Применяя к (121) оценки (122) и (130), получаем

$$\mathbf{C}_k\left(\frac{R_{M-1}(z)}{Q_{M-1}}\prod_{M}^{n-1}\theta_n(z)\right)=\frac{1}{n\alpha}\,e^{-k/n\alpha}+\widehat{o}\left(\frac{1}{n\alpha}\,e^{-k/n\alpha}\right). \tag{131}$$

Из (120) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $M_0>\bar{m}_0$ такое, что

$$\left|\mathbf{C}_r\left(\sum_{k=M_0}^{n-1}\frac{\alpha k+(1-z)^{-1}}{\alpha n+(1-z)^{-1}}\widetilde{O}\left(\frac{r_k}{k}\right)\right)\right|<\varepsilon\frac{1}{n}.$$

Последнее соотношение совместно с равенством (118) позволяет заключить, что

$$\left|\mathbf{C}_k\left(\frac{R_n(z)}{Q_n}\right)-\mathbf{C}_k\left(\frac{R_{M_0-1}(z)}{Q_{M_0-1}}\prod_{M_0}^{n-1}\theta_i(z)\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}.$$

Отсюда в силу произвольности ε и оценки (131) получаем

$$\mathbf{C}_k\left(\frac{R_n(z)}{Q_n}\right)=\frac{1}{n\alpha}\,e^{-k/n\alpha}+\widehat{o}\left(\frac{1}{n\alpha}\,e^{-k/n\alpha}\right).$$

Это и есть первая часть утверждения теоремы 1. Вторая была доказана ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харрис Т.** Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966.
2. **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
3. **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 4, с. 577—594.
4. **Goldstein M. I.** Critical Age Dependent Branching Processes: Single and Multitype.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1971, Bd 17, H. 4, p. 74—88.
5. **Kesten H., Ney P., Spitzer F.** The Galton — Watson process with mean and finite invariance.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 4, с. 577—611.
6. **Нагаев С. В., Мухамедханова Р.** Некоторые термины из теории ветвящихся случайных процессов.— В кн.: Предельные теоремы и стат. выводы. Ташкент, Фан, 1966.
7. **Нагаев С. В.** Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем, I, II.— Сиб. мат. ж., 1974, т. 15, № 2, с. 368—394, 1974; № 3, с. 570—579.
8. **Рогозин Б. А.** Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 4, с. 703—717.
9. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
10. **Боровков А. А.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КВАДРАТА НОРМЫ В l_2

В. И. ЧЕБОТАРЕВ

1. Основные предположения. Формулировка результатов

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в пространстве l_2, $\mathbf{E}X_1=0$, $\mathbf{E}\|X_1\|^2=1$, $\beta=\mathbf{E}\|X_1\|^3<\infty$. Здесь $\|\cdot\|$ — норма в l_2. Положим $X_i=\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots\}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\sigma_j^2=\mathbf{E}X_{1j}^2$, $\beta_j=\mathbf{E}|X_{1j}|^3$, $j=1, 2, \ldots$. Пусть $Z=\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ — гауссовский случайный вектор в l_2, удовлетворяющий условиям $\mathbf{E}Z=0$, ковариационный оператор случайного вектора Z совпадает с ковариационным оператором случайного вектора X_1. Отсюда следует, что $\mathbf{E}Z_j^2=\sigma_j^2$. Не нарушая общности, можно считать, что $\sigma_j \geqslant \sigma_{j+1}$ при всех $j=1, 2, \ldots$.

Обозначим $S_n=n^{-1/2}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S_{nj}=n^{-1/2}\sum\limits_{i=1}^{n} X_{ij}$.

В предположении, что:

а) координаты X_{11}, X_{12} имеют абсолютно непрерывные распределения с ограниченными плотностями и, кроме того,

б) координаты каждого из случайных векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ взаимно независимы, получаем оценки величины

$$\delta_n=\sup_x \left| \frac{d}{dx}\mathbf{P}\{\|S_n\|^2<x\}-\frac{d}{dx}\mathbf{P}\{\|Z\|^2<x\}\right|.$$

Введем обозначения, которыми будем пользоваться как при формулировке, так и при доказательстве основных результатов настоящей статьи: $\varphi_j(\cdot)$ — плотность распределения случайной величины $\sigma_j^{-1}X_{1j}$; $\varphi_{nj}(\cdot)$ — плотность распределения $\sigma_j^{-1}S_{nj}$; $\varphi(\cdot)$ — плотность распределения стандартной нормальной случайной величины $\sigma_j^{-1}Z_j$; $A_j=\sup\limits_x \varphi_j(x)$, $j=1,2$; $A_{1,2}=\max\limits_{j=1,2}\max\{1, A_j^3\}$; C — абсолютная постоянная, не обязательно одна и та же в разных формулах.

Для упрощения записи результатов воспользуемся следующими предположениями, не уменьшающими общности:

в) $n^{-1/2}A_{1,2}\sigma_1^{-3}\beta_1<1$;

в′) $n^{-1/2}\left(\prod\limits_{j=3}^{5}\sigma_j\right)^{-1}\sum\limits_{j=6}^{\infty}\beta_j<1$.

Теорема 1. *Если выполнены условия „а“, „б“ и „в“, то*

$$\delta_n \leqslant n^{-1/2}CA_{1,2}(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\left[\left(\prod_{j=3}^{6}\sigma_j\right)^{-3/4}\sum_{j=7}^{\infty}\beta_j+\sum_{j=1}^{6}\sigma_j^{-3}\beta_j\right].$$

Теорема 2. *Если выполнены условия „а“, „б“, „в“ и „в′“, то*

$$\delta_n \leqslant n^{-1/2}CA_{1,2}(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\left\{\left(\prod_{j=3}^{5}\sigma_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=6}^{\infty}\beta_j\right)\times\left[1+\ln\left(n^{1/2}\prod_{j=3}^{5}\sigma_j\left(\sum_{j=6}^{\infty}\beta_j\right)^{-1}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{5}\sigma_j^{-3}\beta_j\right\}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия „а“, „б“ и „в“, то*

$$\delta_n \leqslant n^{-1/3}CA_{1,2}(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\left[(\sigma_3\sigma_4)^{-1}\left(\sum_{j=5}^{\infty}\beta_j\right)^{2/3}+n^{-1/6}\sum_{j=1}^{4}\sigma_j^{-3}\beta_j\right].$$

Теорема 4. *Если выполнены условия „а“, „б“ и „в“, то*

$$\delta_n \leqslant n^{-1/6}CA_{1,2}(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\left[\sigma_3^{-1}\left(\sum_{j=4}^{\infty}\beta_j\right)^{1/3}+n^{-1/3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_j^{-3}\beta_j\right].$$

Заметим, что сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j$ следует из конечности третьего момента β.

В зависимости от величин характеристик, входящих в оценки теорем 1—4, каждая из них может оказаться точнее остальных (см. [1]). Если $A_{1,2}\leqslant C$, $\sigma_6\geqslant C$, $\beta\leqslant C$, то теорема 1 дает оценку $\delta_n=O(n^{-1/2})$.

2. Доказательство теорем 1—4

Введем обозначения:

$$\Delta_n^{(k)}(x) = \mathbf{P}\left\{\sum_{j=k+1}^{\infty} S_{nj}^2 < x\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{j=k+1}^{\infty} Z_j^2 < x\right\};$$

$$\Delta_n^{(k)} = \sup_x |\Delta_n^{(k)}(x)|, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \ \Delta_n^{(0)}(x) \equiv \Delta_n(x);$$

p_{nj} — плотность распределения S_{nj}^2; p_j — плотность распределения Z_j^2; $\cdot * \cdot$ — свертка плотностей. Далее всюду будем предполагать, что условия „а“ и „б“ выполнены.

Для доказательства теорем 1—4 нам потребуется пять лемм. Следующая лемма дает оценку δ_n в виде суммы «бесконечномерной» и «конечномерной» частей.

Лемма 1. *При всех n*

$$\delta_n \leqslant \sup_x \left| \int_{0-}^{x+} p_1 * p_2 (x-y)\, d\Delta_n^{(2)}(y) \right| + \sup_x | p_{n1} * p_{n2}(x) - p_1 * p_2(x) |. \quad (1)$$

Доказательство. Оценка (1) вытекает из следующего представления:

$$\frac{d}{dx} \Delta_n(x) = \int_{0-}^{x+} p_1 * p_2 (x-y)\, d\Delta_n^{(2)}(y) +$$

$$+ \int_{0-}^{x+} (p_{n1} * p_{n2} - p_1 * p_2)(x-y)\, d\mathbf{P}\left\{\sum_{j=3}^{\infty} S_{nj}^2 < x\right\}.$$

Оценим первый supremum в (1).

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\sup_x \left| \int_{0-}^{x+} p_1 * p_2 (x-y)\, d\Delta_n^{(2)}(y) \right| \leqslant (\sigma_1\sigma_2)^{-1} \Delta_n^{(2)}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\sup_x \left| \int_{0-}^{x+} p_1 * p_2 (x-y)\, d\Delta_n^{(2)}(y) \right| = \sup_x \Big| p_1 * p_2 (x-y)\, \Delta_n^{(2)}(y) \Big|_{0-}^{x+} -$$

$$- \int_{0-}^{x+} \Delta_n^{(2)}(y)\, d(p_1 * p_2)(x-y) \Big| = \sup_x \left| \int_{0-}^{x+} \Delta_n^{(2)}(y)\, d(p_1 * p_2)(x-y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_n^{(2)} \int_0^{\infty} | d(p_1 * p_2)(y) |. \quad (2)$$

Поскольку при $x > 0$

$$p_1 * p_2(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)t}} \exp\left\{-\frac{x-t}{2\sigma_1^2} - \frac{t}{2\sigma_2^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\left(\frac{1-y}{\sigma_1^2} + \frac{y}{\sigma_2^2}\right)\right\} dy, \quad (3)$$

то производная $\frac{d}{dx}(p_1 * p_2)(x)$ отрицательна при всех $x > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{0-}^{\infty} |d(p_1*p_2)(y)| = (p_1*p_2)(0+) + \int\limits_{0+}^{\infty} |d(p_1*p_2)(y)| = (p_1*p_2)(0+) -$$

$$-\int\limits_{0+}^{\infty} d(p_1*p_2)(y) = 2(p_1*p_2)(0+). \tag{4}$$

Из (2)—(4) вытекает оценка

$$\sup_x \left| \int\limits_{0-}^{x+} p_1*p_2(x-y)\, d\Delta_n^{(2)}(y) \right| \leqslant 2\Delta_n^{(2)}(p_1*p_2)(0+) = (\sigma_1\sigma_2)^{-1}\Delta_n^{(2)}.$$

Лемма 2 доказана.

Для оценки второго слагаемого в (1) воспользуемся результатом Н. Шахайдаровой [2], который сформулируем в терминах, введенных в предыдущем разделе.

Лемма 3. *При всех* n

$$\sup_x |\varphi_{nj}(x) - \varphi(x)| \leqslant n^{-1/2} C \max\{1, A_j^3\}\, \sigma_j^{-3}\beta_j, \qquad j = 1, 2.$$

Лемма 4. *При всех* n

$$\sup_x |(p_{n1}*p_{n2} - p_1*p_2)(x)| \leqslant n^{-1/2} C A_{1,2} (\sigma_1\sigma_2)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{2} \sigma_j^{-3}\beta_j + \right.$$

$$\left. + n^{-1/2} A_{1,2}\sigma_1^{-3}\beta_1\sigma_2^{-3}\beta_2 \right).$$

Доказательство. Имеем

$$\sup_x |p_{n1}*p_{n2}(x) - p_1*p_2(x)| \leqslant \sup_x |(p_{n1} - p_1)*(p_{n2} - p_2)(x)| +$$

$$+ \sup_x |(p_{n1} - p_1)*p_2(x)| + \sup_x |(p_{n2} - p_2)*p_1(x)|. \tag{5}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$p_{nj}(x) = (2\sqrt{x}\,\sigma_j)^{-1} (\varphi_{nj}(\sqrt{x}\,\sigma_j^{-1}) + \varphi_{nj}(-\sqrt{x}\,\sigma_j^{-1}));$$

$$p_j(x) = (\sqrt{x}\,\sigma_j)^{-1} \varphi(\sqrt{x}\,\sigma_j^{-1}); \qquad x > 0,\ j = 1, 2. \tag{6}$$

Из (6) и леммы 3 вытекает, что

$$\sup_x |(p_{n1} - p_1)*(p_{n2} - p_2)(x)| = (4\sigma_1\sigma_2)^{-1} \sup_x \left| \int\limits_0^x [(x-t)\,t]^{-1/2} \times \right.$$

$$\times \left[\varphi_{n1}(\sqrt{x-t}\,\sigma_1^{-1}) + \varphi_{n1}(-\sqrt{x-t}\,\sigma_1^{-1}) - \varphi(\sqrt{x-t}\,\sigma_1^{-1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(-\sqrt{x-t}\,\sigma_1^{-1})\right] \left[\varphi_{n2}(\sqrt{t}\,\sigma_2^{-1}) + \varphi_{n2}(-\sqrt{t}\,\sigma_2^{-1}) - \varphi(\sqrt{t}\,\sigma_2^{-1}) - \right.$$

$$\left. \left. - \varphi(-\sqrt{t}\,\sigma_2^{-1})\right] dt \right| \leqslant n^{-1} C \max\{1; A_1^3\} \max\{1, A_2^3\}\, \sigma_1^{-4}\beta_1\sigma_2^{-4}\beta_2. \tag{7}$$

Аналогично получаем неравенство

$$\sup_x |(p_j - p_{nj})*p_m(x)| \leqslant n^{-1/2} C \max\{1, A_j^3\}\, \sigma_m^{-1}\sigma_j^{-4}\beta_j, \tag{8}$$

где $j, m = 1, 2$. Из (5), (7) и (8) следует оценка леммы 4.

Лемма 5. *При всех* n

$$\delta_n \leqslant (\sigma_1\sigma_2)^{-1} \left[\Delta_n^{(2)} + n^{-1/2} C A_{1,2} \left(\sum_{j=1}^{2} \sigma_j^{-3}\beta_j + n^{-1/2} A_{1,2}\sigma_1^{-3}\beta_1\sigma_2^{-3}\beta_2 \right) \right]. \tag{9}$$

Доказательство. Справедливость оценки (9) непосредственно вытекает из лемм 1, 2 и 4.

Утверждения теорем 1—4 следуют из леммы 5 и теорем 1—4 [3] соответственно.

Замечание. Существует пример, обосновывающий наличие множителя σ_2^{-1} в оценках δ_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в l_2 для случая независимых координат.— Вторая Вильнюсская конф. по теории вероятностей и математической статистике, 1977, т. 2, с. 68—69.
2. **Шахайдарова Н.** Равномерные, локальные и глобальные теоремы для плотностей.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1966, вып. 5, с. 90—91.
3. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных векторов со значениями в пространстве l_2.— В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978, с. 153—182.

ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. ЮРИНСКИЙ

В работе рассматривается предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ решений краевых задач для уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = f,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon u_\varepsilon + f,$$

где

$$L_\varepsilon v = \sum_{i,j} a_{ij}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}} + \sum_i b_i(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x^{(i)}} + c(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon)\, v;$$

$$v = v(\bar{x});\ \bar{x} = \{x^{(0)}, \ldots, x^{(n)}\} \in R^{n+1},$$

а коэффициенты $a_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$, ... представляют собой гладкие случайные поля, периодические по переменным $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ и удовлетворяющие по переменной $y^{(0)}$ условию сильного перемешивания.

Основные результаты работы — теоремы о сближении решений u_ε краевых задач для оператора L_ε с решениями U усредненных задач для оператора L_0 с гладкими и не зависящими от случая коэффициентами в том смысле, что $\sup|u_\varepsilon(\bar{x} - U(\bar{x})| \to 0$ по вероятности. Формулировки и доказательства этих теорем приведены в разделе 3.

Усреднению недивергентных уравнений с неслучайными периодическими быстроосциллирующими коэффициентами посвящена работа [1] (другими путями этот результат получен в [2]). Метод усреднения для уравнений в дивергентной форме рассматривался, например, в [2, 3—10].

Ниже используется метод [2, 3, 10]. Основные трудности, связанные с его применением,— построение быстроосциллирующих поправок к решению усредненной задачи, представляющих собой решения вспомогательных задач для главной части оператора L_ε. Построению этих поправок посвящены разделы 1, 2. В разделе 4 результаты используются для изучения слабой сходимости распределений, связанных с оператором L_ε диффузионных процессов к мере в пространстве непрерывных функций, порожденной усредненным оператором.

Автор благодарен за консультации Т. И. Зеленяку и С. В. Успенскому.