P-п. н. непрерывен с вероятностью 1, обращается в 0 на границе I_{z_0}. Кроме того, для любых $z_1, z_2 \in I_{z_0}$, $z_1 \leqslant z_2$, $\lambda \in R^d$

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left\{\langle\lambda, \beta(z_1, z_2]\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2\cdot|(z_1, z_2]|\right\}\Big/ G_{z_1}^{z_0}\right\} = \mathbf{E}\left\{\exp\left\{\langle\lambda, \beta(z_1, z_2]\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left\langle\lambda, \int\limits_{(z_1, z_2]} \left(\sigma^{-1}(u)\right)^* a(u)\,\sigma(u)\cdot\lambda du\right\rangle\right\}\Big/ G_{z_1}^{z_0}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Отсюда следует, что β — z_0-процесс броуновского движения. Соотношение «c» доказывается так же, как в теореме 3.3 [1], с использованием свойства IV.

Обратно, если θ удовлетворяет соотношениям «a», «b», «c», то он является сильным e-мартингалом ввиду IV и того, что β — сильный e-мартингал, связанный с единичной матрицей ($a \equiv E$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stroock D. W., Varadhan S. R. S.** Diffusion processes with continuous Coefficients (I).— Comm. on Pure and Applied Math., 1969, v. 22, N 3.
2. **Гихман И. И., Пясецкая Т. Е.** Об одном классе стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих двупараметрический белый шум.— В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. Киев, 1977, с. 71—92.
3. **Tudor C.** A theorem concerning the existence of the weak solution of the stochastic equation with continuous coefficients in the plane.— Revue Roumain de Mathématiques Pure et Appliquées, 1977, v. 22, N 9.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975.
5. **Дуб Дж. Л.** Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
6. **Cairoli R.** Une inegalite pour Martingales a indices multiples et ses Applicationes.— Lecture Note in Mathematics, 1970, v. 124, p. 1—27.
7. **Мейер П.-А.** Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
8. **Cairoli R., Walsh J. B.** Stochastic integral in the plane.— Acta Math., 1975, v. 134, p. 111—183.

О КВАДРАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Г. П. КАРЕВ

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ $\ldots$, $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр, и для любого n X_n — $\mathfrak{F}_n$-измеримая случайная величина такая, что $E|X_n| < \infty$. Обозначим

$$S_n^2(X) = X_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})^2,\ S^2(X) = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(X_k - X_{k-1})^2.$$

Величина $S(X)$ называется квадратической вариацией случайной последовательности $X = \{X_n\}$.

Свойства квадратической вариации мартингалов исследовались во многих работах (см. [1—7]). Так, Аустин [1] доказал, что если X — L_1-ограниченный мартингал, то

$$S(X) < \infty \text{ почти всюду,} \tag{1}$$

а Буркхольдер [2, 3] установил, что для любого $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}(S(X) \geqslant \lambda) \leqslant \frac{c}{\lambda}\sup\mathbf{E}|X_n|,\ c = \text{const} \leqslant 3. \tag{2}$$

В данной статье мы укажем условия, при которых аналогичные соотношения выполняются для произвольных случайных последовательностей.

Обозначим $X_n^* = \max_{k\leqslant n} |X_k|$; $\mu = \inf(n : X_n^* > \lambda)$; $\varepsilon_k = \mathbf{E}(X_{k+1} - X_k \mid \mathfrak{F}_k)$.

Лемма. *Для любого* $n \geqslant 1$

$$\mathbf{E}S^2_{\mu\wedge n-1} \leqslant 2\lambda\mathbf{E}\,|X_{\mu\wedge n-1}| - 2\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k. \qquad (3)$$

Доказательство. Пользуясь тождеством Дуба

$$S^2_{n-1} + X^2_{n-1} = 2X_nX_{n-1} - 2\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(X_k - X_{k-1}),$$

получаем

$$\mathbf{E}S^2_{\mu\wedge n-1} = 2\mathbf{E}X_{\mu\wedge n}X_{\mu\wedge n-1} - \mathbf{E}X^2_{\mu\wedge n-1} - 2\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k. \qquad (4)$$

Оценим $2X_{\mu\wedge n}X_{\mu\wedge n-1} - X^2_{\mu\wedge n-1}$. Обозначим $(\mu = k) = \chi\{\omega : \mu(\omega) = k\}$. Тогда

$$2X_{\mu\wedge n}X_{\mu\wedge n-1} - X^2_{\mu\wedge n-1} = \sum_{k=1}^{n}(\mu = k)\,X_{k-1}(2X_k - X_{k-1}) +$$
$$+ (\mu > n)\,X_{n-1}(2X_n - X_{n-1}) \leqslant \lambda\cdot 2\,|X_\mu|\,(\mu \leqslant n) -$$
$$- X^2_{\mu-1}(\mu \leqslant n) + X^2_n(\mu > n,)$$

так как $|X_\mu| > \lambda > 0$; $2X_{n-1}X_n - X^2_{n-1} \leqslant X^2_n$. Отсюда

$$2X_{\mu\wedge n}X_{\mu\wedge n-1} - X^2_{\mu\wedge n-1} \leqslant 2\lambda\,|X_\mu|\,(\mu \leqslant n) + \lambda\,|X_n|\,(\mu > n) \leqslant 2\lambda\,|X_{\mu\wedge n}|,$$

что вместе с (4) дает (3).

Теорема 1. *Для всех* $\lambda > 0$

$$\lambda\mathbf{P}(S_{n-1} > \lambda) \leqslant 3\mathbf{E}\,|X_{\mu\wedge n}| - \frac{2}{\lambda}\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k.$$

Доказательство. $\mathbf{P}(S_{n-1} > \lambda) \leqslant \mathbf{P}\left(S_{n-1} > \lambda,\quad X^*_{n-1} \leqslant \lambda\right) + \mathbf{P}\left(\mathbf{X}^*_{n-1} > \lambda\right)$. Очевидно, $\mathbf{P}\left(X^*_{n-1} > \lambda\right) \leqslant \mathbf{E}(X_\mu(\mu < n))$. Далее, $\left(S_{n-1} > \lambda,\ X^*_{n-1} \leqslant \lambda\right) \subseteq (S_{\mu\wedge n-1} > \lambda)$. Поэтому

$$\lambda\mathbf{P}\left(S_{n-1} > \lambda,\ X^*_{n-1} \leqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\left(S^2_{\mu\wedge n-1}\right) \leqslant 2\mathbf{E}\,|X_{\mu\wedge n}| - \frac{2}{\lambda}\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k$$

в силу леммы. Итак,

$$\lambda\mathbf{P}(S_{n-1} > \lambda) \leqslant 2\mathbf{E}\,|X_{\mu\wedge n}| - \frac{2}{\lambda}\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k + \mathbf{E}(X_\mu(\mu < n)) \leqslant$$
$$\leqslant 3\mathbf{E}\,|X_{\mu\wedge n}| - \frac{2}{\lambda}\mathbf{E}\sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k,$$

что и требовалось.

Замечание 1. Теорема 1 приводит к неравенству Буркхольдера (2), если X — мартингал.

Теорема 2. *Пусть* $\sup(X_{n+1} - X_n) \in L_1$. *Тогда* $S^2(X)$ *интегрируема на любом множестве, где* $\sup|X_n|$ *ограничен и ряд* $\Sigma X_k\varepsilon_k$ *ограничен снизу. В частности,* $S(X) < \infty$ *почти всюду на множестве*

$$\{\sup|X_n| < \infty\} \cap \left\{\inf_n \sum_{k=1}^{n} X_k\varepsilon_k > -\infty\right\}.$$

Доказательство. Пусть $M = \mathbf{E}\sup(X_{n+1} - X_n)$. Тогда

$$2EX_{\mu\wedge n}X_{\mu\wedge n-1} - EX^2_{\mu\wedge n-1} \leqslant 2\lambda E\left((\mu \leqslant n)(X_\mu - X_{\mu-1} + X_{\mu-1}\right) +$$
$$+ \lambda EX_n(\mu > n) \leqslant 2\lambda(M + \lambda E(\mu \leqslant n)) + \lambda^2 E(\mu > n) \leqslant 2(\lambda M + \lambda^2).$$

В силу равенства (4)

$$\mathbf{E}S^2_{\mu\wedge n-1} \leqslant 2(\lambda M + \lambda^2) - 2 \sum_{k<\mu\wedge n} X_k\varepsilon_k. \tag{5}$$

Обозначим $t = \inf\left(n : \sum_{k=0}^{n} X_k\varepsilon_k < -K = \mathrm{const}\right)$. Тогда $\mathbf{E}S^2_{\mu\wedge t-1} \leqslant$ $\leqslant 2(\lambda M + \lambda^2 + K)$, откуда следует утверждение теоремы.

Замечание 2. Условие $\sup(X_{n+1} - X_n) \in L_1$ можно заменить условием $\sup X_n \in L_1$. В этом случае вторая часть теоремы вытекает из теоремы 1.

Результат Аустина [1] состоит в том, что квадратическая вариация $S(X)$ L_1-ограниченного мартингала квадратично интегрируема на любом множестве, где $\sup|X_n|$ ограничен. В [5, т. III, 1.4] доказано более сильное утверждение: на том же множестве $S^2(X)$ экспоненциально интегрируема.

Пусть $X_n \geqslant 0$ для всех n. Обозначим $X^* = \sup X_n$; $Q_n = X_n/X^*_n$; $\delta_n = \mathbf{E}(Q_{n+1} - Q_n)|\mathfrak{F}_n$. Покажем, что $S^2(X)$ экспоненциально интегрируема на любом множестве, где ограничены X^* и $\sup\limits_n\left|\sum_{k=0}^{n} Q_k\delta_k\right|$. Точнее, справедлива следующая теорема, в доказательстве которой мы следуем [5].

Теорема 3. *Пусть* $\tau = \inf\left(n : \left|\sum_{k=0}^{n} Q_k\delta_k\right| > \frac{M}{2}\right)$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\left[(X^* < \lambda)\exp\left(\frac{1}{8(1+M)\lambda^2}\sum_{k=1}^{\tau}(X_k - X_{k-1})^2\right)\right] \leqslant 2e^{\frac{1}{4(1+M)}}.$$

Доказательство. В [5, т. III, 1, 2] доказано, что если A_n — неубывающая случайная последовательность, такая, что

$$\mathbf{E}(A_n - A_{k-1}|\mathfrak{F}_k) \leqslant B = \mathrm{const} < 1 \text{ для всех } n \geqslant k \geqslant 1, \tag{6}$$

то

$$\mathbf{E}(\exp(A_n - A_{k-1})\,|\,\mathfrak{F}_k) \leqslant \frac{1}{1-B}. \tag{7}$$

Положим $A_n = \sum_{k=1}^{n}(Q_k - Q_{k-1})^2$. Имеем

$$A_n - A_{k-1} = Q_n^2 - Q_{k-1}^2 - 2\sum_{s=k}^{n} Q_{s-1}(Q_s - Q_{s-1}) \leqslant Q_n^2 + Q_{k-1}^2 - 2\sum_{s=k+1}^{n} Q_{s-1}(Q_s - Q_{s-1}),$$

откуда

$$E(A_n - A_{k-1}\,|\,\mathfrak{F}_k) \leqslant 2 - E\left(\sum_{s=k}^{n-1} Q_s\delta_s|\mathfrak{F}\right). \tag{8}$$

Далее, $X_n - X_{n-1} = X_n^* - X_{n-1}^* + X_{n-1}^*(Q_n - Q_{n-1})$, поэтому $(X_n - X_{n-1})^2 \leqslant$ $\leqslant 2X_n^*(X_n^* - X_{n-1}^*) + 2X_nX_n^*(Q_n - Q_{n-1})^2$, и

$$\frac{1}{X^*}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k - X_{k-1})^2}{X_k^*} \leqslant 2 + 2\sum_{k=1}^{n}(Q_k - Q_{k-1})^2. \tag{9}$$

Заметим, что $\sup\limits_{k<\tau}\left|\sum_{s=k}^{\tau-1} Q_s\delta_s\right| \leqslant M$. Поэтому из (8) и (9) вытекает, что при $\alpha < 1/4(1+M)$ последовательность

$$Y_n = \frac{\alpha}{X^*}\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\frac{(X_k - X_{k-1})^2}{X_k^*}$$

удовлетворяет условиям (6); согласно (7), имеем

$$E\left(\exp\frac{\alpha}{X^*}\sum_{k=1}^{\tau}\frac{(X_k-X_{k-1})^2}{X_n^*}\right)\leqslant\frac{e^{2\alpha}}{1-4\alpha(1+M)},$$

а при $\alpha=1/8(1+M)$ получаем

$$E\left[(X^*<\lambda)\exp\left(\frac{1}{8(1+M)\lambda^2}\sum_{k=1}^{\tau}(X_{k+1}-X_k)^2\right)\right]\leqslant 2e^{1/4(1+M)}.$$

Отсюда следует ограниченность

$$\mathbf{E}\left[(X^*<\lambda)\exp\left(\frac{1}{8(1+M)\lambda^2}S_\tau^2\right)\right],$$

так как $X_0^2\leqslant\lambda^2$ на множестве $\{X^*<\lambda\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D. G. Austin.** A sample function property of martingales.— Ann. Math. Stat., 1966, v. 37, N 5, (1966), p. 1369—1397.
2. **D. L. Burkholder.** Martingale trandforms.— Ann. Math. Stat., 1966, v. 37, N 6, p. 1494—1504.
3. **D. L. Burkholder.** Distribution function inequalities for martingales.— Ann. Probab., 1973, v. 1, N 1, p. 19—42.
4. **B. I. Davis.** On the integrability of martingale square functions.— Israel J. Math., 1970, v. 8, N 2, p. 187—190.
5. **A. M. Garsia.** Martingal Inequalities. Seminar Note on Recent Rogress, 1973.
6. **P.-A. Meyer.** Matringales and stochastic integrals I.— In: Lecture Notes in Math., 1972, N 284.
7. **Новиков А. А.** Мартингальные неравенства.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов. Ч. II. Друскининкай, 1974, Вильнюс, 1975, с. 89—126.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. НАГАЕВ

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (с. в.), принимающие значения в сепарабельном банаховом пространстве B, $S_n=\sum_1^n X_i$, $S_{kj}=\sum_{k+1}^{j} X_i$. Норму в пространстве B будем обозначать символом $|\cdot|$.

Цель настоящей статьи — получение оценок для вероятностей $\mathbf{P}(|S_n|\geqslant u)$ (теоремы 1, 2, 3, следствие 3). Эти оценки формулируются в несколько других терминах, нежели в работах [1, 2]. Вместо $\mathbf{E}|S_n|$ используется величина u_0, которая определяется соотношением $\mathbf{P}(|S_n|\geqslant u_0)\leqslant\alpha$, где α — некоторая фиксированная постоянная. Ясно, что u_0 можно выбрать так, что $u_0\leqslant E|S_n|/\alpha$.

Не столь очевидно то, что $\mathbf{E}|S_n|$ оценивается сверху в терминах u_0 и $\sum_1^n \mathbf{E}|\mathbf{X}_j|^2$ (следствие 5, см. также [10]).

Что касается применяемого нами метода доказательства, то он также отличается от методов [1, 2]. Его можно рассматривать как модификацию метода, который использовался в работе [3, гл. VI, § 3].

Напомним, что с. в. X со значениями в B называется **симметричной**, если X и $-X$ одинаково распределены. С. в. X^s называется **симметриза-**