где вместо $\widetilde{O}$ писать только O. Как и ранее, $L_n = Q_n^{-1}(z)$.

Из (79) и (39) следует, что при $n > \overline{m}_0$

$$L_n = L_{n-1}\big(1 - \alpha Q_{n-1}(z)(1 + \widetilde{O}(p_n)) + O(r_n)\big(n\alpha + (1-z)^{-1}\big)^{-1}\big)^{-1} =$$

$$= L_{n-1}(1 - \alpha Q_{n-1}(z)(1 + \widetilde{O}(p_n)) + \frac{O(r_n)}{n\alpha + 1/(1-z)} =$$

$$= L_{n-1} + \alpha(1 + \widetilde{O}(p_n)) + O(r_n).$$

Просуммировав полученные равенства от $\overline{m}_0 + 1$ до n, в силу (40) получаем

$$L_n = (1-z)^{-1} + \alpha n + \sum_{k=\overline{m}_0}^{n} \widetilde{O}(p_k) + \sum_{k=\overline{m}_0}^{n} O(r_k) + \widetilde{O}(1) =$$

$$= (1-z)^{-1} + \alpha n (1 + \widetilde{O}(\bar{p}_n)) + K(z) + O\left(\sum_{n}^{\infty} r_h \right),$$

где $K(z)=\sum_{k=m_0}^{\infty} O(r_k)$ не зависит от n, ограничена ввиду $\Sigma r_k<\infty$ и аналитична, так как является пределом равномерно сходящейся последовательности аналитических функций. Поэтому $K(z)$ можно рассматривать как ряд Фурье при $|z|=1$. То же самое можно сказать и о последнем члене в рассматриваемом равенстве (однако при фиксированном n).

Беря обратные величины от обеих частей последнего равенства и учитывая (43) и (37), имеем

$$Q_n(z)=\frac{1+\widetilde{O}(\bar{p}_n)}{\alpha n+(1-z)^{-1}}+\frac{K(z)+o_n(1)}{(n\alpha+(1-z)^{-1})^2}, \tag{80}$$

где под $o_n(1)$ подразумевается функция, которая по только что изложенным соображениям представлена в виде ряда Фурье при $|z|=1$. Этот ряд обозначим $\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}z^k$.

Докажем, что величину

$$\left\| Q_n(z)\left(\alpha n+(1-z)^{-1}\right)-1+\sum_{k=1}^{tn}\alpha n p_{nk}z^k-\sum_{k=1}^{tn}\sum_{i=k+1}^{\infty}p_{ni}z^k\right\|=$$

$$=|1-Q_n(\alpha_n+1|+\left\|\sum_{k=tn+1}^{\infty}\alpha n p_{nk}z^k-\sum_{k=tn+1}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}p_{ni}z^k\right\| \tag{81}$$

можно сделать сколь угодно малой, зафиксировав некоторое целое t и взяв n достаточно большим. В самом деле, вследствие (44) первый член в правой части (81) стремится к нулю при $n\to\infty$.

С другой стороны (см. [2, с. 295]), $\sum_{1}^{\infty}k^2p_{nk}=O(n)$, а отсюда в силу неравенства Чебышева вытекает

$$\alpha n\sum_{k=tn+1}^{\infty}p_{nk}=\frac{n}{(tn)^2}O_t(n)\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

и

$$\sum_{k=tn+1}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}p_{ni}=O_t\left(\sum_{k=tn+1}^{\infty}kp_{nk}\right)=\frac{O_t(n)}{tn} \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

что и доказывает возможность сделать правую часть в (81) сколь угодно малой.

Из полученного утверждения в силу (43) и (80) следует существование t такого, что

$$\sum_{k=tn+1}^{\infty}\left|\mathrm{C}_k\left(\frac{K(z)+o_n(1)}{n\alpha+(1-z)^{-1}}\right)\right|<\varepsilon. \tag{82}$$

Пусть $\tau_k=\mathrm{C}_k(K(z))$. Из свойств коэффициентов Фурье и равенства $\sum_{0}^{\infty}c_{nk}z^k=o_n(1)$ следует, что $\tau_k\to 0$ при $k\to\infty$ и $c_{nk}=o_n(1)$ для любых k. Отсюда в силу равенства (37) для любого фиксированного t получаем

$$\left\|\sum_{0}^{tn}\mathrm{C}_k\left(\frac{K(z)+o_n(1)}{n\alpha+(1-z)^{-1}}\right)z^k\right\|\leqslant\left\|\frac{1}{n\alpha+(1-z)^{-1}}\right\|\left(\sum_{0}^{tn}|\tau_k|+\sum_{0}^{tn}|c_{nk}|\right)=$$

$$=\frac{2}{n\alpha+1}\left(\sum_{0}^{tn}|\tau_k|+\sum_{0}^{tn}|c_{nk}|\right)=o_n(1). \tag{83}$$

Итак, в силу (37), (82) и (83), а также произвольности $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{K(z) + o_n(1)}{n\alpha + (1-z)^{-1}} \right\| = o_n(1) \quad (n > m_0),$$

которая вследствие (80) немедленно влечет за собой (70), а следовательно, завершает доказательство теоремы 4.

Лемма 11. *В условиях данного раздела справедливо представление*

$$Q_n(z) - Q_n = (Q_{n-1}(z) - Q_{n-1})(1 - \alpha(Q_{n-1}(z) + Q_{n-1}) + \\ + \bar{O}(r_n)) + \bar{O}(r_n/n^2), \tag{84}$$

где $r_n > 0$ — некоторая последовательность такая, что $\Sigma r_n < \infty$.

Доказательство. Далее нам понадобится несколько последовательностей положительных чисел. Они должны с точностью до постоянного множителя мажорировать соответствующие выражения и суммироваться. Поэтому без ограничения общности можно считать их равными. Обозначим эти последовательности r_n.

Как уже говорилось, по аналогии с (53) легко показать, что $\Sigma p_n/n < \infty$, а это дает нам право в дальнейшем заменять p_n/n на r_n.

Введем обозначения:

$$R_n^{(k)}(z) = Q_n^k - Q_n^k(z); \quad R_n(z) = R_n^{(1)}(z);$$
$$\bar{h}(R_n(z)) = h(P_n(z)) - h(P_n).$$

Из (29) получаем

$$R_{n-1}(z) - R_n(z) = -(\bar{h}(R_n(z)) - R_n(z))/\mu + \sum_{k=0}^{N} (-h(R_{n-k}(z)) + \\ + \bar{h}(R_{n-k-1}(z)) + R_{n-k}(z) - R_{n-k-1}(z)) b_k - \sum_{k=N+2}^{n} [\bar{h}(R_{n-k}(z)) - R_{n-k}(z)] \times \\ \times (b_k - b_{k-1}) - b_{N+1}) [\bar{h}(R_{n-N-1}(z)) - R_{n-N-1}(z)]. \tag{85}$$

Как и ранее, будем полагать $N = [n/2]$.

Очевидно, что

$$\| R_n(z) \| = \left\| \sum_1^\infty p_{nk} z^k \right\| = R_n(1) = Q_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{86}$$

и

$$\| R_n^{(2)}(z) \| = \| (Q_n(z) - Q_n)(Q_n(z) + Q_n) \| \leqslant 3Q_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{87}$$

По аналогии с (47) легко получить

$$h''(P_n) - B = O(p_n). \tag{88}$$

В самом деле,

$$\sum_1^\infty h_k (k-1) k P_n^k - B = \sum_1^\infty h_k k (k-1) (P_n^k - 1) = \\ = \sum_1^n h_k k (k-1)(P_n - 1) \sum_{i=0}^{k-1} P_n^i + \sum_{k=n+1}^\infty h_k k (k-1) = O(p_n).$$

По определению $\bar{h}(R_n(z))$, имеем

$$\bar{h}(R_n(z)) - R_n(z) + (B/2) R_n^{(2)}(z) = \sum^\infty h_k ((R_n(z) + P_n)^k - P_n^k) -$$

$$-R_n(z)+(B/2)R_n(z)(2Q_n-R_n(z))=\sum_3^\infty h_k\sum_{i=0}^{k-3}C_k^iP_n^iR_n^{k-i}(z)+$$

$$+\sum_1^\infty h_kR_n(z)P_n^{k-1}k+\frac{1}{2}\sum_2^\infty h_kR_n^2(z)P_n^{k-2}k(k-1)-R_n(z)+$$

$$+\frac{B}{2}R_n(z)(2Q_n-R_n(z))=\sum_3^\infty h_k\sum_{i=0}^{k-3}C_k^iP_n^iR_n^{k-i}(z)+$$

$$+R_n(z)(h'(P_n)-1+BQ_n)+\frac{1}{2}R_n^2(z)(h''(P_n)-B).$$

Используя оценки (89) при $z=1$ и (86), получаем

$$\left\|\frac{\sum_3^\infty h_k\sum_{i=0}^{k-3}C_k^iP_n^iR_n^{k-i}(z)}{R_n(z)}\right\|=\sum_3^\infty h_k\sum_{i=0}^{k-3}C_k^iP_n^iQ_n^{k-i-1}=$$

$$=\frac{\sum_0^\infty h_k\left((Q_n+P_n)^k-P_n^k\right)-Q_n+(B/2)Q_n^2-Q_n(h'(P_n)-1+BQ_n)}{Q_n}-$$

$$-\frac{Q_n^2(h''(P_n)/2-B/2)}{Q_n}=\frac{1-h(P_n)-Q_n+\frac{B}{2}Q_n^2}{Q_n}-$$

$$-(h'(P_n)-1+BQ_n)-\frac{1}{2}Q_n(h''(P_n)-B).$$

Это представление для нормы совместно с (26), (47) и (88) позволяет написать:

$$\sum_3^\infty h_k\sum_{i=0}^{k-3}C_k^iP_n^iR_n^{k-i}(z)=R_n(z)\widetilde{O}\left(\frac{P_n}{n}\right). \tag{90}$$

Применяя оценки (47), (88), (86) и (90) к (89), получаем

$$\overline{h}(R_n(z))-R_n(z)+\frac{B}{2}R_n^{(2)}(z)=R_n(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_n}{n+1}\right). \tag{91}$$

Оценка (91) позволяет привести (85) к виду

$$R_{n-1}(z)-R_n(z)=\alpha R_n^{(2)}(z)+R_n(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_n}{n}\right)+\sum_{k=0}^N\frac{B}{2}\left(R_{n-k}^{(2)}(z)-\right.$$

$$\left.-R_{n-k-1}^{(2)}(z)\right)b_k+\sum_{k=N+1}^n\left[\frac{B}{2}R_{n-k}^{(2)}(z)-R_{n-k}(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k+1}\right)\right]\times$$

$$\times(b_k-b_{k-1})+b_{N+1}\left[\frac{B}{2}R_{n-N-1}^{(2)}(z)-R_{n-N-1}(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-N-1}}{n-N-1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^N\left[R_{n-k}(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k}\right)-R_{n-k-1}(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k-1}}{n-k-1}\right)\right]b_k. \tag{92}$$

В силу (86), (87), (77), (25) и (1) получаем

$$\sum_n\left\|\sum_{k=N+2}^n\frac{B}{2}\left(R_{n-k}^{(2)}(z)+R_{n-k}(z)\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k+1}\right)\right)(b_k-b_{k-1})\right\|n^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_n\sum_{k=N+2}^n n^2\frac{B}{2}\left[Q_{n-k}^2+\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k+1}\right)Q_{n-k}\right]|b_k-b_{k-1}|=$$

$$= O\left(\sum_n \sum_{k=N+2}^{n} \frac{n^2}{(n-k+1)^2} |b_k - b_{k-1}|\right) < \infty. \tag{93}$$

Из (13), (86) и (87) следует

$$\left\| b_{N+1}\left(\frac{B}{2} R^{(2)}_{n-N-1}(z) + R_{n-N-1}(z)\,\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-N-1}}{n-N-1}\right)\right)\right\| = O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{94}$$

В силу оценок (93) и (94) существуют $r_n > 0$ такие, что $\Sigma r_n < \infty$ и

$$\sum_{k=N+2}^{n} \left[\frac{B}{2} R^{(2)}_{n-k}(z) + R_{n-k}(z)\,\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k+1}\right)\right](b_k - b_{k-1}) +$$

$$+ b_{N+1}\left(\frac{B}{2} R^{(2)}_{n-N-1}(z) + R_{n-N-1}(z)\,\widetilde{O}\left(\frac{p_{n-N-1}}{n-N-1}\right)\right) = \widetilde{O}\left(\frac{r_n}{n^2}\right). \tag{95}$$

Оценка (95) позволяет привести (92) к виду

$$R_{n-1}(z) - R_n(z) = \alpha R^{(2)}_n(z) - \sum_{k=0}^{N} \frac{B}{2}\left(R^{(2)}_{n-k}(z) - R^{(2)}_{n-k-1}(z)\right) b_k +$$

$$+ \widetilde{O}\left(\frac{r_n}{n^2}\right) + \sum_{k=0}^{N} \widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k}\right) R_{n-k}(z)\, b_k + R_n(z)\,\widetilde{O}\left(\frac{p_n}{n}\right). \tag{96}$$

Отсюда в силу (86), (87) и (25) получаем

$$\|R_{n-1}(z) - R_n(z)\| = O(n^{-2}) + O(n^{-2}) \sum |b_k|,$$

или вследствие (15)

$$R_n(z) = R_{n-1}(z) + \widetilde{O}(n^{-2}). \tag{97}$$

Последняя оценка влечет за собой

$$R_{n-k}(z) = R_n(z) + k\widetilde{O}(n^{-2}). \tag{98}$$

Вследствие (16), (98) и (24) можно написать:

$$\sum_{k=0}^{N} \widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k}\right) R_{n-k}(z)\, b_k = R_n(z) \sum_k \widetilde{O}\left(\frac{p_{n-k}}{n-k}\right) b_k +$$

$$+ \widetilde{O}(p_n/n^3) \sum |k b_k| = R_n(z)\,\widetilde{O}\left(\frac{p_n}{n}\right) + \widetilde{O}(r_n/n^2). \tag{99}$$

По определению,

$$R^{(2)}_n(z) = R_n(z)\,(R_n(z) + 2Q_n). \tag{100}$$

Возводя обе части равенства (97) в квадрат и учитывая (86), имеем

$$R^2_n(z) = R^2_{n-1}(z) + \widetilde{O}(n^{-3}). \tag{101}$$

Умножая же обе части равенства (97) на Q_n и учитывая представление (23) при $z = 0$ и оценки (86) и (1), получаем

$$\begin{aligned} R_n(z) Q_n &= R_{n-1}(z) Q_{n-1} + R_{n-1}(z)(Q_n - Q_{n-1}) + \\ &+ \widetilde{O}(n^{-3}) = R_{n-1}(z) Q_{n-1} + \widetilde{O}(n^{-3}). \end{aligned} \tag{102}$$

На основании (100), (101) и (102) находим

$$R^{(2)}_n(z) - R^{(2)}_{n-1}(z) = \widetilde{O}(n^{-3}). \tag{103}$$

С помощью (99) и (103) приводим (96) к виду

$$R_{n-1}(z) - R_n(z) = \alpha R_n^{(2)}(z) + \sum_{k=0}^{N} \tilde{O}\left(\frac{b_k}{(n-k)^3}\right) + \tilde{O}\left(\frac{r_n}{n^2}\right) + R_n(z)\tilde{O}\left(\frac{p_n}{n}\right).$$

Из (15) следует $\sum\limits_{k=0}^{N} \tilde{O}\left((n-k)^{-3} b_k\right) = \tilde{O}\left(n^{-3}\right)$.

На основании этого соотношения, а также оценок (27), (37) и (103) из предпоследнего равенства можно получить

$$R_n(z) = R_{n-1}(z)(1 + \tilde{O}(p_n/n)) - \alpha R_{n-1}(z)(Q_{n-1} - Q_{n-1}(z)) + \tilde{O}(n^{-3}) + \\ + \tilde{O}(r_n/n^3) = R_{n-1}(z)(1 + \tilde{O}(n^{-1})) + \tilde{O}(n^{-3}) + \tilde{O}(r_n/n^2). \tag{104}$$

Проделав с (54) те же манипуляции, что и с (97), получаем соотношения

$$R_n^2(z) = R_{n-1}^2(z)\left(1 + \tilde{O}(1/n)\right) + \tilde{O}\left(n^{-4}\right) + \tilde{O}\left(r_n/n^3\right)$$

и

$$R_n(z)\, Q_n = R_{n-1}(z)\, Q_{n-1}\left(1 + \tilde{O}(1/n)\right) + \tilde{O}\left(n^{-4}\right) + \tilde{O}\left(r_n/n^3\right),$$

которые являются аналогами (101) и (102). Складывая эти равенства и учитывая (1), получаем аналог (103)

$$R_n^{(2)}(z) = R_{n-1}^{(2)}(z) + R_{n-1}(z)\tilde{O}\left(n^{-2}\right) + \tilde{O}\left(n^{-4}\right) + \tilde{O}\left(r_n/n^3\right). \tag{105}$$

Использовав (105), оценим второе слагаемое в (96):

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{B}{2}\left(R_{n-k}^{(2)}(z) - R_{n-k-1}^{(2)}(z)\right) b_k = \sum_{k=0}^{N} R_{n-k-1}(z)\tilde{O}\left((n-k)^{-2}\right) b_k + \\ + \sum_{k=0}^{N} \tilde{O}\left((n-k)^{-4}\right) b_k + \sum_{k=0}^{N} \tilde{O}\left(\frac{r_{n-k}}{(n-k)^3}\right) b_k. \tag{106}$$

На основании (98) и (16) получаем

$$\sum_{k=0}^{N} R_{n-k-1}(z)\tilde{O}\left((n-k)^{-2}\right) b_k = R_{n-1}(z)\tilde{O}\left(n^{-2}\right) \sum_{k=0}^{N} |b_k| + \\ + n^{-2} \sum \tilde{O}\left(k(n-k)^{-2}\right) b_k = R_{n-1}(z)\tilde{O}\left(n^{-2}\right) + \tilde{O}\left(n^{-4}\right). \tag{107}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{N} \tilde{O}\left((n-k)^{-4}\right) b_k = \tilde{O}\left(n^{-4}\right) \sum |b_k| = \tilde{O}\left(n^{-4}\right). \tag{108}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{n=4}^{\infty} n^2 \left\| \sum_{k=0}^{N} O\left(\frac{r_{n-k}}{(n-k)^3}\right) b_k \right\| < \infty. \tag{109}$$

Правую часть последнего неравенства оценим сверху выражением

$$\sum_{n=4}^{\infty} n^2 \sum_{k=0}^{N} O\left(\frac{r_{n-k}}{(n-k)^3}\right) b_k = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N} O\left(r_{n-k}\right) b_k = \\ = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} O\left(r_k\right) b_{n-k} = \sum_{n=4}^{\infty} O\left(r_n\right) \Sigma |b_k| < \infty.$$

Последнее неравенство написано в силу (15) и определения r_n. Это и доказывает (109).

Из (106)—(109) следует существование $r_n > 0$ таких, что

$$\Sigma \frac{B}{2}\left(R^{(2)}_{n-k}(z) - R^{(2)}_{n-k-1}(z)\right) b_k = R_{n-1}(z)\tilde{O}\left(n^{-2}\right) + \tilde{O}\left(r_n/n^2\right) \qquad (110)$$

и $\Sigma r_n < \infty$.

В силу (96), (105), (110), (99) и замечаний о r_n и p_n получаем

$$R_{n-1}(z) - R_n(z) = \alpha R^{(2)}_{n-1}(z) + \tilde{O}\left(r_n/n^2\right) + R_{n-1}(z)\tilde{O}(r_n),$$

что эквивалентно утверждению леммы 11.

4. Доказательство теоремы 1

На заключительном этапе используем подход, предложенный в [6]. Замечания об r_k, сделанные в начале доказательства леммы 11, сохраняют силу и в данном разделе. При этом p_k/k и $\bar{p}_k/k$ будем заменять на r_k, не оговаривая специально.

Из (23), (25) и (1) следует, что

$$Q_n = Q_{n-1} - \alpha Q^2_{n-1} + O(p_{n-1})/n^2 = Q_{n-1}(1 - \alpha Q_{n-1} + O(r_{n-1})) =$$
$$= Q_{n-1}(1 + \alpha Q_{n-1} + O(r_{n-1}))^{-1}. \qquad (111)$$

Разделим левую и правую части (84) соответственно на левую и правую части [111]. Тогда в силу (1) получаем

$$\frac{R_k(z)}{Q_k} = \frac{R_{k-1}(z)}{Q_{k-1}}\left(1 - \alpha Q_{k-1}(z) + \tilde{O}(r_{k-1})\right) + O\left(\frac{r_k}{k}\right),$$

или

$$\frac{R_k(z)}{Q_k} = \frac{R_{k-1}(z)}{Q_{k-1}}(1 - \alpha Q_{k-1}(z) + \Psi_{k-1}(z)) + \varphi_k(z), \qquad (112)$$

где $\Psi_{k-1}(z) = \tilde{O}(r_{k-1})$ и $\varphi_k(z) = \tilde{O}(r_k/k)$.

Положим $\varphi^{(1)}_k(z) = (1 - R_{k-1}(z)/Q_{k-1})\,\varphi_k(z)$, а $\Psi^{(1)}_k(z) = \Psi_k(z) + \varphi_{k+1}(z)$. Тогда в силу (86) $\Psi^{(1)}_k(z) = \tilde{O}(r_k)$ и $\varphi^{(1)}_k(z) = \tilde{O}(r_k/k)$, причем так как $R_{k-1}(1) = Q_{k-1}$ и $Q_k(1) = 0$, то $\varphi^{(1)}_k(1) = 0$ и $\Psi^{(1)}_k(1) = 0$, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_k(1) = \Psi_k(1) = 0$.

Определим $\theta_k(z)$ и $\pi_k(z)$ из равенств

$$\theta_k(z) = 1 - \alpha Q_k(z) + \Psi_k(z) = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha k + (1-z)^{-1}}\right)(1 + \pi_k(z)).$$

На основании представления (69), равенств (37) и

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha n + (1-z)^{-1}}\right)^{-1} = \frac{\alpha n + (1-z)^{-1}}{\alpha(n-1) + (1-z)^{-1}} = \tilde{O}(1)$$

(последнее справедливо в силу (28))

$$\pi_k(z) = \left(1 - \frac{\alpha + O(\bar{p}_k)}{\alpha k + (1-z)^{-1}} + \Psi_k(z)\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha k + (1-z)^{-1}}\right)^{-1} - 1 =$$
$$= \tilde{O}(r_k) + \tilde{O}(\|\Psi_k(z)\|) = \tilde{O}(r_k), \quad k > \bar{m}_0. \qquad (113)$$

Итак, по определению $\theta_k(z)$

$$\frac{R_k(z)}{Q_k} = \frac{R_{k-1}(z)}{Q_{k-1}}\theta_{k-1}(z) + \varphi_k(z). \qquad (114)$$

В силу равенств $\varphi_k(1) = \psi_k(1) = 0$ из (114) и (113) следует $\theta_k(1) = 1$ и $\pi_k(1) = 0$.

Из (113) следует сходимость $\prod_{k=M}^{\infty}(1+\pi_k(z))$ по норме, где $M \geqslant \geqslant \bar{m}_0+1$ — любое фиксированное. Значит, справедливы соотношения ($\varphi_n(z)=\tilde{o}_n(1)$, если $\|\varphi_n(z)\| \to 0$ при $n\to\infty$)

$$\prod_{M}^{\infty}(1+\pi_k(z))=\widetilde{O}(1) \tag{115}$$

и

$$\prod_{M}^{n-1}(1+\pi_k(z))=\prod_{M}^{\infty}(1+\pi_k(z))+\tilde{o}_n(1). \tag{116}$$

Из определения $\theta_i(z)$ получаем

$$\prod_{i=k}^{n-1}\theta_i(z)=\frac{\alpha(k-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\prod_{i=k}^{n-1}(1+\pi_i(z)). \tag{117}$$

Умножая соответствующие части равенств (117) и (114) и суммируя полученные равенства по k от M до $n-1$ (при $k=n-1$ (117) тривиально $1=1$), получаем

$$\frac{R_n(z)}{Q_n}=\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{k=M}^{n-1}\theta_k(z)+\sum_{k=M}^{n-1}\frac{\alpha k+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\widetilde{O}\left(\frac{r_k}{k}\right). \tag{118}$$

Очевидно, что

$$C_n(\varphi(z)\Psi(z))\leqslant\|\varphi(z)\|\|\Psi(z)\|, \tag{119}$$

Отсюда на основании (28) следует

$$C_s\left(\sum_{M}^{n-1}\frac{\alpha k+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\widetilde{O}\left(\frac{r_k}{k}\right)\right)=\frac{1}{n}\,O\left(\sum_{M}^{n-1}r_k\right). \tag{120}$$

В силу (116)

$$\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{M}^{n-1}\theta_k(z)=\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{k=M}^{\infty}(1+\pi_k(z))\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}+$$
$$+\tilde{o}_n(1)\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}(z)}\cdot\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}. \tag{121}$$

По аналогии с (120) вследствие (119), (28) и (86) справедлива оценка

$$C_k\left(\tilde{o}_n(1)\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\,\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\right)=o_n\left(\frac{1}{n}\right). \tag{122}$$

Если учесть (115), то по аналогии с (122) первое слагаемое в правой части (121) имеет коэффициент при z^r, равный $O(1/n)$, а это совместно с равенствами (122), (121), (120) и (118) влечет за собой

$$C_k(R_n(z)/Q_n)=O(1/n).$$

Полученное соотношение, по определению $R_n(z)$ и p_{nk}, эквивалентно при $k>0$ следующему: $\sup\limits_{\substack{n\geqslant m_0\\ k\geqslant 1}} n^2p_{nk}<\infty$.

Ввиду того, что при $n\leqslant m_0$ последнее неравенство очевидно, (3) доказано.

Из (28) легко получить

$$\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}=\frac{1+(M-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}+$$

$$+\frac{(n-M)}{(1+(n-1)\alpha)(n-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^k z^k. \quad (123)$$

Введем обозначения:

$$\prod_{M}^{\infty}(1+\pi_k(z))\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}=\sum_{i=0}^{\infty}t_i z^i=\Psi(z). \quad (124)$$

Из (123) и (124) на основании несложных вычислений получаем

$$\mathbf{C}_k\left(\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{M}^{\infty}(1+\pi_i(z))\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\right)=t_k\frac{1+(M-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}+$$

$$+\frac{n-M}{(1+(n-1)\alpha)(n-1)}\sum_{i=0}^{k-1}t_i\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+\alpha(n-1)}\right)^{k-i}. \quad (125)$$

Так как $\|\Psi(z)\|<\infty$, то

$$\sum_{s}^{\infty}|t_i|=o_s(1). \quad (126)$$

При фиксированном s

$$\sum_{i=0}^{s-1}t_i\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^{k-i}=\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^k\left\{\sum_{i=0}^{s-1}t_i+\sum_{i=0}^{s-1}\left(t_i\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^{-i}-t_i\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^k\left(\sum_{i=0}^{s-1}t_i+o_n(1)\right). \quad (127)$$

Будем писать $\varphi(n,\ k)=\hat{o}((n\alpha)^{-1}e^{-k/n\alpha})$, если $k/n<c$ и $n\varphi(n,\ k)\to 0$ при $n\to\infty$ и $k\to\infty$.

Из (126) следует, что для любого фиксированного M

$$t_k\frac{1+(M-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}+\frac{n-M}{(1+(n-1)\alpha)(n-1)}\sum_{i=s}^{k-1}t_i\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^{k-i}=$$

$$=\frac{1}{n}O\left(\sum_{s}^{k}|t_i|\right). \quad (128)$$

Из (124) легко получить

$$\Psi(1)=\sum_{0}^{\infty}t_i=R_N(1)/Q_N=1. \quad (129)$$

Из (126) и (129) вытекает, что можно выбрать s_0 такое, что при $s>s_0$ выражения $\sum_{s}^{\infty}|t_i|$ и $\left|\sum_{i=0}^{s}t_i-1\right|$ будут сколь угодно малы. Отсюда следует, что выбором s_0 при достаточно больших n и k можно добиться [в силу (124), (125), (127) и (128)] выполнения неравенства

$$\left|\mathbf{C}_k\left(\Psi(z)\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\right)-\left(\frac{(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\right)^k\frac{1}{(n-1)\alpha}\right|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{n},$$

где $\varepsilon_1>0$ — произвольное фиксированное.

Вследствие произвольности ε_1 последнее неравенство можно записать в виде

$$\mathbf{C}_k\left(\Psi(z)\frac{\alpha(M-1)+(1-z)^{-1}}{\alpha(n-1)+(1-z)^{-1}}\right)=\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}+\hat{o}\left(\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}\right), \quad (130)$$

где $M\geqslant\overline{m}_0$ — фиксированное.

Применяя к (121) оценки (122) и (130), получаем

$$\mathbf{C}_k\left(\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{M}^{n-1}\theta_n(z)\right)=\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}+\hat{o}\left(\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}\right). \qquad (131)$$

Из (120) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $M_0>\overline{m}_0$ такое, что

$$\left|\mathbf{C}_r\left(\sum_{k=M_0}^{n-1}\frac{\alpha k+(1-z)^{-1}}{\alpha n+(1-z)^{-1}}\tilde{O}\left(\frac{r_k}{k}\right)\right)\right|<\varepsilon\frac{1}{n}.$$

Последнее соотношение совместно с равенством (118) позволяет заключить, что

$$\left|\mathbf{C}_k\left(\frac{R_n(z)}{Q_n}\right)-\mathbf{C}_k\left(\frac{R_{M_0-1}(z)}{Q_{M_0-1}}\prod_{M_0}^{n-1}\theta_i(z)\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}.$$

Отсюда в силу произвольности ε и оценки (131) получаем

$$\mathbf{C}_k\left(\frac{R_n(z)}{Q_n}\right)=\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}+\hat{o}\left(\frac{1}{n\alpha}e^{-k/n\alpha}\right).$$

Это и есть первая часть утверждения теоремы 1. Вторая была доказана ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харрис Т.** Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966.
2. **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
3. **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 4, с. 577—594.
4. **Goldstein M. I.** Critical Age Dependent Branching Processes: Single and Multitype.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1971, Bd 17, H. 4, p. 74—88.
5. **Kesten H., Ney P., Spitzer F.** The Galton — Watson process with mean and finite invariance.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 577—611.
6. **Нагаев С. В., Мухамедханова Р.** Некоторые термины из теории ветвящихся случайных процессов.— В кн.: Предельные теоремы и стат. выводы. Ташкент, Фан, 1966.
7. **Нагаев С. В.** Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем, I, II.— Сиб. мат. ж., 1974, т. 15, № 2, с. 368—394, 1974; № 3, с. 570—579.
8. **Рогозин Б. А.** Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 4, с. 703—717.
9. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
10. **Боровков А. А.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КВАДРАТА НОРМЫ В l_2

В. И. ЧЕБОТАРЕВ

1. Основные предположения. Формулировка результатов

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в пространстве l_2, $\mathbf{E}X_1=0$, $\mathbf{E}\|X_1\|^2=1$, $\beta=\mathbf{E}\|X_1\|^3<\infty$. Здесь $\|\cdot\|$ — норма в l_2. Положим $X_i=\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots\}$, $i=1, 2, \ldots, n, \sigma_j^2=\mathbf{E}X_{1j}^2$, $\beta_j=\mathbf{E}|X_{1j}|^3$, $j=1, 2, \ldots$. Пусть $Z=\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ — гауссовский случайный вектор в l_2, удовлетворяющий условиям $\mathbf{E}Z=0$, ковариационный оператор случайного