КЛАССИФИКАЦИЯ СТЕПЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ПО ЭЛЕМЕНТАРНЫМ СВОЙСТВАМ

А. Г. МЯСНИКОВ, В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ

Цель настоящей статьи — показать тесную связь между проблемами изоморфизма и элементарной эквивалентности в классе степенных нильпотентных групп. По модулю проблемы изоморфизма получена, в частности, полная классификация по элементарным свойствам (свойствам, которые могут быть записаны на языке узкого исчисления предикатов) нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга. Эта классификация и результат Р. А. Саркисяна [1] о разрешимости проблемы изоморфизма в классе таких групп позволили доказать алгоритмическую разрешимость проблемы элементарной эквивалентности для нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга. Основным инструментом при получении модельных результатов служит теорема 5.2, гарантирующая при некоторых естественных ограничениях существование степенного изоморфизма между абстрактно изоморфными группами.

Все результаты этой статьи справедливы в соответствующих формулировках и для рациональных алгебр в силу известной связи, установленной А. И. Мальцевым [2], между категориями нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп и рациональных нильпотентных алгебр.

До сих пор классификация по элементарным свойствам известна была только для двух классов групп: абелевых групп [3] — теорема В. Шмелевой, и классических линейных групп [4] — результаты А. И. Мальцева. В частности, хорошо известно, что любые две абелевы $\mathbf{Q}$-группы элементарно эквивалентны.

§ 1. СТЕПЕННЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

В этом параграфе мы повторим некоторые определения и факты, касающиеся степенных групп; часть из них содержится в работах [5, 6].

Как обычно, символами $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ будем обозначать множество натуральных чисел, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел.

Пусть $\mathfrak{o}$ — биномиальное кольцо, т. е. область целостности, содержащая $\mathbf{Z}$ в качестве подкольца и вместе с каждым элементом $\lambda \in \mathfrak{o}$ все биномиальные коэффициенты:

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!},\ n \in \mathbf{N},$$

Определение. Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется $\mathfrak{o}$-*степенной*, если для любых x из G и λ из $\mathfrak{o}$ однозначно определен элемент $x^\lambda \in G$, причем выполняются следующие аксиомы ($x, y, x_1, \ldots, x_n$ — произвольные элементы из G; λ, μ — произвольные элементы из $\mathfrak{o}$):

I. $x^1 = x,\ x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu,\ x^{\lambda\mu} = (x^\lambda)^\mu$;

II. $y^{-1}x^\lambda y = (y^{-1}xy)^\lambda$;

III. $x_1^\lambda x_2^\lambda \cdot \ldots \cdot x_n^\lambda = (x_1 \ldots x_n)^\lambda \tau_2(x)^{\binom{\lambda}{2}} \ldots \tau_m(x)^{\binom{\lambda}{m}}$,

где $\tau_k(x)$ — k-е слово Петреску от $x_1, \ldots, x_n$. Опишем более подробно слова Петреску. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис свободной группы F. Для каждого натурального k k-е слово Петреску $\tau_k(x_1, \ldots, x_n) = \tau_k(x)$ определяется рекуррентно из соотношения

$$x_1^k \ldots x_n^k = \tau_1(x)^k \tau_2(x)^{\binom{k}{2}} \ldots \tau_{k-1}(x)^{\binom{k}{k-1}} \tau_k(x).$$

В частности, $\tau_1(x) = x_1 \ldots x_n$.

Через $\gamma_i(G)$, $Z_i(G)$ будем обозначать соответственно i-й член нижнего, верхнего центрального ряда группы G, $\gamma_1(G) = G$, $Z_1(G) = Z(G)$ — центр группы G. Хорошо известно (см., например, [7]), что для любого натурального k $\tau_k(x) \in \gamma_k(F)$.

Если группа G абелева, то аксиомы I—III сводятся к обычным аксиомам модуля над кольцом о, т. е. абелевы о-степенные группы — это в точности модули над кольцом о.

Подгруппу о-степенной группы G будем называть *о-степенной подгруппой*, если она замкнута относительно возведения в степень λ, $\lambda \in$ о. Пусть H — подгруппа G, ее о-замыкание H_o есть наименьшая о-степенная подгруппа группы G, содержащая H. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — элементы группы G. Запись гр$(g_1, \ldots, g_n)_o$ означает о-замыкание подгруппы, порожденной элементами $g_1, \ldots, g_n$. В случае гр$(g_1, \ldots, g_n)_o = G$ элементы $g_1, \ldots, g_n$ будем называть *порождающими группы* G, а группу G — конечно порожденной степенной группой. Если H — нормальная о-степенная подгруппа группы G, то на множестве смежных классов G по H естественным образом вводится структура о-степенной группы.

Отметим несколько полезных формул. Пусть G — о-степенная группа, x, y из G, λ из о. Следствием аксиомы III является равенство

$$[x, y^\lambda] = [x, y]^\lambda \tau_2^{\binom{\lambda}{2}}(y\,[y^{-1}, x], y) \ldots \tau_m^{\binom{\lambda}{m}}(y\,[y^{-1}, x], y). \tag{1}$$

В самом деле, $[x, y^\lambda] = x^{-1}y^{-\lambda}xy^\lambda = (y[y^{-1}, x])^\lambda y^\lambda$, и применяем аксиому III. Если $x \in \gamma_k(G)$, $y \in \gamma_l(G)$, то как следствие формулы (1) получаем

$$[x, y^\lambda] \equiv [x, y]^\lambda \bmod \gamma_{k+l+l}(G).$$

Совершенно аналогично

$$[x^\lambda, y] \equiv [x, y]^\lambda \bmod \gamma_{k+l+k}(G),$$

$k, l \geqslant 1$, поэтому, объединяя предыдущие сравнения,

$$[x, y^\lambda] \equiv [x^\lambda, y] \equiv [x, y]^\lambda \bmod_{k+l+1}(G). \tag{2}$$

Пусть теперь $[x, y] = z$, где $z \in Z(G)$. Тогда с помощью формулы (1) получаем равенство

$$[x^\lambda, y] = [x, y^\lambda] = z^\lambda. \tag{3}$$

При помощи формул (1)—(3) легко доказываются две следующие леммы из работы [5].

Лемма 1.1. *Пусть H — подгруппа о-степенной группы G. Классы нильпотентности подгрупп H и H_o совпадают.*

Лемма 1.2. *Пусть G — о-степенная группа, тогда $\gamma_i(G)$ и $Z_i(G)$ являются о-степенными подгруппами группы G.*

Следующая лемма иллюстрирует механизм возведения в степень и будет полезна при изучении гомоморфизмов степенных групп.

Лемма 1.3. *Для любых n, $m \in \mathbf{N}$ существует такое слово*

$$v_{n,m}(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{i_1}^{f_1(t)} x_{i_2}^{f_2(t)} \ldots x_{i_s}^{f_s(t)},$$

где $x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ — многочлены над $\mathbf{Q}$ от переменной t, что для любой о-степенной группы G ступени нильпотентности $\leqslant m$ и для любых $g_1, \ldots, g_n$ из G, $\lambda \in$ о выполняется равенство

$$(g_1 \ldots g_n)^\lambda = v_{n,m}(g_1, \ldots, g_n, \lambda).$$

Доказательство проведем индукцией по ступени нильпотентности m. Если $m=1$, то $v_{n,1}(x_1,\dots,x_n,t)=x_1^t\dots x_n^t$. Пусть G — произвольная о-степенная группа ступени нильпотентности m. По аксиоме III для любых $g_1,\dots,g_n$ из G, $\lambda\in$ о имеем равенство

$$(g_1\dots g_n)^\lambda=g_1^\lambda\dots g_n^\lambda\tau_m(g)^{-\binom{\lambda}{m}}\dots\tau_2(g)^{-\binom{\lambda}{2}},$$

где, как обычно $g=(g_1,\dots,g_n)$. По лемме 1.2 элементы $\tau_m(g)^{-\binom{\lambda}{m}}$, ... $\dots,\tau_2(g)^{-\binom{\lambda}{2}}$ лежат в коммутанте группы G. По индукции можно считать, что $\tau_k(g)^{-\binom{\lambda}{n}}$ переписываются при помощи слов $v_{r_k,m-1}(x_1,\dots$ $\dots,x_{r_k},t)$, где r_k — длина слова $\tau_k(x)$, $2\leqslant k\leqslant m$. Если в слове $\tau_k(x)$ на i-м и j-м местах переменные совпадают, то отождествим переменные x_i и x_j в слове $v_{r_k,m-1}(x_1,\dots,x_{r_k},t)$; полученные слова обозначим через $W_k(x_1,\dots,x_n,t)$. Ясно, что

$$(g_1,\dots,g_n)^\lambda=v_{n,1}(g_1,\dots,g_n,\lambda)W_m\left(g_1,\dots,g_n,\binom{\lambda}{m}\right)\dots W_2\left(g_1,\dots,g_m\binom{\lambda}{2}\right).$$

Для завершения доказательства осталось в каждом многочлене — показателе слова $W_k(x_1,\dots,x_n,t)$ произвести замену переменной t на многочлен $\binom{t}{k}=\frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G — о-степенная группа, G_1, G_2 — о-степенные подгруппы группы G. Тогда группа G_3, порожденная подгруппами G_1 и G_2, также является о-степенной подгруппой группы G.*

Доказательство. Подгруппа G_3 состоит из всевозможных произведений вида $g_1,\dots,g_n$, где каждый сомножитель g_i лежит либо в подгруппе G_1, либо в подгруппе G_2. Достаточно доказать, что для любого произведения такого вида и любого $\lambda\in$ о элемент $(g_1\dots g_n)^\lambda$ принадлежит подгруппе G_3. По лемме 1.3

$$(g_1,\dots,g_n)^\lambda=v_n(g_1,\dots,g_n,\lambda)=a_{i_1}^{f_1(\lambda)}\dots a_{i_s}^{f_s(\lambda)},\ a_i\in\{g_1,\dots,g_n\}.$$

G_1 и G_2 — о-степенные группы, поэтому принадлежность элемента $a_{i_1}^{f_1(\lambda)}\dots a_{i_n}^{f_n(\lambda)}$ подгруппе G_3 очевидна. Следствие доказано.

Порядком элемента g о-степенной группы назовем идеал $I_g=\{\lambda\in$ о$\,|\,g^\lambda=1\}$. Говорят, что о-степенная группа G *не имеет о-кручения*, если порядок любого неединичного элемента из G равен нулевому идеалу. В частности, если о — поле, то любая о-степенная группа не имеет о-кручения.

Подмножество M из G называется о-*изолированным*, если из включения $x^\lambda\in M$ следует $x\in M$ для любых $x\in M$, $\lambda\neq 0$ из о. Очевидно, фактор-группа по некоторой нормальной о-степенной подгруппе не имеет кручения тогда и только тогда, когда эта подгруппа о-изолирована в G.

Лемма 1.4. *Пусть G — о-степенная группа без о-кручения. Тогда*

а) *равенство $x^\lambda=y^\lambda$, $\lambda\neq 0$ влечет $x=y$;*

б) *если $[x^\lambda,y^\mu]=1$, то $[x,y]=1$.*

Доказательство см. [5].

Следствие. *В о-степенной группе без о-кручения следующие множества о-изолированы: $C_G(N)$ — централизатор любого подмножества N из G, $Z_i(G)$ — любой член верхнего центрального ряда группы G.*

Заметим, что члены нижнего центрального ряда о-степенной группы не всегда о-изолированы. Однако в случае, когда о — поле, любая о-степенная подгруппа о-изолирована.

Упорядоченный набор элементов $u_1,\dots,u_n$ назовем *мальцевской базой* о-степенной группы G, если 1) каждый элемент x из G можно единственным способом представить в виде

$$x = u_1^{t_1(x)} \dots u_n^{t_n(x)}, \ t_i(x) \in \mathfrak{o};$$

2) пусть $G_i = \text{гр}(u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)_\mathfrak{o}$, тогда цепочка подгрупп $G = G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots \geqslant G_n \geqslant 1$ образует центральный ряд группы G. Элементы $t_1(x), \dots, t_n(x)$ кольца $\mathfrak{o}$ называется *координатами элемента x в базе* $u_1, \dots, u_n$. Наряду с записью $x = u_1^{t_1(x)} \dots u_n^{t_n(x)}$ будем также использовать векторную запись $x = u^{t(x)}$.

Если в п. 1) определения мальцевской базы отказаться от требования единственности, то получим *слабую мальцевскую базу группы G.*

Теорема 1.1. *Каждая конечно порожденная степенная группа G имеет слабую мальцевскую базу.*

Доказательство следует непосредственно из леммы 1.5.

Лемма 1.5. *Пусть $G = \text{гр}(y_1, \dots, y_n)_\mathfrak{o}$, тогда каждый элемент группы G представим в виде $v_1^{\xi_1} \dots v_m^{\xi_m}$, где $\xi_i \in \mathfrak{o}$ и v_i — i-й базисный коммутатор от $y_1, \dots, y_n$.*

Доказательство индукцией по ступени нильпотентности группы G.

Координаты произведения $t_i(xy)$ элементов x и y в фиксированной слабой мальцевской базе группы G являются функциями от $2n$ переменных $t_k(x)$, $t_s(y)$, если элементы x и y пробегают всю группу G. Если $\lambda \in \mathfrak{o}$, то координаты $t_i(x^\lambda)$ являются функциями от $n+1$ переменной $t_i(x)$, λ. Обозначим через $\mathfrak{o}_\mathbf{Z}$ кольцо частных кольца $\mathfrak{o}$, в котором обращаются элементы из $\mathbf{Z}$.

Теорема 1.2. Пусть *G — $\mathfrak{o}$-степенная группа со слабой мальцевской базой $u_1, \dots, u_n$ и координатами $t_1(x), \dots, t_n(x)$. Тогда координатные функции умножения и возведения в степень являются многочленами над кольцом $\mathfrak{o}_\mathbf{Z}$. Более точно, если $x, y \in G$, $\lambda \in \mathfrak{o}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $t_i(xy)$ — многочлен над $\mathfrak{o}_\mathbf{Z}$ от $\{t_k(x), t_k(y) \mid k < i\} + t_i(x) + t_i(y)$, $t_i(x^\lambda)$ — многочлен над $\mathfrak{o}_\mathbf{Z}$, от λ и $\{t_k(x) \mid k < i\} + \lambda t_i(x)$.*

Для доказательства теоремы 1.2 нужно дословно повторить доказательство теоремы 6.5 из [6], заменяя кольцо $\mathbf{Z}$ на кольцо $\mathfrak{o}$.

Следствие. *Пусть $v(z_1, \dots, z_n)$ слово от переменных $z_1, \dots, z_n$. Подстановка вместо z_i элемента $x_i = u^{t(x_i)}$ группы G определяет в группе G элемент $w = v(x_1, \dots, x_n)$. Тогда координаты $t_i(w)$ элемента w вычисляются при помощи некоторых многочленов над $\mathfrak{o}_\mathbf{Z}$, которые будем обозначать $h_i(w)$.*

Пусть $G = \text{гр}(y_1, \dots, y_n)_\mathfrak{o}$ — конечно порожденная $\mathfrak{o}$-степенная группа. Через G_0 будем обозначать подгруппу $\text{гр}(y_1, \dots, y_n)_\mathbf{Z}$, если кольцо $\mathfrak{o}$ не содержит поля $\mathbf{Q}$ в качестве подкольца, и подгруппу $\text{гр}(y_1, \dots, y_n)_\mathbf{Q}$ — в противном случае. Ясно, что подгруппа G_0 зависит от выбора порождающих $y_1, \dots, y_n$ группы G.

Лемма 1.6. *Пусть $u_1, \dots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G_0. Тогда она является слабой мальцевской базой группы G.*

Доказательство. Пусть $G_i = \text{гр}(u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)_\mathfrak{o}$. Докажем, что ряд подгрупп $G = G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots \geqslant G_n \geqslant 1$ является центральным рядом группы G.

Подгруппы G_i нормальны в G. Действительно, достаточно доказать, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}$ элемент $u_j^{-\beta} u_i^\alpha u_j^\beta$ принадлежит подгруппе G_i. Имеем

$$u_j^{-\beta} u_i^\alpha u^\beta = (u_i [u_i, u_j^\beta])^\alpha.$$

Распишем коммутатор $[u_i, u_j^\beta]$ по формуле (1)

$$[u_i, u_j^\beta] = [u_i, u_j]^\beta \tau_2 (u_j [u_j^{-1}, u_i], u_j)^{\binom{\beta}{2}} \dots \tau_m (u_j [u_j^{-1}, u_i], u_j)^{\binom{\beta}{m}}.$$

Принадлежность правой части этого равенства подгруппе G_i очевидна.

Докажем, что $[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$. Переходя к фактор-группе $\bar{G} = G/G_{i+1}$, имеем $[\bar{u}_i, \bar{u}_j] = 1$ в $\bar{G}$, но тогда $[\bar{u}_i^{\alpha}, u_j^{\beta}] = [\bar{u}_i, \bar{u}_j]^{\alpha\beta} = 1$ для любого u_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Для окончания доказательства леммы осталось заметить, что $G_i/G_{i+1} \simeq \text{гр}(u_i)_{o}$.

Лемма 1.7. *Пусть* $G = \text{гр}(y_1, \ldots, y_n)_{o}$, $H = \text{гр}(x_1, \ldots x_n)_{o}$ — *конечно порожденные* o-*степенные группы. Если* $u_1, \ldots, u_k$ — *слабая мальцевская база группы* G_0, $v_1, \ldots, v_k$ — *слабая мальцевская база группы* H_0, *причем для любых* $1 \leqslant i, j \leqslant k$ $u_i^{-1}u_ju_i = u^{\xi(i,j)}$, $v_i^{-1}v_jv_i = v^{\xi(i,j)}$, *где* $\xi(i,j)$ *есть* k-*вектор над* $\mathbf{Q}$, *то в базах* u, v *координатные функции умножения и возведения в степень групп* G_0, H_0, G, H *можно задать одними и теми же многочленами с коэффициентами из поля* $\mathbf{Q}$.

Доказательство проводится по длине мальцевской базы и подобно доказательству теоремы 6.5 из [6].

Не всякая конечно порожденная o-степенная группа без o-кручения обладает мальцевской базой, не свободные конечно порожденные o-модули без кручения мальцевской базы не имеют.

Лемма 1.8. *Пусть* o — *кольцо главных идеалов. Тогда каждая конечно порожденная* o-*степенная группа* G, *не имеющая* o-*кручения, обладает мальцевской базой.*

Доказательство. Во-первых, каждая конечно порожденная степенная группа над нетеровым кольцом удовлетворяет условию максимальности для степенных подгрупп, т. е. каждая ее степенная подгруппа конечно порождена. Во-вторых, известно, что конечно порожденные модули без кручения над областью главных идеалов свободны. Отсюда следует, что факторы верхнего центрального ряда группы G являются свободными o-модулями конечного ранга. Ясно, что для них существуют мальцевские базы, а потому мальцевская база существует и для всей группы G. Лемма доказана.

Много примеров степенных групп с мальцевской базой доставляет конструкция пополнения конечно порожденных нильпотентных групп.

Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $u_1, \ldots, u_n$ — некоторая мальцевская база группы G (существование мальцевской базы для таких групп хорошо известно, для доказательства достаточно повторить рассуждения леммы 1.8). Тогда всякий элемент x из G единственным образом представим в виде

$$x = u_1^{\xi_1} \ldots u_n^{\xi_n} = u^{\xi}, \quad \xi_i \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $y = u^{\eta}$ — некоторый другой элемент из G и $xy = u^{o}$. Пусть еще $\lambda \in \mathbf{Z}$ и $x^{\lambda} = u^{\omega}$. Известно (см. теорему 1.2), что o_i, ω_i являются многочленами от ξ_i, η_i и ξ_i, λ соответственно. Так как многочлены o_i, ω_i целозначны, то они представимы в виде

$$o_i = \sum_j a_{ij} \binom{\xi_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\xi_j}{\alpha_j} \binom{\eta_1}{\beta_1} \cdots \binom{\eta_j}{\beta_j},$$

$$\omega_i = \sum_j b_{ij} \binom{\xi_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\xi_1}{\gamma_j} \binom{\lambda}{\delta_j},$$

где a_{ij}, b_{ij}, α_i, β_i, γ_i, $\delta_i \in \mathbf{Z}$, причем α_j, β_j, γ_j, $\delta_j \geqslant 0$. В качестве элементов новой группы G^{o} рассмотрим всевозможные формальные произведения u^{ξ} с показателями $\xi_1, \ldots, \xi_n$ из o, умножение и возведение в степень λ из o зададим с помощью многочленов $o_i(\xi, \eta)$ и $\omega_i(\xi, \lambda)$. При таком определении G^{o} становится o-степенной группой, так как аксиомы o-степенной группы, включая аксиомы группы, можно выразить в виде полиномиальных тождеств, которым должны удовлетворять многочлены $o_i(\xi, \eta)$ и $\omega_i(\xi, \lambda)$.

Конструкцию пополнения конечно порожденных нильпотентных групп без кручения можно обобщить на случай произвольных о-степенных нильпотентных групп с мальцевской базой. Пусть G — о-степенная группа с мальцевской базой $u_1, \ldots, u_n$; σ_i, ω_i, $i=1, \ldots, n$,— многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$. Возьмем произвольное биномиальное кольцо o_1, содержащее кольцо o в качестве подкольца. Тогда на множестве формальных произведений $u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in o_1$, при помощи многочленов o_i, ω_i можно задать структуру o_1-степенной группы. Полученную группу будем называть *o_1-пополнением группы G* и обозначать через G^{o_1}.

Отметим некоторые свойства группы G^{ϑ_1}, сразу вытекающие из конструкции пополнения.

Лемма 1.9. *Пусть G — ϑ-степенная группа с мальцевской базой $u_1, \ldots, u_n$, ϑ — биномиальное кольцо, содержащее кольцо ϑ в качестве подкольца. Тогда*

а) *ступени нильпотентности групп G и G^{o_1} совпадают,*

б) *$u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G^{o_1},*

в) *группа G^{o_1} не имеет кручения.*

Доказательство. Условия а) и б) очевидны. Докажем в). Пусть $\left(u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}\right)^\lambda = 1$, α_i, $\lambda \in o_1$, $\lambda \neq 0$. Расписывая это равенство по аксиоме III, получим

$$u_1^{\alpha_1\lambda} \ldots u_n^{\alpha_n\lambda} = \tau_2 (u^\alpha)^{\binom{\lambda}{2}} \ldots \tau_m (u^\alpha)^{\binom{\lambda}{m}}.$$

Правая часть лежит в подгруппе $G_2 = \text{гр}\,(u_2, \ldots, u_n)_{o_1}$, следовательно, $\alpha_1 = 0$ и доказательство завершает индукция по длине мальцевской базы. Лемма доказана.

Пусть k — произвольное фиксированное поле характеристики ноль. Для степенных групп над полем удобно использовать следующие определения. Систему элементов $\{\alpha_i | i \in I\}$ будем называть *независимой системой порождающих k-степенной группы G*, если они порождают группу G и линейно независимы по модулю коммутанта группы G. В нильпотентной группе элементы $\{a_i | i \in I\}$ порождают всю группу G тогда и только тогда, когда их образы $\{\bar{a}_i | i \in I\}$ при естественном отображении $G \to G/G'$ порождают группу G/G'. Поэтому система элементов $\{a_i | i \in I\}$ является независимой системой порождающих группы G тогда и только тогда, когда $\{\bar{a}_i | i \in I\}$ есть базис векторного пространства G/G' над k.

Рангом k-степенной группы G будем называть мощность независимой системы порождающих группы G и обозначать его $r(G)$. *Длиной k-степенной группы G конечного ранга* будем называть длину мальцевской базы группы G и обозначать ее $l_k(G)$. Для степенных групп над полем длина группы не зависит от выбора мальцевской базы.

Лемма 1.10. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда выполнены следующие условия:*

1) *из всякой слабой мальцевской базы группы G можно выбрать мальцевскую базу группы G;*

2) *любая независимая система порождающих группы G продолжается до мальцевской базы группы G.*

Доказательство. Доказательство п. 1) проведем индукцией по длине слабой мальцевской базы группы G. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G, $G_i = \text{гр}(a_i, \ldots, a_n)_k$. Очевидно, что $u_2, \ldots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G_2. По предположению индукции из базы $u_2, \ldots, u_n$ выберем мальцевскую базу $v_2, \ldots, v_m$, $m \leqslant n$, группы G_2. Если элемент u_1 лежит в подгруппе G_2, то $G = G_2$ и $v_2, \ldots$ $\ldots, v_m$ — искомая мальцевская база группы G. Пусть $u_1 \notin G_2$. В этом случае $u_1, v_2, \ldots, v_m$ является искомой мальцевской базой группы G. Действительно, равенство $u_1^{\xi_1} v_2^{\xi_2} \ldots v_m^{\xi_m} = u_1^{\eta_1} v_2^{\eta_2} \ldots v_m^{\eta_m}$ по модулю подгруппы G_2 имеет вид $u_1^{\xi_1} = u_1^{\eta_1}$ или $u_1^{\xi_1 - \eta_1} = 1$. Группа G/G_2 без k-кручения, следовательно, $\xi_1 = \eta_1$. Равенство остальных коэффициентов $\xi_2 = \eta_2, \ldots$ $\ldots, \xi_m = \eta_m$ следует из единственности представления элемента в мальцевской базе $v_2, \ldots, v_m$. 2) следует из 1) и леммы 1.5.

Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Группу G будем называть $\mathbf{Q}$-*определенной*, если существует мальцевская база группы G, в которой умножение и возведение в степень задается многочленами с рациональными коэффициентами.

Подгруппу G_0 группы G будем называть *равномерной подгруппой группы* G, если выполнены следующие условия:

а) G_0 — $\mathbf{Q}$-*группа конечного ранга*;

б) $l_{\mathbf{Q}}(G_0) = l_k(G)$;

в) k-замыкание подгруппы G_0 равно группе G.

Например, пусть G — $\mathbf{Q}$-группа конечного ранга, G_k — k-пополнение группы G, тогда G — равномерная подгруппа группы G^k.

В работе [8] А. И. Мальцева построен пример конечномерной нильпотентной алгебры Ли над полем вещественных чисел, не имеющей базиса с рациональными структурными константами. В силу известного соответствия между конечномерными нильпотентными алгебрами Ли над полем k и k-степенными группами конечного ранга этот пример показывает, что существуют степенные группы конечного ранга над полем, не являющиеся $\mathbf{Q}$-определенными.

Теорема 1.3. *k-степенная группа G конечного ранга является $\mathbf{Q}$-определенной тогда и только тогда, когда существует равномерная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть группа G $\mathbf{Q}$-определена; $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, в которой умножение и возведение в степень задается при помощи многочленов с рациональными коэффициентами. Докажем, что подгруппа $G_0 = \text{гр}(u_1, \ldots, u^n)_{\mathbf{Z}}$ является равномерной подгруппой группы G. Выполнимость условий а) и в) в группе G_0 очевидна. Достаточно доказать, что $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G_0; в этом случае $l_{\mathbf{Q}}(G_0) = l_k(G)$ и подгруппа G_0 является равномерной. Многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$ имеют рациональные коэффициенты, поэтому множество $U = \left\{u_1^{\alpha_1} \ldots \ldots u_n^{\alpha_n} \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Q}\right\}$ замкнуто относительно умножения и возведения в рациональную степень. Следовательно, группа G_0 как множество совпадает с множеством U. Элементы $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, следовательно, представление любого элемента группы G_0 в виде $u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbf{Q}$, единственно. Очевидно также, что подгруппы $G_i = \text{гр}(u_i, \ldots, u_n)_{\mathbf{Q}}$ образуют центральный ряд группы G_0.

Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G, $u_1, \ldots, u_n$ — произвольная мальцевская база группы G_0. По лемме 1.6 система элементов $u_1, \ldots, u_n$ является слабой мальцевской базой группы G. По лемме 1.7 умножение и возведение в степень в группе G в базе $u_1, \ldots, u_n$ задается теми же многочленами, что и в группе G_0, следовательно, многочленами с рациональными коэффициентами. Осталось доказать, что $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. По лемме 1.10 из системы элементов $u_1, \ldots$ $\ldots, u_n$ можно выбрать мальцевскую базу группы G. Длина этой базы не может быть меньше n по условию, поэтому $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. Теорема доказана.

Отметим в качестве следствий некоторые факты, попутно доказанные в теореме 1.3.

С л е д с т в и е 1. *Пусть G_0 — равномерная подгруппа k-степенной группы G, тогда $G = G_0^k$.*

С л е д с т в и е 2. *k-степенная группа G конечного ранга является $\mathbf{Q}$-определенной тогда и только тогда, когда группа G есть k-пополнение некоторой $\mathbf{Q}$-группы конечного ранга.*

Л е м м а 1.11. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга, H — собственная k-степенная подгруппа группы G. Тогда*

$$l(H) < l(G),\ r(H) \leqslant l(H).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно для векторных пространств. В общем случае — индукцией по ступени нильпотентности G.

Л е м м а 1.12. *Пусть G — k-степенная группа. Тогда*

$$G = \overline{G} \times A,\ \text{где}\ A \leqslant Z(G), A \cap [G, G] = 1,\ Z(\overline{G}) \leqslant [\overline{G}, \overline{G}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{g_i | i \in I\}$ — максимальная система элементов группы G, линейно независимых по модулю подгруппы $G_1 = [G, G] \cdot Z(G)$, $\{a_j | j \in J\}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы $Z(G)$ по модулю подгруппы $G_2 = Z(G) \cap [G, G]$. Такие системы элементов существуют, так как подгруппы G_1 и G_2 являются k-степенными подгруппами группы G и фактор-группы G/G_1, G/G_2 — абелевы k-степенные группы, т. е. векторные пространства над k. Очевидно, что система элементов $\{g_i, a_j | i \in I,\ j \in J\}$ линейно независима по модулю подгруппы $[G, G]$. Положим $\overline{G} = \mathrm{гр}(g_i | i \in I)_k$, $A = \mathrm{гр}(a_j | j \in J)_k$. По построению подгруппа $\overline{G} \cdot A$ порождает группу G по модулю коммутанта $[G, G]$, G нильпотентна, хорошо известно (см. [6]), что в этом случае $G = \overline{G} \cdot A$. Требуемое разложение легко проверяется.

§ 2. ГОМОМОРФИЗМЫ СТЕПЕННЫХ ГРУПП

Пусть $\mathfrak{o}'$ — биномиальное подкольцо кольца $\mathfrak{o}$, G и H — $\mathfrak{o}$-степенные группы. Структура степенной группы позволяет среди всех гомоморфизмов G в H естественно выделить следующие подклассы гомоморфизмов.

1. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *$\mathfrak{o}'$-гомоморфизмом*, если $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$. В частности, любой гомоморфизм является $\mathbf{Z}$-гомоморфизмом, а если $\mathfrak{o}$ — поле, то и $\mathbf{Q}$-гомоморфизмом.

2. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *полулинейным гомоморфизмом*, если существует такой эндоморфизм θ кольца $\mathfrak{o}'$, что $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\alpha\theta}$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$.

3. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *почти $\mathfrak{o}'$-гомоморфизмом, если* $(g^\alpha)^\varphi \in \mathrm{гр}\ (g^\varphi)_{\mathfrak{o}'}$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$.

Каждая $\mathfrak{o}$-степенная группа является также и $\mathfrak{o}'$-степенной группой, поэтому, не уменьшая общности, в дальнейших рассмотрениях полагаем $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$. Для краткости гомоморфизмы второго типа будем называть C-гомоморфизмами, а гомоморфизмы третьего типа — N-гомоморфизмами. Среди гомоморфизмов каждого типа естественным образом определяются изоморфизмы и автоморфизмы. Например, C-гомоморфизм $\varphi : G \to H$ является C-изоморфизмом, если существует такой C-гомоморфизм $\psi : H \to G$, что $\psi\varphi = \mathrm{id}_H$, $\varphi\psi = \mathrm{id}_G$.

В леммах 2.1 и 2.2 собраны без доказательства несколько очевидных утверждений о введенных выше гомоморфизмах.

Л е м м а 2.1. *Если группы G и H не имеют $\mathfrak{o}$-кручения, то изоморфизм $\varphi : G \to H$ является C-изоморфизмом тогда и только тогда, когда* *существует автоморфизм θ кольца* о, *такой что* $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\alpha\theta}$ *для любых* $g \in G$, $\alpha \in$ о.

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *суперпозиция гомоморфизмов одного типа есть гомоморфизм этого же типа;*

б) *если обозначить* $\mathrm{Hom}_о(G, H)$, $\mathrm{Hom}_C(G, H)$, $\mathrm{Hom}_N(G, H)$ *соответственно множества всех* о*-гомоморфизмов,* C*-гомоморфизмов,* N*-гомоморфизмов* G *в* H, *то выполнены следующие включения:*

$$\mathrm{Hom}_о(G, H) \leqslant \mathrm{Hom}_C(G, H) \leqslant \mathrm{Hom}_N(G, H);$$

в) *пусть* F — *нормальная* о*-степенная подгруппа* H, *тогда естественный гомоморфизм* $\eta : H \to H/F$ *является* о*-гомоморфизмом.*

Лемма 2.3. *Пусть* G — *конечно порожденная нильпотентная группа без кручения,* H — *произвольная* о*-степенная группа. Тогда любой гомоморфизм* G *в* H *продолжается до* о*-гомоморфизма* $G^о$ *в* H.

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп. Очевидно, что $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — слабая мальцевская база в группе G^φ. По лемме 1.6 $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — слабая мальцевская база о-степенной группы $(G^\varphi)_о$. По лемме 1.7 координатные функции умножения и возведения в степень в группах $G^о$ и $(G^\varphi)_о$ можно задать одинаковыми многочленами. Естественное продолжение $\bar\varphi$ гомоморфизма φ на группу $G^о$

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{\bar\varphi} (u_1^\varphi)^{\alpha_1} \ldots (u_n^\varphi)^{\alpha_n}$$

определено корректно, так как $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы $G^о$. Гомоморфность отображения $\bar\varphi$ обеспечивается одинаковыми координатными функциями умножения и возведения в степень в группах $G^о$ и $(G^\varphi)^о$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $F_{m,n}$ — *свободная нильпотентная группа ранга* m *ступени нильпотентности* n, $x_1, \ldots, x_m$ — *базис группы* $F_{m,n}$. *Тогда для любой* о*-степенной группы* H *ступени нильпотентности* $\leqslant m$, *для любых* $y_1, \ldots, y_m \in H$ *отображение* $x_1 \to y_1, \ldots, x_m \to y_m$ *продолжается до* о*-гомоморфизма группы* $F_{m,n}^о$ *в группу* H.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi : G \to H$ — *изоморфизм* $\mathbf{Q}$*-определенных* k*-степенных групп конечного ранга,* G_0 — *равномерная подгруппа группы* G. *Тогда* k*-изоморфизм* $\psi : G \to H$, *совпадающий на подгруппе* G_0 *с изоморфизмом* φ, *существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $l_k(G) = l_k(H)$;

2) гр $(G_0^\varphi)_k = H$

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) очевидна.

Достаточность. Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G, $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G_0. По следствию 1 теоремы 1.3 группа G есть k-пополнение G_0^k группы G_0, поэтому $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. Пусть $H_0 = G_0^\varphi$. Изоморфизм φ является $\mathbf{Q}$-изоморфизмом группы G_0 на группу H_0, поэтому $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — мальцевская база группы H_0. По условию гр$(H_0)_k = H$ и $l(H_0) = l(G_0) = l(H)$, следовательно, H_0 — равномерная подгруппа группы H и, значит, $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — мальцевская база группы H. По лемме 2.3 гомоморфизм $\varphi : G_0 \to H$ продолжается до k-гомоморфизма $\psi : G_0^k \to H$, причем

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{\psi} (u_1^\varphi)^{\alpha_1} \ldots (u_n^\varphi)^{\alpha_n}.$$

Системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ и $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — мальцевские базы соответственно в группах G и H, следовательно, гомоморфизм ψ является k-изоморфизмом группы G на группу H, совпадающим на подгруппе G_0 с изоморфизмом φ. Теорема доказана.

Пусть H_1 — нормальная о-степенная подгруппа группы H. Запись $f \underset{H_1}{\equiv} h$ будет означать, что элементы f и h группы H лежат в одном смежном классе по подгруппе H_1. Все три вышеназванных типа гомоморфизмов G в H можно определить по модулю подгруппы H_1. Для этого достаточно в определениях 1 и 2 знак равенства заменить на $\overset{\equiv}{H_1}$, а в определении 3 включение понимать по модулю подгруппы H_1. Иначе говоря, гомоморфизм $\varphi : G \to H$ есть гомоморфизм одного из трех типов по модулю подгруппы H_1 тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\varphi\eta : G \to H/H_1$, где $\eta : H \to H/H_1$, имеет тот же тип.

Лемма 2.4. *Пусть для гомоморфизма $\varphi : G \to H$ существуют такой эндоморфизм θ кольца о и такая система порождающих $\{a_i | i \in I\}$ группы G, что $(a_i^{\alpha})^{\varphi} = (a_i^{\varphi})^{\alpha\theta}$ для любых $i \in I$, $\alpha \in$ о. Тогда φ есть C-гомоморфизм G в H.*

Доказательство. Пусть, как в лемме 1.3, $v_n(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{i_1}^{f_1(t)} \ldots x_{i_s}^{f_s(t)}$ — такое слово от переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, что для любых элементов $g_1, \ldots, g_n$ из G, $\lambda \in$ о выполняется равенство $(g_1, \ldots, g_n)^{\lambda} = v_n(g_1, \ldots, g_n, \lambda)$. Многочлены — показатели $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ в доказательстве леммы 1.3 получались из некоторых многочленов с целыми коэффициентами при помощи нескольких операций подстановки вместо переменной t биномиального коэффициента вида $\binom{t}{k}$, $k \in \mathbf{N}$. Заметим, что при любом ненулевом гомоморфизме θ кольца о подкольцо $\mathbf{Z}$ остается на месте, а биномиальный коэффициент $\binom{\lambda}{k}$ отображается в биномиальный коэффициент $\binom{\lambda\theta}{k}$. Поэтому верна цепочка равенств

$$\left[\left(a_{j_1}^{\alpha_1} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n}\right)^{\lambda}\right]^{\varphi} = v_n\left(a_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, a_{j_n}^{\alpha_n}, \lambda\right)^{\varphi} = v_n\left(\left(a_{j_1}^{\varphi}\right)^{\alpha_1\theta}, \ldots, \left(a_{j_n}^{\varphi}\right)^{\alpha_n\theta}, \lambda\theta\right) =$$
$$= \left[\left(a_{j_1}^{\varphi}\right)^{\alpha_1\theta} \ldots \left(a_{j_n}^{\varphi}\right)^{\alpha_n\theta}\right]^{\lambda\theta} = \left[\left(a_{j_1}^{\alpha_1} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n}\right)^{\varphi}\right]^{\lambda\theta}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть H_1 — нормальная степенная подгруппа группы H. Если в условиях леммы 2.4 выполняются сравнения $(a_i^{\alpha})^{\varphi} \underset{H_1}{\equiv} (a_i^{\varphi})^{\alpha\theta}$ для любых $\alpha \in$ о, $i \in I$, то φ есть C — гомоморфизм G в H по модулю H_1.*

Доказательство. Достаточно продолжить гомоморфизм на фактор-группу H/H_1 и применить лемму 2.4.

Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм о-степенных групп. Тогда о-степенную подгруппу Z группы будем называть *допустимой относительно* φ, если Z^{φ} — о-степенная подгруппа группы H. Если Z — допустимая подгруппа группы G относительно изоморфизма $\varphi : G \to H$, то изоморфизм φ будем называть изоморфизмом одного из трех вышеназванных типов по модулю подгруппы Z тогда и только тогда, когда φ и φ^{-1} являются гомоморфизмами этого же типа по модулю соответственно подгрупп Z^{φ} и Z.

Пусть G и H — неабелевы о-степенные группы без о-кручения, Z — о-изолированная о-степенная подгруппа группы G, лежащая в центре $Z(G)$. Тогда справедлива

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi : G \to H$ — изоморфизм групп, причем Z — допустимая подгруппа группы G относительно изоморфизма φ. Тогда если*

φ — N-изоморфизм по модулю Z, то φ является C-изоморфизмом по модулю Z.

Доказательство. Пусть $\varphi : G \to H$ есть N-изоморфизм по модулю Z. В рамках доказательства леммы 2.5 образ произвольного элемента a из G при изоморфизме φ будем обозначать через $\bar{a}$. Докажем, что подгруппа Z^φ также о-изолирована. Если элементы g из H и λ из о таковы, что $g^\lambda \in Z^\varphi$, то элемент $(g^\lambda)^{\varphi^{-1}}$ принадлежит подгруппе Z. По условию леммы φ^{-1} есть N-гомоморфизм по модулю Z, т. е. $(g^\lambda)^{\varphi^{-1}} \underset{Z}{\equiv} (g^{\varphi^{-1}})^\mu$ для некоторого $\mu \in$ о. В силу о-изолированности подгруппы Z элемент $g^{\varphi^{-1}} \in Z$, а значит, $g \in Z^\varphi$.

В дальнейшем все сравнения $\equiv$ понимаются по модулю Z или Z^φ в зависимости от контекста.

Для произвольного элемента g группы G, не лежащего в подгруппе Z, определим отображение θ_g кольца о в себя. А именно, в силу о-изолированности подгруппы Z^φ для любого $\alpha \in$ о элемент $\alpha\theta_g$ кольца о однозначно определяется из сравнения $(g^\alpha)^\varphi \equiv (g^\varphi)^{\alpha\theta}$. Ясно, что θ_g — эндоморфизм аддитивной группы кольца о.

Группа G неабелева, но нильпотентна, поэтому найдутся элементы a и b группы G такие, что $[a, b] \neq 1$ и $[a, b] \in Z(G)$. Подействуем изоморфизмом φ на тождества $[a^\alpha, b] = [a, b^\alpha]$, $\alpha \in$ о. Z^φ — центральная подгруппа группы H, следовательно, $[a^\varphi, b^\varphi]^{\alpha\theta_a} = [a^\varphi, b^\varphi]^{\alpha\theta_b}$. Группа H без о-кручения и $[a^\varphi, b^\varphi] \neq 1$, поэтому $\theta_a = \theta_b$. Аналогично тождества $[a^\alpha, b^\beta] = [a, b^{\alpha\beta}]$, $\alpha, \beta \in$ о, влекут мультипликативность θ_a, т. е. θ_a — эндоморфизм кольца о. Аналогично изоморфизму φ^{-1} и элементу a^φ группы H соответствует эндоморфизм τ_a кольца о в себя. Очевидно, что для любого $\alpha \in$ о

$$a^{\alpha\theta_a\tau_a} \equiv a^\alpha \text{ и } (a^\varphi)^{\alpha\tau_a\theta_a} \equiv (a^\varphi)^\alpha.$$

Группы Z и Z^φ о-изолированы, следовательно, для любого элемента $\alpha \in$ о имеем равенство $\alpha\tau_a\theta_a = \alpha\theta_a\tau_a$, т. е. θ_a — автоморфизм кольца о.

Пусть g — произвольный элемент группы, не лежащий в подгруппе Z. Докажем, что $\theta_a = \theta_g$.

Предположим, что $[a, g] \neq 1$. Элемент $[a, g]$ лежит в некотором скачке $Z_k(G) \backslash Z_{k-1}(G)$ верхнего центрального ряда. Подгруппы $Z_i(G)$ — о-изолированные о-степенные подгруппы группы G, поэтому изоморфизм φ индуцирует изоморфизм

$$\psi: G/Z_{k-1}(G) \to H/Z_{k-1}(H)$$

о-степенных групп без о-кручения. Ясно, что ψ является N-изоморфизмом по модулю образа подгруппы Z в фактор-группе G/Z_{k-1}. Подгруппа Z — центральная, поэтому либо $Z_{k-1} = 1$ и $\varphi = \psi$, либо образ подгруппы Z равен единице в фактор-группе G/Z_{k-1}. Для доказательства равенства $\theta_a = \theta_g$ осталось повторить рассуждения, проведенные ранее для элементов a и b.

Пусть теперь $[a, g] = 1$. Заметим, что в этом случае $(ag)^\lambda = a^\lambda g^\lambda$ и $(\overline{ag})^\lambda = \bar{a}^\lambda \bar{g}^\lambda$. Доказательство разобьем на две части: $ag \in Z$ и $ag \notin Z$. Пусть $ag \in Z$, тогда $a \equiv g^{-1}$ и $\bar{a} \equiv \overline{g^{-1}}$, поэтому для любого $\lambda \in$ о

$$\bar{a}^{\lambda\theta_a} \equiv \overline{g^{-1}}^{\lambda\theta_{g^{-1}}} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_{g^{-1}}}.$$

В силу о-изолированности подгруппы Z^φ $\lambda\theta_a = \lambda\theta_{g^{-1}}$, т.е. $\theta_a = \theta_{g^{-1}}$. Отображение θ_g является эндоморфизмом аддитивной группы кольца о, поэтому $\theta_g = \theta_{g^{-1}} = \theta_a$.

Допустим, $ag \notin Z$. Если $g \in Z(G)$, то $[ag, b] = [ab] \neq 1$, следовательно, $\theta_{ag} = \theta_b = \theta_a$. Для любого $\lambda \in \mathrm{o}$ вычислим образ элемента $(ag)^\lambda$ при изоморфизме φ:

$$\overline{(ag)^\lambda} \equiv \overline{ag}^{\lambda\theta_{ag}} \equiv \overline{ag}^{\lambda\theta_a} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\,\bar{g}^{\lambda\theta_a}.$$

С другой стороны, $\overline{(ag)^\lambda} \equiv \overline{a^\lambda g^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\bar{g}^{\lambda\theta_g}$, откуда $\bar{g}^{\lambda\theta_a} \equiv \bar{g}^{\lambda\theta_g}$ и, следовательно, $\theta_a = \theta_g$. Остался неразобранным случай $ag \notin Z$ и $g \notin Z(G)$. Элемент g нецентральный, поэтому θ_g — автоморфизм кольца о. Опять двумя способами выпишем образ элемента $(ag)^\lambda$, $\lambda \in \mathrm{o}$, при изоморфизме φ:

$$\overline{(ag)^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\bar{g}^{\lambda\theta_g},\ \overline{(ag)^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_{ag}}\bar{g}^{\lambda\theta_{ag}},$$

откуда $\bar{a}^{\lambda\theta_a - \lambda\theta_{ag}} = \bar{g}^{\lambda\theta_{ag} - \lambda\theta_g}$. Пусть $\lambda\theta_a - \lambda\theta_{ag} = \mu_1$, $\lambda\theta_{ag} - \lambda\theta_g = \mu_2$. Если один из элементов μ_1, μ_2 равен нулю, то равен нулю и второй, а значит, равны автоморфизмы θ_a и θ_g. Пусть $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Подействовав на равенство $\bar{a}^{\mu_1} = \bar{g}^{\mu_2}$ изоморфизмом φ^{-1}, получим $a^{\nu_1} = g^{\nu_2}$, где $\nu_1 = \mu_1\theta_a^{-1}$, $\nu_2 = \mu_2\theta_g^{-1}$. Для любого $\alpha \in \mathrm{o}$ выполнены следующие сравнения:

$$\overline{a^{\nu_1\alpha}} \equiv \bar{a}^{\nu_1\theta_a\cdot\alpha\theta_a} \equiv \left(\overline{a^{\nu_1}}\right)^{\alpha\theta_a},$$

$$\overline{g^{\nu_2\alpha}} \equiv \bar{g}^{\nu_2\theta_g\cdot\alpha\theta_g} \equiv \left(\overline{g^{\nu_2}}\right)^{\alpha\theta_g}.$$

Вспоминая, что $a^{\nu_1} \equiv g^{\nu_2}$, получим $\alpha\theta_a = \alpha\theta_g$, и равенство автоморфизмов θ_a и θ_g доказано.

Пусть $\{a_i | i \in I\}$ — система порождающих группы G. Если элемент a_i не лежит в подгруппе Z, то автоморфизм θ_{a_i} определен и равен θ_a. Ясно, что для любого порождающего a_j, лежащего в подгруппе Z, сравнение $\overline{a_i^\lambda} \underset{Z}{\equiv} \bar{a}_j^{\lambda\theta_a}$ выполняется для всех $\lambda \in \mathrm{o}$. Таким образом, существуют автоморфизм θ_a кольца о и система порождающих $\{a_i | i \in I\}$ группы G такие, что $(a_i^\lambda)^\varphi \underset{Z}{\equiv} (a_i^\varphi)^{\alpha\theta_a}$ для всех $i \in I$, $\lambda \in \mathrm{o}$.

По следствию леммы 2.4 изоморфизм φ является C-гомоморфизмом по модулю Z.

Аналогично изоморфизм φ^{-1} является C-гомоморфизмом по модулю Z. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\varphi: G \to H$ есть N-изоморфизм о-степенных групп без о-кручения по модулю центра $Z(G)$. Тогда φ является C-изоморфизмом по модулю $Z(G)$.*

Следствие 2. *Пусть $\varphi: G \to H$ есть N-изоморфизм неабелевых о-степенных групп без о-кручения, тогда φ является C-изоморфизмом.*

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

Цель данного параграфа — напомнить некоторые определения и факты из теории моделей, а также условиться относительно обозначений. Все необходимые сведения содержатся в книге [7].

Функциональная сигнатура $\langle \cdot^2, ({}^{-1})^1; e \rangle$ называется *групповой сигнатурой*, а функциональная сигнатура $\langle +^2, \cdot^2; 0,1 \rangle$ называется *кольцевой сигнатурой*.

Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ. Множество всех замкнутых формул сигнатуры Σ, истинных на A, называется *элементарной теорией системы A* и обозначается $\mathrm{Th}(A)$. Алгебраические системы

A и B сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* ($A \equiv B$), если и только если $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$.

Пусть I — множество, D — ультрафильтр на I, A_i, $i \in I$, — семейство алгебраических систем. Тогда ультрапроизведение семейства A_i, $i \in I$, по ультрафильтру D обозначается через $\prod_I A_i/D$. Ультрастепень системы A по ультрафильтру D будем обозначать через A^I/D.

При классификации элементарных теорий степенных нильпотентных групп важную роль играет следующая

Теорема 3.1. (Кейслер — Шелах). *Алгебраические системы A и B сигнатуры Σ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени A^I/D и B^I/D изоморфны.*

Доказательство см. в [7].

Лемма 3.1. *Пусть G — конечно порожденная* о*-степенная группа; $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, I — множество, D — ультрафильтр на I. Тогда ультрастепень $G^I/D = \tilde{G}$ есть $\tilde{\mathrm{o}}$-пополнение группы G, где через $\tilde{\mathrm{o}}$ обозначена ультрастепень* o^I/D.

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ есть ультрастепень G_I/D, $\prod_I G$ и $\prod_I \mathrm{o}$ — декартовы степени соответственно группы G и кольца о. Для элементов $g \in \prod_I G$, $\alpha \in \prod_I \mathrm{o}$ покомпонентным возведением в степень определим элемент $g^\alpha \in \prod_I G$, а именно, $g^\alpha(i) = g(i)^{\alpha(i)}$, $i \in I$. Заметим, что кольцо $\tilde{\mathrm{o}}$ биномиально, так как существование произвольного биномиального коэффициента в кольце о легко записывается формулой кольцевой сигнатуры. Для элемента $\tilde{g} \in \tilde{G}$, элемента $\tilde{\alpha}$ из $\tilde{\mathrm{o}}$ определим элемент $\tilde{g}^{\tilde{\alpha}}$ из $\tilde{G}$ как класс эквивалентности элемента g^α из $\prod_I G$. Определение операции возведения в степень $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathrm{o}}$ корректно и удовлетворяет всем аксиомам $\tilde{\mathrm{o}}$-степенной группы. Пусть $\varphi: G \to \tilde{G}$ и $\psi: \mathrm{o} \to \tilde{\mathrm{o}}$ — естественные диагональные вложения. Если $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, ω_i, σ_i — многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$, то система элементов $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ является мальцевской базой $\tilde{\mathrm{o}}$-степенной группы $\tilde{G}$ с многочленами $\omega_i^{\psi_1}, \mathrm{o}_i^{\psi_1}$, где ψ_1 — продолжение гомоморфизма $\psi: \mathrm{o} \to \tilde{\mathrm{o}}$ до гомоморфизма колец частных $\psi_1: \mathrm{o}_Z \to \tilde{\mathrm{o}}_Z$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть группа G разлагается в прямое произведение $G = G_1 \times G_2$, I — множество, D — ультрафильтр на I. Тогда*

$$G^I/D = G_1^I/D \times G_2^I/D.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 3.3. *Пусть алгебраические системы A_i, B_i, $i = 1, 2$, попарно элементарно эквивалентны: $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$. Тогда существуют множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени A_1^I/D и B_1^I/D, а также A_2^I/D и B_2^I/D* изоморфны.

Доказательство. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени $\overline{A}_1 = A_1^I/D$ и $\overline{B}_1 = B_1^I/D$ изоморфны. Очевидно, что ультрастепени $\overline{A}_2 = A_2^I/D$ и $\overline{B}_2 = B_2^I/D$ элементарно эквивалентны. Опять по теореме Кейслера — Шелаха найдется множество J и ультрафильтр F на J такие, что ультрастепени $\overline{A}_2^J/F$ и $\overline{B}_2^J/F$ изоморфны. Тем более изоморфны ультрастепени $\overline{A}_1^J/F$ и $\overline{B}_1^J/F$. По теореме о конечной итерации (см. [7]) существуют такие множество K и ультрафильтр S на K, что итерированные ультрастепени $\overline{A}_i^J/F$ и $\overline{B}_i^J/F$, $i = 1, 2$, являются простыми ультрастепенями A_i^K/S и B_i^K/S. Множество K и ультрафильтр S на K — искомые. Лемма доказана.

Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ. Множество элементов M системы A называется *формульным*, если существует формула $\Phi(x)$ сигнатуры Σ такая, что $M = \{a \in A \mid A \vDash \Phi(a)\}$.

Множество элементов M системы A называется *относительно формульным*, если существует конечный набор элементов $b_1, \ldots, b_n$ системы A и формула $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ сигнатуры Σ такие, что $M = \{a \in A \mid A \vDash \Phi(a, b_1, \ldots, b_n)\}$.

Лемма 3.4. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ, M — формульное множество элементов системы A, выделяющееся формулой Φ сигнатуры Σ. Тогда в любой ультрастепени A^I/D формула Φ выделяет множество M^I/D.*

Доказательство леммы следует из фильтруемости любой формулы по любому ультрафильтру.

§ 4. МОДЕЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ

В этом параграфе мы будем изучать в некотором смысле простейшие — «модельные» степенные группы (см. [9]).

Определение. *Модельной о-степенной группой M(о)* будем называть нильпотентную ступени два неабелеву 2-порожденную о-степенную группу без о-кручения.

Укажем некоторые очевидные свойства группы M(о). Пусть a, b — порождающие группы M(о), $c = [b, a] \neq 1$, тогда

а) $[M(\text{о}), M(\text{о})] = Z(M(\text{о})) = \text{гр}(c)\text{о}$;

б) a, b, c — мальцевская база группы M(о);

в) умножение и возведение в степень в базе a, b, c записываются следующим образом:

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma)(a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}) = a^{\alpha+\alpha'} b^{\beta+\beta'} c^{\gamma+\gamma'+\beta\alpha'},$$

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma)^\lambda = a^{\alpha\lambda} b^{\beta\lambda} c^{\gamma\lambda + \binom{\lambda}{2}\alpha\beta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \lambda$ — элементы кольца о.

Пусть UT_3(о) — группа унитреугольных матриц степени 3 над кольцом о. Определим возведение в степень $\lambda \in \text{о}$ в группе UT_3(о) при помощи формулы $g^\lambda = \sum_{i=0}^{2} \binom{\lambda}{i} (g - e)^i$, где $g \in UT_3(\text{о})$, e — матричная единица.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что отображение

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является о-изоморфизмом группы M(о) на группу UT_3(о).

Определение. Нильпотентную группу G ступени нильпотентности два будем называть *квазимодельной* и обозначать K(о), если G содержит подгруппу G_1, которая является модельной группой M(о), и $G = M(\text{о}) \cdot Z(G)$.

В частности, если о — поле, то о-степенная группа G есть группа K(о) тогда и только тогда, когда $G = M(\text{о}) \times A$, где $A \leqslant Z(G)$.

Укажем некоторые условия, выполняющиеся в модельных (квазимодельных) группах, отталкиваясь от которых, мы попытаемся охарактеризовать все группы, элементарно эквивалентные данной модельной (квазимодельной) группе.

Для произвольной модельной группы $M(\mathfrak{o})$ до конца параграфа зафиксируем следующие обозначения: a, b — порождающие группы $M(\mathfrak{o})$, $c=[a, b]$, $A=\text{гр}(a)_{\mathfrak{o}}$, $B=\text{гр}(b)_{\mathfrak{o}}$. Пусть G есть группа $M(\mathfrak{o})$ для некоторого биномиального кольца $\mathfrak{o}$. Тогда группа G удовлетворяет следующим условиям:

M1) G — нильпотентная группа ступени два;

M2) G порождается двумя абелевыми подгруппами A и B;

$$A \cap B = 1,\ a \in A,\ b \in B,\ [a, b] \neq 1;$$

M3) $[a, B] = Z(G)$, причем $[a, b_1] = [a, b_2]$ тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2$;

M4) $[A, b] = Z(G)$, причем $[a_1, b] = [a_2, b]$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$;

Группы $A=\text{гр}(a)_{\mathfrak{o}}$, $B=\text{гр}(b)_{\mathfrak{o}}$, $C=\text{гр}(c)_{\mathfrak{o}}$ $\mathfrak{o}$-изоморфны между собой, причем условия M3, M4 как раз и дают эти изоморфизмы:

$$x \in A_1 \xrightarrow{\psi_1} [x, b] \in C, \quad y \in B \xrightarrow{\psi_2} [a, y] \in C. \tag{O_1}$$

Пусть $\varphi = \psi_1\psi_2^{-1}$, тогда $\varphi : A \to B$. Отметим три важных свойства изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ. Во-первых, $\forall \alpha \in \mathfrak{o}$

$$a^{\alpha} \xrightarrow{\varphi} b^{\alpha}.$$

Во-вторых, $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{o}$

$$\left(a^{\alpha\beta}\right)^{\psi_1} = \left[a^{\alpha\beta}, b\right] = \left[a^{\alpha}, b^{\beta}\right] = \left[a^{\alpha}, (a^{\beta})^{\varphi}\right].$$

Следовательно,

$$a^{\alpha\beta} = \left[a^{\alpha}, (a^{\beta})^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}. \tag{O_2}$$

Аналогично

$$b^{\alpha\beta} = \left[(b^{\alpha})^{\varphi^{-1}}, b^{\beta}\right]^{\psi_2^{-1}}. \tag{O_3}$$

На группе A можно естественно ввести структуру кольца, определив кольцевое умножение по формуле $a^{\alpha} \circ a^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, очевидно, что в этом случае кольцо A изоморфно кольцу $\mathfrak{o}$. Точно так же вводится структура колец на B и C, причем изоморфизмы φ, ψ_1, ψ_2 становятся кольцевыми изоморфизмами. Оказывается эту ситуацию можно обобщить, пользуясь формулами (O_1), (O_2) и (O_3), на случай произвольной группы, удовлетворяющей условиям M1—M4.

Пусть группа G, A, B — подгруппы группы G, $a \in A$, $b \in B$ таковы, что выполняются условия M1—M4. Обозначим $Z(G)$ через C. Изоморфизмы групп $\psi_1 : A \to C$, $\psi_2 : B \to C$ определим по формуле (O_1). Положим $\varphi = \psi_1\psi_2^{-1}$, тогда $\varphi : A \to B$, причем $a^{\varphi} = b$. В терминах этих изоморфизмов определим операцию $\circ$ на абелевых группах A, B, C.

Пусть $a_1, a_2 \in A$, определим $a_1 \circ a_2$ по формуле:

$$a_1 \circ a_2 = \left[a_1, a_2^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}. \tag{O_4}$$

Пусть $b_1, b_2 \in B$, определим $b_1 \circ b_2$ по формуле:

$$b_1 \circ b_2 = \left[b_1^{\varphi^{-1}}, b_2\right]^{\psi_2^{-1}}. \tag{O_5}$$

Пусть $c_1, c_2 \in C$, тогда $c_1 = [a_1, b]$, $c_2 = [a_2, b]$; определим $c_1 \circ c_2$ по формуле

$$c_1 \circ c_2 = \left[a_1, a_2^{\varphi}\right] = \left[c_1^{\psi_1^{-1}}, \left(c_2^{\psi_1^{-1}}\right)^{\varphi}\right]. \tag{O_6}$$

Непосредственно проверяется, что групповое умножение дистрибутивно относительно операции $\circ$ в группах A, B, C. Таким образом на абелевых группах A, B, C определена структура кольца, где роль кольцевого умножения играет операция $\circ$, причем элементы a, b, $[a, b]$ — кольцевые единицы соответственно в кольцах A, B, C, а изоморфизмы ψ_1, ψ_2 и φ являются кольцевыми изоморфизмами.

В группе $M(\mathrm{o})$ кольца A, B, C изоморфны кольцу о, значит, по крайней мере биномиальны, однако в случае произвольной группы G, удовлетворяющей условиям M1—M4, мы имеем в наличии только дистрибутивность операции $\circ$ относительно группового умножения и существования кольцевой единицы. Поэтому в терминах изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ допишем к M1—M4 условия, гарантирующие нам биномиальность, например, кольца A.

M5) Ассоциативность: $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$,

$$\left[\left[a_1, a_2^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}, a_3^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}} = \left[a_1 \left[a_2, a_3\right]^{\psi_1^{-1}\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}.$$

M6) Коммутативность: $a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1$,

$$\left[a_1, a_2^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}} = \left[a_2, a_1^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}.$$

M7) Отсутствие делителей нуля: $a_1 \neq 0 \;\&\; a_2 \neq 0 \rightarrow a_1 \circ a_2 \neq 0$,

$$a_1 \neq 1 \;\&\; a_2 \neq 1 \rightarrow \left[a_1, a_2^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}} \neq 1.$$

M8) Биномиальность кольца $A: a_1 \in A, k \in \mathbf{N} \rightarrow \binom{a_1}{k} \in A$, $\forall a_1 \in A$, $\forall k \in \mathbf{N}$ существует $a_2 \in A$ такой, что

$$a_2^{k!} = a_1 \circ \left(a_1 a^{-1}\right) \circ \ldots \circ \left(a_1 a^{-k+1}\right).$$

Расписывать это равенство подробно слишком громоздко, поэтому оставим его в такой форме, напомним только, что a — единичный элемент кольца A.

Чтобы кольцо A было полем, необходимо добавить еще одно условие:

M9) Существование обратного: $\forall a_1 \in A$, $a_1 \neq 0$, существует $a_2 \in A$, $\left[a_1, a_2^{\varphi}\right] = a$.

Лемма 4.1. *Группа G является модельной группой $M(\mathrm{o})$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* M1—M8; *причем G является модельной группой над полем тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* M1—M9.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что модельная группа $M(\mathrm{o})$ удовлетворяет условиям M1—M4. При помощи формулы (O_2) легко проверяется выполнимость в группе $M(\mathrm{o})$ условий M5—M8, а если о — поле, то M5—M9.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условиям M1—M8. Тогда A, B, $Z(G)$ — биномиальные кольца относительно группового умножения и операции $\circ$, определенной по формулам (O_4), (O_5), (O_6). Пусть

$$\psi_1 : A \rightarrow Z(G),\ \psi_2 : B \rightarrow Z(G),\ \varphi : A \rightarrow B$$

есть изоморфизмы колец, построенные по формуле (O_1). Введем на G структуру A-степенной группы. Каждый элемент группы G единственным образом представим в виде $\alpha\beta\gamma$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in Z(G)$. Действительно, пусть $\alpha\beta\gamma = 1$, тогда $\alpha = \gamma^{-1}\beta^{-1}$ и выполнена следующая цепочка равенств:

$$1 = \left[\gamma^{-1}\beta^{-1}, \alpha\right] = \left[\beta^{-1}, \alpha\right] = [\alpha, \beta] = \left[\alpha, \left(\beta^{\varphi^{-1}}\right)^{\varphi}\right],$$

следовательно,

$$\alpha\circ\beta^{\varphi^{-1}}=\left[\alpha,\left(\beta^{\varphi^{-1}}\right)^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}=1,$$

но единица группы G — это нулевой элемент кольца A. Кольцо A без делителей нуля, поэтому либо $\alpha=1$, либо $\beta=1$. Пусть, например, $\alpha=1$, тогда $\beta\gamma=1$, если $\beta\neq 1$, то $\beta\in B\cap Z(G)$ — противоречие с условием М3. Случай $\beta=1$ разбирается аналогично. Пусть теперь $\alpha\beta\gamma=\alpha_1\beta_1\gamma_1$, тогда

$$1=\alpha_1\beta_1\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1\gamma^{-1}=\alpha_1\alpha^{-1}\beta_1\beta^{-1}[\beta_1,\alpha^{-1}]\gamma_1\gamma^{-1},$$

следовательно, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$.

Определим в группе G возведение в степень $\lambda\in A$ по формуле

$$(\alpha\beta\gamma)^{\lambda}=\alpha\circ\lambda\beta\circ\lambda^{\varphi}\gamma\circ\lambda^{\psi_1}\cdot\binom{\lambda}{2}^{\psi_1}\circ\alpha^{\psi_1}\circ\beta^{\psi_2}.$$

Возведение в степень $\lambda\in A$ удовлетворяет всем аксиомам A-степенной группы. Действительно, фактически умножение и возведение в степень в группе G происходит при помощи многочленов с рациональными коэффициентами, которые совпадают с многочленами умножения и возведения в степень модельной группы. Очевидно, что $G=\text{гр}(a,b)_A$ и G не имеют A-кручения. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Группа G изоморфна группе $M(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда $G=M(\mathfrak{o}_1)$, причем кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}_1$ изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, что группа G удовлетворяет условиям М1—М8, следовательно, по лемме 4.1 $G=M(\mathfrak{o}_1)$. Изоморфизм $\varphi: G\to M(\mathfrak{o})$ индуцирует изоморфизм $\bar{\varphi}$ центров $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$. Непосредственно проверяется, что изоморфизм $\bar{\varphi}$ мультипликативен относительно операции $\circ$, определенной на $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$, поэтому является изоморфизмом колец $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$. Для завершения доказательства осталось заметить, что кольцо $Z(G)$ изоморфно кольцу $\mathfrak{o}_1$, а кольцо $Z(M(\mathfrak{o}))$ изоморфно кольцу $\mathfrak{o}$. Лемма доказана.

Для изучения элементарных теорий модельных групп условия М1—М9 удобно несколько модифицировать.

В модельной группе $M(\mathfrak{o})=G$ обозначим через A_1 подгруппу $\text{гр}(a)_{\mathfrak{o}}\cdot Z(G)$, через B_1 — подгруппу $\text{гр}(b)_{\mathfrak{o}}\cdot Z(G)$. Отметим, что A_1 — это централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b в группе G. Тогда условия М1—М9 относительно подгрупп A_1 и B_1 принимают следующий вид.

М1.1. G нильпотентна ступени 2. Кроме того, существуют такие элементы a и b группы G, что $[a,b]\neq 1$. Пусть A_1 — централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b.

М1.2. G порождается подгруппами A_1 и B_1. Подгруппы A_1 и B_1 — абелевы нормальные подгруппы группы G, причем $A_1\cap B_1=Z(G)$.

М1.3. $[a,B_1]=Z(G)$, причем $[a,b_1]=[a,b_2]$ тогда и только тогда, когда $b_1=b_2(\text{mod}\,Z(G))$.

М1.4. $[A_1,b]=Z(G)$, причем $[a_1,b]=[a_2,b]$ тогда и только тогда, когда $a_1=a_2(\text{mod}\,Z(G))$.

При помощи формулы (O_1) определяем гомоморфизмы $\psi_1: A_1\to Z(G)$, $\psi_2: B_1\to Z(G)$, которые индуцируют изоморфизмы групп $\bar{\psi}_1: A_1/Z(G)\to Z(G)$, $\bar{\psi}_2: B_1/Z(G)\to Z(G)$. Пусть $\bar{\varphi}=\bar{\psi}_1\cdot\bar{\psi}_2^{-1}$. С помощью формул (O_4) — (O_6) на группах $A_1/Z(G)$, $B_1/Z(G)$, $Z(G)$ вводится структура кольца, а изоморфизмы ψ_1, ψ_2, φ становятся изоморфизмами колец. Условия М1.5—М1.9 получаются из условий М5—М9 заменой изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ на изоморфизмы $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_2$, $\bar{\varphi}$.

Лемма 4.3. *Существует замкнутая формула Φ групповой сигнатуры такая, что группа G удовлетворяет условиям* М1.1.—М1.9 *тогда и только тогда, когда Φ истинна на G.*

Доказательство. Пусть группа G вместе с подгруппами A_1, B_1 и элементами a, b удовлетворяет условиям М1.1—М1.9. Для каждого пункта М1.i условий М1.1—М1.9 построим формулу $\Phi i(a, b)$, «равносильную» условию М1.i, в которой a и b участвуют в качестве констант. Более точно, пусть Σ— групповая сигнатура, добавим к сигнатуре символы a и b в качестве символов предметных констант и обозначим новую сигнатуру через Σ'. Допуская некоторую вольность обозначений, мы через a и b обозначаем как символы сигнатуры Σ', так и выделенные элементы группы G. Однако это не вызовет недоразумений, если мы будем считать, что во всех формулах a и b означают символы сигнатуры Σ', а в остальных случаях — выделенные элементы группы G. По каждому пункту условий М1.1—М1.9 построим замкнутую формулу Φ_i сигнатуры Σ' такую, что группа G с выделенными элементами a и b удовлетворяет условию М1.i тогда и только тогда, когда в G истинна формула Φ_i, причем сигнатурные символы a, b интерпретируются элементами a, b группы G. Формулы Φ_i пишутся естественным образом для каждого пункта условий М1.1—М1.9. Сделаем это, например, для п. М1.2 и М1.6.

Построим формулу Φ_2. Группа G порождается нормальными подгруппами A_1 и B_1, причем $A_1=C(a)$, $B_1=C(b)$, A_1 и B_1 — абелевы и $A_1\cap B_1=Z(G)$.

Подгруппы A_1 и B_1 нормальны в группе G тогда и только тогда, когда в группе G истинна следующая замкнутая формула сигнатуры Σ':

$$\Phi_{21}\overset{\mathrm{df}}{=}\forall x\forall y\forall z\left([x, a]=1\to\left[z^{-1}xz, a\right]=1\right)\mathbin{\&}\left([y, b]=1\to\left[z^{-1}yz, b\right]=1\right).$$

Подгруппы A_1 и B_1 абелевы тогда и только тогда, когда в группе G истинна формула

$$\Phi_{22}\overset{\mathrm{df}}{=}\forall x_1\forall x_2\left(\left([x_1, a]=1\mathbin{\&}[x_2, a]=1\right)\vee\left([x_1, b]=1\mathbin{\&}[x_2, b]=1\right)\right)\to$$
$$\to x_1x_2=x_2x_1).$$

Группа G порождается нормальными подгруппами A_1 и B_1, т. е. $G=A_1B_1$, тогда и только тогда, когда в G истинна формула:

$$\Phi_{23}\overset{\mathrm{df}}{=}\forall z\exists x\exists y\left([x, a]=1\mathbin{\&}[y, b]=1\mathbin{\&}z=xy\right).$$

Наконец, $A_1\cap B_1=Z(G)$ тогда и только тогда, когда в G истинна формула

$$\Phi_{24}\overset{\mathrm{df}}{=}\forall z\left(\forall z_1(zz_1=z_1z)\leftrightarrow([z, a]=1\mathbin{\&}[z, b]=1)\right).$$

Понятно, что в качестве Φ_2 можно взять формулу

$$\Phi_{21}\mathbin{\&}\Phi_{22}\mathbin{\&}\Phi_{23}\mathbin{\&}\Phi_{24}.$$

Построим формулу Φ_6, соответствующую коммутативности кольцевого умножения в $A_1/Z(G)$. Напомним, что $a_1\circ a_2=\left[a_1, a_2^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}$, где a_1, a_2 — элементы группы $A_1/Z(G)$. Для любых $a_1, a_2\in A_1/Z(G)$ равенство $a_1\circ a_2=a_2\circ a_1$ выполняется в группе $A_1/Z(G)$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2\in A_1$

$$[x_1, b_2]=[x_2, b_1],$$

где b_1 и b_2 — произвольные элементы группы B_1, удовлетворяющие равенствам $b_1^{\psi_2}=a_1^{\psi_1}$, $b_2^{\psi_2}=a_2^{\psi_1}$. Следовательно, в качестве Φ_6 можно взять следующую замкнутую формулу сигнатуры Σ':

$$\forall x_1, x_2 \in A_1 \forall y_1 y_2, y_2 \in B_1(([x_1, b] = [a, y_1] \,\&\, [x_2, b] = [a, y_2]) \to [x_1, y_2] = [x_2, y_1])$$

(здесь $x_1, x_2 \in A_1$ и $y_1, y_2 \in B_1$ — сокращенная запись соответствующих формул).

Пусть Φ_i построена для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 9$. Положим $\Phi_0 = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{9} \Phi_i$, тогда Φ_0 — замкнутая формула сигнатуры Σ'. Искомая формула сигнатуры Σ получается из формулы Φ_0 следующим образом:

$$\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \exists a \exists b \Phi_0,$$

где a и b выступают уже в качестве предметных переменных. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть k — произвольное поле нулевой характеристики, H — группа. Тогда $H \equiv M(k)$ тогда и только тогда, когда $H = M(k_1)$, k_1 — поле и $k \equiv k_1$.*

Доказательство. Пусть I — множество, D — ультрафильтр на I. Если G — произвольная алгебраическая система, то через $\tilde{G}$ будем обозначать ультрастепень G^I/D.

Достаточность. Пусть $H = M(k_1)$ и $k_1 \equiv k$. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся такое множество I и ультрафильтр D на I, что поля $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}$ изоморфны. По леммме 4.2 изоморфны группы $M(\tilde{k}_1)$ и $M(\tilde{k})$. По лемме 3.1 $M(\tilde{k}_1) = \widetilde{M(k_1)}$ и $M(\tilde{k}) = \widetilde{M(k)}$. Таким образом, некоторые ультрастепени групп H и $M(k)$ изоморфны, следовательно, $H \equiv M(k)$.

Необходимость. Пусть $H \equiv M(k)$. Поле k содержит поле $\mathbf{Q}$, поэтому $M(k)$ — делимая группа, т. е. для любого натурального числа n в группе $M(k)$ истинна формула $\forall x \exists y(y^n = x)$, следовательно, группа H также делимая, иначе говоря, H — $\mathbf{Q}$-группа. Группа $M(k)$ удовлетворяет условиям М1.1 — М1.9, по лемме 4.3 группа H тоже удовлетворяет условиям М1.1—М1.9, пусть A_1, B_1, $a \in A_1$, $b \in B_1$ — подгруппы группы H, удовлетворяющие вместе с элементами a, b условиям М1.1—М1.9. Тогда A_1 — централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b. Централизатор любого множества о-степенной группы сам является о степенной подгруппой, поэтому A_1, B_1, $Z(G)$ — абелевы $\mathbf{Q}$-подгруппы группы H, причем $Z(G) < A_1$, $Z(G) < B_1$. В векторных пространствах каждое подпространство имеет прямое дополнение, поэтому найдутся такие $\mathbf{Q}$-подгруппы $A < A_1$, $B < B_1$, что $A_1 = A \times Z(G)$, $B_1 = B \times Z(G)$. Заметим, что $a \in A$, $b \in B$. Оказывается, что группа H вместе с подгруппами A, B и элементами a, b удовлетворяет М1—М9. Проверим, например, что группа H порождается подгруппами A и B. Условия М1.1—М1.4 гарантируют совпадение центра и коммутанта группы H, группа H нильпотентна, коммутант, а значит и центр, лежит в подгруппе Фраттини — подгруппе «непорождающих» элементов группы H, следовательно, $H = \text{гр}(A_1, B_1) = \text{гр}(A, B, Z(G)) = \text{гр}(A, B)$. Проверка остальных условий достаточно очевидна и опирается на разложение $A_1 = A \times Z(G)$ и $B_1 = B \times Z(G)$. Таким образом, группа H удовлетворяет условиям М1—М9, следовательно, по лемме 4.1 $H = M(k_1)$, где k_1 — некоторое поле. Группы $M(k_1)$ и $M(k)$ элементарно эквивалентны, по теореме Кейслера — Шелаха найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что группы $\widetilde{M(k_1)}$ и $\widetilde{M(k)}$ изоморфны. По лемме 3.1 $\widetilde{M(k_1)} = M(\tilde{k}_1)$ и $\widetilde{M(k)} = M(\tilde{k})$, следовательно, по лемме 4.2 поля $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}$ изоморфны, поэтому поля k_1 и k элементарно эквивалентны. Лемма доказана.

Подобно условиям М1—М9 и М1.1—М1.9 модельной группы укажем определяющие условия для квазимодельной группы. По существу квазимодельная группа отличается от модельной тем, что ее центр не обязан совпадать с коммутантом. Поэтому если в п. М2 условий М1—М9 требование $G = \text{гр}(A, B)$ заменить на $G = \text{гр}(A, B) \cdot Z(G)$, в п. М3, М4 центр $Z(G)$ заменить на коммутант G', то получим условия К1—К9, характеризующие квазимодельную группу. Аналогично, если в п. М1.3 и М1.4 условий М1.1—М1.9 центр $Z(G)$ заменить на коммутант G', остальные оставить без изменений, то получим условия К1.1—К1.9.

Доказательства всех последующих лемм, кроме леммы 4.8, почти дословно повторяют рассуждения в случае модельной группы.

Лемма 4.5. *Группа G является квазимодельной группой $K(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* К1—К8, *причем является квазимодельной группой над полем тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* К1—К9.

Лемма 4.6. *Пусть группа G изоморфна группе $K(\mathfrak{o})$. Тогда $G = K(\mathfrak{o}_1)$, причем кольца $\mathfrak{o}_1$ и $\mathfrak{o}$ изоморфны.*

Доказательство следует из леммы 4.2.

Заметим, что квазимодельная группа $K(\mathfrak{o})$ определяется не однозначно, а с точностью до центральной «добавки». Поэтому две квазимодельные группы над одним и тем же кольцом не обязаны быть изоморфны между собой.

Лемма 4.7. *Существует замкнутая формула Φ групповой сигнатуры такая, что группа G удовлетворяет условиям* К1.1—К1.9 *тогда и только тогда, когда Φ истинна на G.*

Лемма 4.8. *Пусть $K(\mathfrak{o})$ — делимая квазимодельная не модельная группа, причем $\mathfrak{o}$ — поле. Делимая группа H элементарно эквивалентна группе $K(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда $H = K(\mathfrak{o}_1)$, H — немодельная, причем поля $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}_1$ элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Для произвольного множества I, ультрафильтра D на I, произвольной алгебраической системы G через $\tilde{G}$ будем обозначать ультрастепень G^I/D.

Достаточность. Пусть $H = K(\mathfrak{o}_1)$, причем $\mathfrak{o} \equiv \mathfrak{o}_1$. По условию группы H и $K(\mathfrak{o})$ делимые, следовательно, по лемме 1.12

$$K(\mathfrak{o}_1) = M(\mathfrak{o}_1) \times A_1, \quad K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \times A,$$

где A_1 и A — делимые абелевы группы. Хорошо известно [10], что любые две делимые абелевы группы элементарно эквивалентны, значит, $A_1 \equiv A$. По лемме 3.3 найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что одновременно поле $\tilde{\mathfrak{o}}_1$ изоморфно полю $\tilde{\mathfrak{o}}$, а группа $\tilde{A}_1$ изоморфна группе $\tilde{A}$. В силу лемм 3.2 и 3.1 имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \widetilde{K(\mathfrak{o}_1)} &= \widetilde{M(\mathfrak{o}_1)} \times \tilde{A}_1 = M(\tilde{\mathfrak{o}}_1) \times \tilde{A}_1, \\ \widetilde{K(\mathfrak{o})} &= \widetilde{M(\mathfrak{o})} \times \tilde{A} = M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из равенств (1), учитывая изоморфность групп $M(\tilde{\mathfrak{o}}_1)$ и $M(\mathfrak{o})$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}$, получаем изоморфизм ультрастепеней $\widetilde{K(\mathfrak{o}_1)}$ и $\widetilde{K(\mathfrak{o})}$, следовательно, группы $K(\mathfrak{o}_1)$ и $K(\mathfrak{o})$ элементарно эквивалентны.

Необходимость. Пусть $H \equiv K(\mathfrak{o})$. По лемме 4.7 группа H удовлетворяет условиям К1.1—К1.9. По условию группа H делимая. Рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 4.4, показывают, что в этом случае в группе H можно выделить модельную группу $M(\mathfrak{o}_1)$ над некоторым полем $\mathfrak{o}_1$, причем так, что $H = M(\mathfrak{o}_1) \cdot Z(H)$. Иначе говоря, $H = K(\mathfrak{o}_1)$. Осталось доказать, что $\mathfrak{o} \equiv \mathfrak{o}_1$. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что группа $\widetilde{K(\mathfrak{o})}$ изоморфна группе $\widetilde{K(\mathfrak{o}_1)}$. Отсюда следует изоморфизм групп $M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}$ и $M(\tilde{\mathfrak{o}}_1) \times \tilde{A}_1$, где A и A_1 определяются из равенств $K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \times A$, $K(\mathfrak{o}_1) = M(\mathfrak{o}_1) \times A$. По лемме 4.6 получаем, что группа $M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}$ является квазимодельной группой как над полем $\tilde{o}$, так и над некоторым полем, изоморфным полю $\tilde{o}_1$. Докажем, что в этом случае поля $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$ изоморфны, тем самым будет доказана элементарная эквивалентность полей $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$. Оказывается верно следующее, более общее утверждение. Пусть $G = M(k)Z(G) = M(k_1)Z(G)$, где k и k_1 — произвольные поля характеристики ноль, тогда поля k и k_1 изоморфны. Действительно, пусть a, b, $[a, b] \neq 1$ — k-порождающие группы $M(k)$. Тогда $a = a_1z_1$, $b = b_1z_2$, где a_1, $b_1 \in M(k_1)$, z_1, $z_2 \in Z(G)$, причем $[a_1, b_1] \neq 1$. Так как k_1 — поле, то a_1 и b_1 — k_1-порождающие группы $M(k_1)$. Операция $\circ$, построенная на коммутанте G' группы G при помощи элементов a и b, превращает G' в кольцо, изоморфное полю k. С другой стороны, операция $\circ^1$, построенная на коммутанте G' группы G, при помощи элементов a_1 и b_1 превращает G' в кольцо, изоморфное полю k_1. Так как $a = a_1z_1$, $b = b_1z_2$, элементы z_1, $z_2 \in Z(G)$, то операции $\circ$ и $\circ^1$ на группе G' совпадают, следовательно, поля k и k_1 изоморфны. Возвращаясь к доказательству леммы, получаем изоморфизм полей $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$. Лемма доказана.

Отметим следующий факт, попутно доказанный нами в лемме 4.8. Пусть $K(o_1) = K(o_2)$, причем кольца o_1 и o_2 являются полями. Тогда поля o_1 и o_2 изоморфны.

Доказательства лемм 4.4 и 4.8 содержат некоторую общую часть, а именно, если G — делимая группа, то из выполнимости в группе G условий М1.1—М1.9 или К1.1—К1.9 следует соответственно выполнимость в группе G условий М1—М9 или К1—К9. Зафиксируем это утверждение в качестве леммы.

Лемма 4.9. *Пусть G — делимая группа. Тогда условия* М1—М9 *выполняются в группе G тогда и только тогда, когда выполняются условия* М1.1—М1.9. *Аналогично выполнимость в группе G условий* К1—К9 *равносильна выполнимости в группе G условий* К1.1—К1.9.

Из выполнимости в группе G условий К1.1—К1.4 не следует, что группа G — квазимодельная, однако верна следующая

Лемма 4.10. *Пусть k-группа G конечного ранга удовлетворяет условиям* К1.1—К1.4, *тогда группа G содержит относительно формульную квазимодельную группу G_1, причем если G — o-степенная группа, то G_1 — o-степенная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть группа G вместе с подгруппами A, B и элементами $a \in A$, $b \in B$ удовлетворяет условиям К1.1—К1.4. Тогда на группах $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$ можно ввести структуру кольца с единицей и без делителей нуля, но в общем случае неассоциативного и некоммутативного. Если элемент $x \in A$, то через $\bar{x}$ будем обозначать образ элемента x в группе $A/Z(G)$. Пополним групповую сигнатуру символами предметных констант a и b, которые в группе G будут интерпретироваться элементами a и b. Полученную сигнатуру обозначим через Σ'. В лемме 4.3 показано, как определить операцию $\circ$ в группах $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$ на языке формул сигнатуры Σ'. Поэтому в следующих формулах мы будем для краткости употреблять символ операции $\circ$, подразумевая под этим обозначение соответствующей формулы.

Первый шаг. Выделим множество элементов группы A, образы которых в $A/Z(G)$ составляют центр кольца $A/Z(G)$. Пусть

$$A_1 = \{a_1 \in A \mid \forall a_2 \in A(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \circ \bar{a}_1)\}.$$

Очевидно, что A_1 — Q-подгруппа и выделяется в группе A формулой сигнатуры Σ', причем образ подгруппы в группе $A/Z(G)$ образует коммутативное подкольцо — центр кольца $A/Z(G)$. Аналогично выделяется подгруппа B_1 группы B. Заметим, что подгруппы A_1 и B_1, по крайней мере, содержат центр $Z(G)$ и соответственно Q-подгруппы гр(a)Q и гр(b)Q. Действительно, элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — кольцевые единицы колец $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$, которые на самом деле являются Q-алгебрами (группы A, B,

$Z(G)$ — $\mathbf{Q}$-группы), поэтому однопараметрические $\mathbf{Q}$-подпространства, натянутые на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, лежат соответственно в центрах колец $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$.

Второй шаг. Выделим в подгруппе A_1 элементы, образы которых составляют ассоциативное подкольцо кольца $A_1/Z(G)$. Пусть

$$A_2 = \{a_2 \in A_1 \mid \forall x,\ y \in A_1 (\bar{a}_2 \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) = (\bar{a}_2 \circ \bar{x}) \circ \bar{y}\}.$$

Непосредственно проверяется, что A_2 — $\mathbf{Q}$-подгруппа группы A_1, содержащая элемент a и центр $Z(G)$. Очевидно, что подгруппа A_2 выделяется в группе A_1 (а значит, и в группе G) формулой сигнатуры Σ'. Аналогично выделяется подгруппа B_2 в группе B_1.

По построению кольца $A_2/Z(G)$ и $B_2/Z(G)$ — ассоциативные, коммутативные $\mathbf{Q}$-алгебры без делителей нуля, следовательно, кольца $A_2/Z(G)$ и $B_2/Z(G)$ биномиальны. Пусть $G_1 = \text{гр}(A_2, B_2) = A_2 \cdot B_2$, тогда G_1 — формульная подгруппа группы G сигнатуры Σ'. Непосредственно проверяется, что группа G_1 удовлетворяет условиям К1.1—К1.8. Так как группа G_1 делимая, то по лемме 4.9 группа G удовлетворяет условиям К1—К8, следовательно, по лемме 4.5 G_1 квазимодельная. Если группа G — о-степенная группа, то непосредственно проверяется, что подгруппы A_1 и A_2, B_1 и B_2 — о-степенные подгруппы группы G. Следовательно, группа $G_1 = \text{гр}(A_2, B_2)$ также является о-степенной подгруппой группы G. Лемма доказана.

Лемма 4.11. *Пусть k — поле характеристики нуль, G — k-степенная группа конечного ранга, удовлетворяющая условиям* К1.1—К1.4. *Тогда группа G содержит относительно формульную квазимодельную группу $K(k_1)$,* где *k_1 — некоторое конечное алгебраическое расширение поля k.*

Доказательство. По лемме 4.10 группа G содержит k-степенную относительно формульную подгруппу G_1 являющуюся квазимодельной группой $K(\mathfrak{o})$, где $\mathfrak{o}$ — некоторая область целостности. По определению квазимодельной группы $K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \cdot Z(K(\mathfrak{o}))$. Пусть a, b — порождающие группы $M(\mathfrak{o})$, A — централизатор элемента a в группе $M(\mathfrak{o})$. Как отмечалось ранее, на группе A при помощи формулы (O_4) можно определить структуру кольца, причем кольца A и $\mathfrak{o}$ изоморфны. Легко видеть, что отображение $\alpha \in k \to a^\alpha \in A$ является мономорфизмом колец. Группа A — k-степенная группа конечного ранга, поэтому кольцо A является конечномерной коммутативной алгеброй без делителей нуля над полем k; следовательно, A — поле конечной размерности над k. Таким образом, $K(A)$ — искомая квазимодельная группа. Лемма доказана.

§ 5. ИЗОМОРФИЗМЫ СТЕПЕННЫХ ГРУПП

На протяжении всего параграфа символ k означает поле характеристики нуль.

Определение. Поле k будем называть *автоустойчивым,* если любой изоморфизм $\theta : k_1 \to k_2$ произвольных конечных алгебраических расширений k_1 и k_2 поля k оставляет поле k на месте, т. е. $k^\theta = k$.

Например, простые и алгебраические замкнутые поля являются автоустойчивыми.

Лемма 5.1. *Пусть I — множество, D —ультрафильтр на I. Тогда поле $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^I/D$ является автоустойчивым.*

Доказательство. Пусть k — произвольное конечное алгебраическое расширение поля $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^I/D$. Поле $\tilde{\mathbf{Q}}$ — характеристики нуль, следовательно, k — сепарабельное расширение поля $\tilde{\mathbf{Q}}$. Пусть α — примитивный элемент расширения k над $\tilde{\mathbf{Q}}$, $f(x) \in \tilde{\mathbf{Q}}[x]$ — неприводимый над $\tilde{\mathbf{Q}}$ многочлен такой, что $f(\alpha) = 0$, $f(x) = \tilde{a}_n x^n + \ldots + \tilde{a}_0$, где $\tilde{a}_i \in \tilde{\mathbf{Q}}$, $i = 0, \ldots$

..., n. Обозначим через $\prod\limits_I \mathbf{Q}$ декартову степень поля $\mathbf{Q}$, тогда элементы $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_n$ суть классы эквивалентности по фильтру D некоторых элементов $a_0, \ldots, a_n$ из $\prod\limits_I \mathbf{Q}$. Для каждого $i \in I$ через $f_i(x)$ обозначим многочлен $a_n(i)x^n + \ldots + a_0(i)$ с рациональными коэффициентами. Пусть $\alpha_i \in \mathbf{C}$ — произвольный корень многочлена $f_i(x)$. Через k_i обозначим поле $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$. Тогда $k = \prod\limits_I k_i/D$. Действительно, поле $\tilde{k} = \prod\limits_I k_i/D$ содержит поле $\tilde{\mathbf{Q}}$, пусть $\tilde{\alpha}$ — класс эквивалентности функции $i \in I \to \alpha_i \in k_i$ из декартова произведения $\prod\limits_I k_i$. Ясно, что $\tilde{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$, причем $\tilde{k} = \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha)$. Следовательно, поля k и $\tilde{k} = \prod\limits_I k_i/D$ изоморфны. По теореме Д. Робинсон [10] для любого натурального n существует формула $\Phi_n(x)$ кольцевой сигнатуры, выделяющая поле $\mathbf{Q}$ в каждом конечном алгебраическом расширении K поля $\mathbf{Q}$ степени не выше n. По лемме 3.4 формула Φ_n выделяет поле $\tilde{\mathbf{Q}}$ в поле $\tilde{k} = k$. Очевидно, что любой автоморфизм поля k оставляет поле $\tilde{\mathbf{Q}}$ на месте. Лемма доказана.

Введем некоторые обозначения. Пусть k — поле характеристики нуль. Через $T(k)$ будем обозначать класс всех k-степенных групп конечного ранга, центр которых содержится в коммутанте, $T_0(k)$ — подкласс класса $T(k)$, состоящий из всех $\mathbf{Q}$-определенных групп класса $T(k)$.

Лемма 5.2. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда для любой пары a, b некоммутирующих элементов группы G, $[a, b] \in Z(G)$, существует относительно формульная подгруппа, содержащая элементы a, b и удовлетворяющая условиям $K1$—$K4$ квазимодельной группы.*

Доказательство. Пусть a, $b \in G$, причем $1 \neq [a, b] \in Z(G)$. В силу конечности ранга группы G, любая убывающая последовательность k-подгрупп группы G стабилизируется через конечное число шагов (лемма 1.11), поэтому множество относительно формульных k-степенных подгрупп группы G, содержащих элементы a и b, имеет минимальный элемент, обозначим его через Φ. Докажем, что Φ — искомая относительно формульная подгруппа. Доказательство разбивается на два случая.

Пусть подгруппа Φ нильпотентна ступени два. Проверим, что Φ удовлетворяет условиям K1.1—K1.4 квазимодельной группы. K1.1. Пусть $A = C_\Phi(a)$, $B = C_\Phi(b)$ — централизаторы элементов a, b в группе Φ. K1.2. A и B — относительно формульные k-степенные подгруппы группы Φ, причем $a \in A$, $b \in B$. Группа гр.$(A, B) = A \cdot B$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, содержащая элементы a и b, ввиду минимальности Φ имеем равенство $\Phi = A \cdot B$. Докажем, что $A \cap B = Z(\Phi)$. Действительно, пусть элемент c принадлежит подгруппе $A \cap B$. Централизатор $C_\Phi(c)$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем a, $b \in C_\Phi(c)$, следовательно $C_\Phi(c) = \Phi$, иначе говоря $c \in Z(\Phi)$. Подгруппы A и B абелевы. Пусть, напротив, существуют, например, элементы a_1, $a_2 \in A$ такие, что $[a_1, a_2] \neq 1$. Централизатор $C_\Phi(a_1)$ элемента a_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $C_\Phi(a_1)$ содержит элемент a. Тогда группа $C_\Phi(a_1) \cdot B$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, содержащая элементы a и b, из минимальности Φ получаем $C_\Phi(a_1) \cdot B = \Phi = A \cdot B$. Поэтому $a_2 = xy$, где $x \in C_\Phi(a_1)$, $y \in B$. Следовательно, $x^{-1}a_2 = y$ и элемент $x^{-1}a_2 \in A \cap B = Z(\Phi)$. Таким образом, элементы x и a_2 отличаются на центральный элемент, значит, $a_2 \in C_\Phi(a_1)$ — противоречие.

К1.3—К1.4. Докажем, что $[a, B]=[A, b]=[\Phi, \Phi]$. Пусть

$$A_1=\{x\in A\mid [x, B]\leqslant [a, B]\},$$

$$B_1=\{y\in B\mid [A_1, y]\leqslant [A_1, b]\}.$$

Очевидно, что A_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, следовательно, B_1 — также относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $a\in A_1$, $b\in B_1$, $A_1\geqslant Z(\Phi)$, $B_1\geqslant Z(\Phi)$. Подгруппа гр $(A_1, B_1)=A_1\cdot B_1$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, следовательно, $\Phi=A_1\cdot B_1$. Рассуждения, проведенные в предыдущем пункте, показывают, что в этом случае $A=A_1$, $B=B_1$. Подгруппы A и B — абелевы, поэтому коммутант Φ' группы Φ равен $[A, B]=[a, B]=[A, b]$.

Пусть для некоторых элементов $a_1, a_2\in A$ имеем равенство $[a_1, b]=[a_2, b]$. Тогда $\left[a_1a_2^{-1}, b\right]=1$ и элемент $a_1a_2^{-1}\in A\cap B=Z(\Phi)$, следовательно, $a_1=a_2 \pmod{Z(\Phi)}$. Аналогично проверяется, что из $[a, b_1]=[a, b_2]$ следует $b_1=b_2 \pmod{Z(\Phi)}$.

Мы установили, что группа Φ удовлетворяет условиям К1.1—К1.4 Группа Φ — делимая, следовательно, по лемме Φ удовлетворяет также условиям К1.—К4.

Общий случай. Пусть Φ — минимальная относительно формульная k-степенная подгруппа группы G, содержащая элементы a и b. Для доказательства леммы достаточно понять, что Φ имеет ступень нильпотентности два. По условию элемент $[a, b]$ лежит в центре группы G. Пусть

$$\Phi_1=\{x\in \Phi\mid [x, a]\in Z(G)\ \&\ [x, b]\in Z(G)\}.$$

Очевидно, что Φ_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $a, b\in \Phi_1$. Пусть

$$\Phi_2=\{x\in \Phi_1\mid \forall y\in \Phi_1([y, x]\in Z(G))\}.$$

Тогда Φ_2 — k-степенная относительно формульная подгруппа группы Φ ступени нильпотентности два, причем $a, b\in\Phi_2$. В силу минимальности Φ получаем равенство $\Phi=\Phi_2$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда существует центральный ряд относительно формульных k-подгрупп*

$$Z(G)=R_0\leqslant R_1\leqslant\ldots\leqslant R_n=G$$

группы G такой, что для любого изоморфизма k-групп $\varphi: G\to H$ ограничение φ на R_i является полулинейным по модулю R_{i-1}.

Доказательство. Пусть a — элемент группы G такой, что для некоторого y из G коммутатор $[a, y]$ нееденичен и лежит в центре $Z(G)$ (например, $a\in Z_2(G)\backslash Z(G)$). По лемме 5.2 существует относительно формульная k-подгруппа Φ группы G, содержащая элементы a, y и удовлетворяющая условиям К1—К4. По лемме 4.12 найдется элемент b из Φ, $[a, b]\neq 1$, и относительно формульная подгруппа $K(a, b)\leqslant\Phi$ — квазимодельная над некоторым полем, k_1-конечным алгебраическим расширением поля k, причем $K(a, b)$ содержит элементы a, b. Тогда относительно формульна и подгруппа $[a, b]^{k_1}$ — коммутант группы $K(a, b)$. Действительно,

$$K(a, b)'=\{[x, y]\mid x\in A,\ y\in B\},$$

где A и B — централизаторы в группе $K(a, b)$ соответственно элементов a и b. (Очевидно, A и B относительно формульны.)

Из построения подгруппы Φ в лемме 5.2 ясно, что $K(a, b)'\leqslant Z(G)$. В частности, $[a, b]^{k_1}$ — нормальная подгруппа группы G.

Положим
$$R(G)=\{x\in G\,|\,\forall y\,[x,y]\in[a,b]^{k_1}\}.$$

Легко понять, что $R(G)$ — прообраз центра при естественном эпиморфизме
$$\eta: G\to G/[a,b]^{k_1},$$
следовательно, справедливы включения
$$R(G)\geqslant z(G)\geqslant[a,b]^{k_1}.$$

Зафиксируем произвольно изоморфизм k-групп $\varphi: G\to H$. Для элемента a из G через $\bar{a}$ будем для краткости обозначать элемент a^{φ} из H.

Докажем, что изоморфизм φ полулинейный на подгруппе $[a,b]^{k_1}$. Из построения $K(a,b)$ ясно, что $K(a,b)^{\varphi}$ — k-подгруппа группы H. Действительно, достаточно в доказательстве леммы 5.2 рассмотреть минимальную относительно формульную k-подгруппу Φ, содержащую элементы a, b и образ которой при любом изоморфизме k-групп $\varphi: G\to H$ является k-подгруппой группы H. Дословно повторяя рассуждения леммы 5.2, легко убедиться, что Φ удовлетворяет условиям К1—К4. Аналогично проверяется, что образ подгруппы $K(a,b)$, построенной в лемме 4.12, при изоморфизме φ также является k-подгруппой. Так как $K(a,b)^{\varphi}$ изоморфна $K(a,b)$, то по лемме 4.2 $K(a,b)^{\varphi}$ — квазимодельная подгруппа над полем k', причем ограничение θ изоморфизма φ на подгруппу $[a,b]^{k_1}$ является изоморфизмом полей k_1 и k'. По условию поле k автоустойчиво, следовательно, $k^{\theta}=k$.

Пусть $[u,v]\in[a,b]^{k_1}$, $\lambda\in k$. Обозначим через $\circ$ операцию кольцевого умножения на коммутанте квазимодельной группы $K(a,b)$, а через $\bar{\circ}$ — соответствующую операцию в $K(a,b)^{\varphi}$. Тогда
$$[u,v]^{\lambda}=[u,v]\circ[a,b]^{\lambda},$$
следовательно,
$$\overline{[u,v]^{\lambda}}=\overline{[u,v]}\,\bar{\circ}\,\overline{[a,b]^{\lambda}}=[\bar{u},\bar{v}]\,\bar{\circ}\,[\bar{a},\bar{b}]^{\lambda\theta}=[\overline{u,v}]^{\lambda\theta},$$
что и доказывает полулинейность изоморфизма φ на $[a,b]^{k_1}$.

Докажем теперь, что φ — полулинейный по модулю $Z(H)$ на подгруппе $R(G)$. Возьмем произвольный нецентральный элемент x из $R(G)$. Положим $\bar{c}=\overline{x^{\lambda}}\bar{x}^{-\lambda\theta}$, т. е.
$$\overline{x^{\lambda}}=\bar{x}^{\lambda\theta}\bar{c},$$
и докажем, что $\bar{c}$ лежит в центре группы H. Пусть $\bar{y}$ — произвольный элемент из H.

Тогда
$$\overline{[x^{\lambda},y]}=[\bar{x}^{\lambda\theta}\bar{c},\bar{y}]=[\bar{x},\bar{y}]^{\lambda\theta}[\bar{c},\bar{y}]. \qquad (1)$$

Заметим, что равенство $[\bar{x}^{\lambda\theta},\bar{y}]=[\bar{x},\bar{y}]^{\lambda\theta}$ справедливо, так как по построению $R(G)$ элемент $[\bar{x},\bar{y}]$ лежит в центре $Z(H)$.

С другой стороны, $[x^{\lambda},y]\in[a,b]^{k_1}$ и в силу полулинейности φ на $[a,b]^{k_1}$ имеем:
$$\overline{[x^{\lambda},y]}=\overline{[x,y]^{\lambda}}=\overline{[x,y]}^{\lambda\theta} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $[\bar{c},\bar{y}]=1$. Таким образом, доказано, что φ полулинейный по модулю $Z(H)$ на подгруппе $R(G)$. Возьмем в качестве R_1 подгруппу $R(G)$.

Рассмотрим факторгруппу

$$G_1 = G/[a, b]^{k_1}.$$

Ясно, что $l(G_1) < l(G)$. Используя индукцию по рангу, можно считать, что в группе G_1 искомая цепочка подгрупп

$$Z(G) \leqslant R_1(G_1) \leqslant \ldots \leqslant R_s(G_1) = G_1$$

уже построена. Положим

$$R_{i+1} = (R_i(G))^{\eta^{-1}}, i = 1, \ldots, s.$$

Подгруппы R_{i+1} относительно формульны. Действительно, пусть $\Phi_i\left(x, a_1^{\eta_1}, \ldots, a_m^{\eta}\right)$ — формула с константами из G_1, выделяющая подгруппу $R_i(G_1)$ в G_1, $\Psi(x, b_1, \ldots, b_t)$ — формула с константами из G, выделяющая $[a, b]^{k_1}$ в G. Будем считать, что Φ_i находится в приведенной пренексной нормальной форме, т. е. $\Phi_i = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\Phi_{i0}$, где Q_i — кванторы, Φ_{i0} находится в дизъюнктивной нормальной форме и каждая атомарная подформула Φ_{i0} имеет вид либо $uv = w$, либо $y \neq z$.

Формула, выделяющая R_{i+1} в G, получается из Φ_i переписыванием подформулы Φ_{i0}, по модулю подгруппы $[a, b]^{k_1}$. А именно, каждую атомарную подформулу вида $uv = w$ заменим на формулу

$$\exists f(\psi(f) \;\&\; uv = wf),$$

а каждую атомарную формулу вида $y \neq z$ заменим на формулу

$$\forall f(\psi(f) \rightarrow y \neq zf).$$

Далее элементы $a_1^{\eta}, \ldots, a_m^{\eta}$ заменим на $a_1, \ldots, a_m$. Очевидно, что полученная формула выделяет R_{i+1} в G.

Из включения $R_1(G_1) \geqslant Z(G_1)$ и равенства $R_1(G) = Z(G_1)^{\eta-1}$ следует, что

$$Z(G) \leqslant R_1(G) \leqslant R_2(G) \leqslant \ldots \leqslant R_{s+1} = G. \tag{3}$$

Пусть изоморфизм φ индуцирует на факторгруппе G_1 изоморфизм $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H_1$, где

$$H_1 = H\Big/\left([a, b]^{k_1}\right)^{\varphi}.$$

Как было доказано выше, $\left([a, b]^{k_1}\right)^{\varphi}$ — k-подгруппа группы H. Поэтому φ_1 является изоморфизмом k-групп. По индукции ограничение φ_1 на $R_1(G_1)$ является полулинейным по модулю $Z(G_1)$, поэтому переходя к прообразам получим, что ограничение φ на $R_2(G)$ является полулинейным по модулю $R_1(G)$. Полулинейность φ в факторах R_{i+1}/R_i очевидна.

Центральность ряда подгрупп (3) непосредственно следует из построения.

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий что даже в случае ступени нильпотентности два не каждый изоморфизм k-групп является полулинейным по модулю центра.

Лемма 5.3. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле с нетривиальным дифференцированием η, в частности k автоустойчиво, $\mathfrak{o}$ — двумерная k-алгебра с порождающими $1, c$, причем $c^2 = 0$. Тогда модельная группа $M(\mathfrak{o})$, рассматриваемая как k-группа, обладает автоморфизмом, не являющимся полулинейным по модулю центра.*

Доказательство. Определим сначала автоморфизм θ кольца $\mathfrak{o}$ следующим образом. Положим

$\theta : 1 \cdot \alpha \rightarrow 1 \cdot \alpha + c\alpha^{\eta}$,

$\theta : c\alpha \to c\alpha$,
для каждого $\alpha \in k$.

Проверка аддитивности и мультипликативности отображения θ проводится прямым вычислением и использует элементарные свойства дифференцирования η. Равенства $\theta(\mathrm{o}) = \mathrm{o}$ и $\ker\theta = 0$ очевидны.

Автоморфизм кольца о индуцирует автоморфизм φ группы $M(\mathrm{o})$. А именно, если a, b, $d = [a, b]$ — о-порождающие группы $M(\mathrm{o})$, то положим

$$(a^\alpha b^\beta d^\gamma)^\varphi = a^{\alpha\theta} b^{\beta\theta} d^{\gamma\theta}.$$

Автоморфизм φ не является полулинейным по модулю $Z(M(\mathrm{o}))$. Действительно, по условию дифференцирование η нетривиально, поэтому найдется элемент $\alpha \in k$, такой, что $\alpha^\eta \neq 0$. Тогда

$$(a^\alpha)^\varphi = a^{\alpha + c\alpha^\eta}.$$

Центр группы $M(\mathrm{o})$ имеет вид $\{d^\lambda | \lambda \in \mathrm{o}\}$, поэтому полулинейность автоморфизма φ по модулю центра означает, что найдутся элементы $x \in k$, $\lambda \in \mathrm{o}$, для которых справедливо равенство:

$$a^{\alpha + c\alpha^\eta} = a^x d^\lambda.$$

Однако a, b, d — мальцевская база группы $H(\mathrm{o})$, следовательно, предыдущее равенство влечет равенство показателей:

$$\alpha + c\alpha^\eta = x,$$

что невозможно, так как $\alpha^\eta \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5.4. *Пусть G — k-группа из класса $T(k)$. Тогда существует мальцевская база $u_1, \ldots, u_n$ группы G такая, что для любого изоморфизма k-групп $\varphi : G \to H$ $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ — мальцевская база группы H.*

Доказательство. Предварительно докажем следующее утверждение. Пусть $f : A \to B$ изоморфизм k-групп, A_1 — нормальная k-подгруппа A такая, что A/A_1-абелева, $B_1 = A_1^f$ — k-подгруппа группы B и изоморфизм f является полулинейным по модулю B_1. Тогда, если $a_1, \ldots, a_m$ — k-база A по модулю A_1, то $a_1^f, \ldots a_m^f$ — k-база B по модулю B_1.

Действительно, пусть $b = (a_1^f)^{\alpha_1} \ldots (a_m^f)^{\alpha_m} \equiv 0 \pmod{B_1}$. Обозначим через θ автоморфизм поля k, соответствующий полулинейному по модулю B_1 изоморфизму f. Тогда найдутся элементы β_i такие, что $\alpha_i = \beta_i\theta$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\left(a_1^{\beta_1} \ldots a_m^{\beta_m}\right)^f \equiv b \equiv 0 \pmod{B_1}$$

и, значит,

$$a_1^{\beta_1} \ldots a_m^{\beta_m} \equiv 0 \pmod{A_1}.$$

В силу независимости системы $a_1, \ldots, a_m$ по модулю A_1 получаем

$$\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = \beta\theta = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \beta_m\theta = 0.$$

С другой стороны, если

$$b^{f^{-1}} \equiv a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\gamma_m} \pmod{A_1},$$

то в силу полулинейности f по модулю B_1 имеем:

$$b \equiv \left(a_1^f\right)^{\alpha_1\theta} \dots \left(a_m^f\right)^{\alpha_m\theta},$$

т. е. $a_1^f, \dots, a_m^f$ — k-база B по модулю B_1.

Построим центральный ряд группы G, начинающийся с единицы, так, чтобы любой изоморфизм k-групп $\varphi : G \to H$ действовал в каждом факторе этого ряда полулинейно.

Рассмотрим ряд k-подгрупп

$$Z(G) = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_n = G, \tag{1}$$

построенный в теореме 5.1. Образуем из него следующий ряд k-подгрупп $R_i' = [R_i, G]$:

$$1 = R_0' \leqslant R_1' \leqslant \dots \leqslant R_n' = G'. \tag{2}$$

Уплотним этот ряд следующим образом. Положим

$$R_{ij} = R_i'\gamma_{c+1-j}(R_{i+1}),$$

$0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant c-1$, $\gamma_{c+1}(G) = 1$. Очевидно, что

$$R_{i0} = R_i' \leqslant R_{i1} \leqslant \dots \leqslant R_{ic-1} = R_{i+1}'. \tag{3}$$

Положим, наконец,

$$Z_{ij} = R_{ij} \cap Z(G).$$

По условию леммы $Z(G) \leqslant G'$ (группа G из класса $T(k)$), поэтому

$$Z(G) = Z(G) \cap G' = Z(G) \cap R_{n-1,\, c-1} = Z_{n-1,\, c-1},$$

$$Z_{00} = R_{00} \cap Z(G) = R_0' \cap Z(G) = 1.$$

Рассмотрим ряд

$$Z_{00} \leqslant Z_{01} \leqslant \dots \leqslant Z_{0c-1} \leqslant \dots \leqslant Z_{n-1,\, c-2} \leqslant Z_{n-1,\, c-1}. \tag{4}$$

Уплотним ряд (1) в первом члене при помощи ряда (4). Полученный ряд

$$1 \leqslant Z_{01} \leqslant \dots \leqslant R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_n = G \tag{5}$$

искомый. Действительно, достаточно доказать, что произвольный изоморфизм k-групп $\varphi : G \to H$ является полулинейным в каждом факторе Z_{ij+1}/Z_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant c-2$. Пусть $x \in Z_{ij+1} = R_i'\gamma_{c-j}(R_{i+1}') \cap Z(G)$. Для простоты обозначим $g^\varphi = \bar g$, $g \in G$, $c-j = t+1$, $\gamma_0(R_{i+1}') = G$. Тогда

$$Z_{ij+1} = R_i'\gamma_t(R_{i+1}') \cap Z(G),$$

$$Z_{ij} = R_i'\gamma_{t+1}(R_{i+1}') \cap Z(G).$$

Заметим, что для любого j подгруппа Z_{ij} содержит $R_i' \cap Z(G)$. Имеем

$$x = r\Pi[w_s, a_s],$$

где $r \in R_i'$, $w_s \in \gamma_{t-1}(R_{i+1}')$, $a_s \in R_{i+1}'$ при $t \geqslant 2$, $a_s \in R_{i+1}$ при $t = 1$, s пробегает конечное множество индексов. Тогда

$$x \equiv \Pi[w_s, a_s] \pmod{R_i'},$$

$$x^\lambda \equiv (\Pi[w_s, a_s])^\lambda \equiv \Pi\left[w_s, a_s^\lambda\right] \pmod{R_i'}, \quad \lambda \in k,$$

последнее уравнение справедливо, так как элементы $[w_s, a_s]$ центральны по модулю $\gamma_{t+1}(R_{i+1}')'$, а значит, и подгруппы R_i'. Следовательно,

$$\overline{x^\lambda} \equiv \Pi\left[\bar w_s, \bar a_s^{\lambda\theta}\bar c_s\right] \equiv \Pi\left[\bar w_s, \bar a_s^{\lambda\theta}\right][\bar w_s, \bar c_s] \left(\mathrm{mod}\,(R_i')^\varphi\right),$$

где c_s — элементы из подгруппы R_i, а θ — автоморфизм поля k, ассоциированный с полулинейным изоморфизмом, который индуцирован изоморфизмом φ на факторе R_{i+1}/R_i.

Для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, члены ряда (1) удовлетворяют свойству:

$$\gamma_t(R'_{i+1}) \leqslant R'_i, \ t \geqslant 2, \tag{6}$$

Действительно, для $R_0 = Z(G)$ доказательство очевидно. R_1 удовлетворяет (6) по построению (см. теорему 5.1). Для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant n$, свойство (6) доказывается по индукции, переходя как и в теореме 5.1 к факторгруппе

$$G/[a, b]^{k_1} = G/R'_1.$$

В силу свойства (6) получаем $R_{ij} = R'_i$, $Z_{ij} = R'_i \cap Z(G)$, $t \geqslant 2$,

$$[w_s, c_s] \in R'_i$$

и, значит,

$$\overline{x^\lambda} \equiv \Pi[\bar{w}_s, \bar{a}_s]^{\lambda\theta} \equiv (\Pi[\bar{w}_s, \bar{a}_s])^{\lambda\theta} \left(\operatorname{mod} Z_{ij}^{\varphi}\right).$$

Таким образом, (5) искомый. Для завершения доказательства леммы осталось выбрать мальцевскую базу, приуроченную к ряду (5), и воспользоваться утверждением, доказанным в начале доказательства леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.2. *Пусть поле k автоустойчиво, $\varphi : G \to H$ — изоморфизм групп из класса $T_0(k)$, тогда существует k-изоморфизм групп G и H.*

Доказательство. Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G. Тогда по лемме 5.5 $l(G) = l(H)$ и гр$(G_0^\varphi)_k = H$. В этом случае существование k-изоморфизма групп G и H гарантируется теоремой 2.1. Теорема доказана.

§ 6. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ k-СТЕПЕННЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

В этом параграфе будет дана элементарная классификация Q-определенных k-степенных групп конечного ранга для автоустойчивого поля k. В частности, будет дана классификация элементарных теорий Q-групп конечного ранга.

Определение. Пусть G — k-степенная группа, Q — определенная группа конечного ранга. По лемме 1.12 $G = \bar{G} \times A$, где $\bar{G} \in T_0(k)$, $A \leqslant Z(G)$ и $\bar{G}$ определяется по G однозначно с точностью до изоморфизма. Группу $\bar{G}$ будем называть *основой группы* G.

Теорема 6.1. *Пусть поле k таково, что любая ультрастепень k автоустойчива. Если группы G, H элементарно эквивалентны и принадлежат классу $T_0(k)$, то G k-изоморфна H.*

Доказательство. Пусть группы G, H удовлетворяют условиям теоремы. В силу теоремы 3.1 найдутся такие множество I и ультрафильтр D над I, что ультрастепени $\tilde{G} = G^I/D$ и $\tilde{H} = H^I/D$ изоморфны. Обозначим через $\tilde{k}$ ультрастепень k^I/D. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — мальцевская база некоторой равномерной подгруппы G_0 группы G, $b_1, \ldots, b_n$ — мальцевская база равномерной подгруппы H_0 для H. По лемме 3.1 $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ есть пополнения соответственно групп G, H (G_0, H_0) с помощью поля $\tilde{k}$. По лемме

1.9 системы элементов $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ будут мальцевскими базами в группах $\bar{G}$, $\bar{H}$ соответственно, причем многочлены умножения и возведения в степень у групп G_0 и $\bar{G}$, а также у групп H_0 и $\bar{H}$ в этих базах одинаковы. В частности, группы $\bar{G}$, $\bar{H}$ — Q-определены. По теореме 5.2 (после $\bar{k}$ автоустойчиво) существует $\bar{k}$-изоморфизм $\varphi : \bar{G} \to \bar{H}$, так что $m = n$.

Пусть изоморфизм φ на элементах базы $a_1, \ldots, a_m$ группы $\bar{G}$ действует следующим образом:

$$a_i \xrightarrow{\varphi} b^{\eta_i}, \text{ где } \eta_i \in \tilde{k}^n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Запишем условия, характеризующие те отображения φ, которые являются $\bar{k}$-изоморфизмами:

1) элементы b^{η_i}, $i = 1, \ldots, n$, $\bar{k}$-порождают $\bar{H}$,
2) $\forall g \in \bar{G}$, $g \neq 1$, $g^{\varphi} \neq 1$,
3) $\forall g_1, g_2 \in \bar{G}$, $(g_1 g_2)^{\varphi} = g_1^{\varphi} \cdot g_2^{\varphi}$,
4) $\forall p \in \bar{G}$, $\alpha \in \bar{k}$, $(g^{\alpha})^{\varphi} = (g^{\varphi})^{\alpha}$.

Перепишем условия 1—4 на языке коэффициентов. Пусть $a_1, \ldots, a_s$, $s < n$,— система независимых $\bar{k}$-порождающих группы $\bar{G}$. Тогда условие 1 эквивалентно тому, что образы элементов $b^{\eta_1}, \ldots, b^{\eta_s}$ являются базой k-векторного пространства $\bar{H}/[\bar{H}, \bar{H}]$; другими словами, когда самый левый M_s минор s-порядка в матрице, составленной из вектор-строчек $\eta_1, \ldots, \eta_s$, не равен нулю:

1) $M_s \neq 0$, $s \leqslant n$.

Предполагая, что φ — $\bar{k}$-изоморфизм, вычислим образ произвольного элемента $a^{\xi} = a_1^{\xi_1} \ldots a_n^{\xi_n}$ группы $\bar{G}$:

$$a^{\xi} = a_1^{\xi_1} \ldots a_n^{\xi_n} \xrightarrow{\varphi} \left(b^{\eta_1}\right)^{\xi_1} \ldots \left(b^{\eta_n}\right)^{\xi_n}.$$

Так как умножение и возведение в степень в группе $\bar{H}$ производится при помощи многочленов с рациональными коэффициентами, то существует набор многочленов $h_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, с рациональными коэффициентами такой, что

$$(a^{\xi})^{\varphi} = \left(b^{\eta_1}\right)^{\xi_1} \ldots \left(b^{\eta_n}\right)^{\xi_n} = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

где

$$h = (h_1, \ldots, h_n).$$

Условие 2 на языке коэффициентов принимает следующий вид:

2) $\forall \xi \in \bar{k}^n$ вектор $h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi) \neq 0$.

Для записи условия 3 вычислим значения элементов

$$g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, (g_1 g_2)^{\varphi}, \text{ где } g_1 = a^{\alpha}, \ g_2 = a^{\beta}, \ \alpha, \beta \in \bar{k}^n.$$

Пусть в группе $\bar{G}$ умножение в базе a задается при помощи набора многочленов $t = (t_1, \ldots, t_n)$, а в группе H в базе b — при помощи набора $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Тогда

$$(a^{\alpha})^{\varphi} \cdot (b^{\beta})^{\varphi} = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha)} \cdot b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \beta)} = b^{u(h(\alpha), h(\beta))}.$$

Аналогично

$$(a^{\alpha} a^{\beta})^{\varphi} = (a^{t(\alpha, \beta)})^{\varphi} = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, t(\alpha, \beta))}.$$

Условие 3 на языке коэффициентов выглядит следующим образом:

3) $\forall \alpha, \beta \in \bar{k}^n$, $u(h(\alpha), h(\beta)) = h(t(\alpha, \beta))$.

Наконец, перепишем условие 4. Пусть в группе $\bar{G}$ возведение в степень в базе a задается при помощи набора многочленов с рациональными коэффициентами $v=(v_1, \ldots, v_n)$, а в группе $\tilde{H}$ в базе b — при помощи набора $w=(w_1, \ldots, w_n)$. Тогда

$$((a^{\xi})^{\alpha})^{\varphi}=(a^{v(\xi,\alpha)})^{\varphi}=b^{h(\eta_1,\ldots,\eta_n,v(\xi,\alpha))}, \quad \alpha\in\tilde{k}.$$

Аналогично

$$((a^{\xi})^{\varphi})^{\alpha}=\left(b^{h(\eta_1,\ldots,\eta_n,\xi)}\right)^{\alpha}=b^{w(h(\eta_1,\ldots,\eta_n,\xi))}, \quad \alpha\in\tilde{k}.$$

Условие 4 на языке коэффициентов выглядит следующим образом: 4) $\forall\xi\in\tilde{k}^n$, $\alpha\in\tilde{k}$, $h(\eta_1, \ldots, \eta_n, v(\xi(\alpha))=w(h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi))$.

Условия 1—4 записываются формулами Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 кольцевой сигнатуры с константами $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Следовательно, в поле $\tilde{k}$ истинна формула

$$\Phi=\exists\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}, \ldots, \eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}, \ \Phi_1 \,\&\, \Phi_2 \,\&\, \Phi_3 \,\&\, \Phi_4.$$

Так как поле $\tilde{k}$ элементарно эквивалентно полю k, то формула Φ истинна и в поле k, т. е. найдутся такие векторы $\eta_1, \ldots, \eta_n\in k^n$, что для них выполнены условия 1—4. Вышеприведенные рассуждения показывают, что отображение $a_i\to b^{\eta_i}$ продолжается до k-изоморфизма G на H, ибо многочлены умножения и возведения в степень для $\tilde{G}$ и G, а также для $\tilde{H}$ и H совпадают. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Пусть G, H — произвольные $\mathbf{Q}$-группы конечного ранга. Группы G, H элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их основы $\bar{G}$, $\bar{H}$ изоморфны; причем одновременно либо группы G, H совпадают со своими основами, либо не равны им.*

Доказательство. Пусть заключение теоремы выполнено для G, H и пусть $G=\bar{G}\times A$, $H=\bar{H}\times B$, A, $B\neq 1$ — абелевы $\mathbf{Q}$-группы. Тогда $A\equiv B$, так как абелевы делимые группы без кручения составляют полный класс, следовательно, $G\equiv H$. Предположим теперь, что $G\equiv H$. Тогда если $G\in T_0(k)$, то и $H\in T_0(k)$, а потому по теореме 6.1 G изоморфна H. Наконец, разберем случай, когда $G=\bar{G}\times A$, $H=\bar{H}\times B$, A, $B\neq 1$. В силу теоремы 3.1 найдутся изоморфные ультрастепени $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ групп G, H, причем $\tilde{G}=\tilde{\bar{G}}\times\tilde{A}$, $\tilde{H}=\tilde{\bar{H}}\times\tilde{B}$. В силу конечности рангов $\bar{G}$, $\bar{H}$ группы $\tilde{\bar{G}}$, $\tilde{\bar{H}}$ будут $\tilde{\mathbf{Q}}$-группами конечного ранга, а их центры будут содержаться в коммутантах. Следовательно, группы $\tilde{\bar{G}}$, $\tilde{\bar{H}}$ будут основами $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ соответственно. Так как основа определяется по группе однозначно с точностью до изоморфизма, то $\tilde{\bar{G}}$ изоморфна $\tilde{\bar{H}}$, а потому $\bar{G}\equiv\bar{H}$. По теореме 6.1 группа $\bar{G}$ изоморфна $\bar{H}$. Теорема доказана.

Следствие. *Проблема элементарной эквивалентности в классе нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга алгоритмически разрешима.*

Доказательство. В статье [5] указывается алгоритм, позволяющий по конечному копредставлению $\mathbf{Q}$-группы G находить представление любой ее подгруппы, а по порождающим любых двух ее подгрупп копредставление пересечения этих подгрупп. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_n;\ r_1=1, \ldots, r_m=1\rangle$ — конечное копредставление $\mathbf{Q}$-группы G. Находим порождающие центра и коммутанта группы G, а затем и порождающие $b_1, \ldots, b_s$ пересечения центра и коммутанта. Обычными приемами линейной алгебры систему $b_1, \ldots, b_s$ дополняем до неприводимой системы порождающих $b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_{n-s}$ группы G. Подгруппа, порожденная $c_1, \ldots, s_{n-s}$, будет основой G. Таким образом, по копредставлению G алгоритмически определяется копредставление основы и выясняется, принадлежит ли группа G классу $T_0(\mathbf{Q})$ или нет. Следовательно, по теореме 6.2 проблема элементарной эквивалентности нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга сводится к проблеме изоморфизма. Последняя проблема алгоритмически разрешима [1].

А. И. Мальцевым доказано [2], что соответствие между нильпотентными Q-группами и Q-алгебрами Ли взаимно однозначно. Более точно: если L — нильпотентная алгебра Ли над Q, то, задавая операцию $\circ$ на L формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа $x \circ y = x + y + {}^1/_2[x, y] + \ldots$, где $[x, y]$ — лиев коммутант, получаем относительно $\circ$ нильпотентную Q-группу $G(L)$, причем L_1 изоморфна L_2 тогда и только тогда, когда $G(L_1)$ изоморфна $G(L_2)$ и каждая нильпотентная Q-группа изоморфна $G(L)$ для подходящей нильпотентной Q-алгебры Ли. Это соответствие категорное, т. е. если $\varphi: L_1 \to L_2$ — гомоморфизм алгебр Ли, то φ остается гомоморфизмом и в групповой сигнатуре, причем все групповые гомоморфизмы таким образом получаются.

С помощью описанного выше соответствия все результаты статьи о нильпотентных Q-группах переносятся на нильпотентные алгебры Ли. Следует только договориться о выборе сигнатуры, в которой рассматриваются Q-алгебры Ли. Достаточно ограничиться операциями сложения и коммутирования, так как умножение на данное рациональное число — определимая через + операция.

Лемма 6.1. *Нильпотентные Q-алгебры Ли L_1, L_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G(L_1)$ элементарно эквивалентна $G(L_2)$.*

Доказательство. Пусть $L_1 \equiv L_2$. По лемме 3.1 подходящие ультрастепени $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ алгебр Ли L_1, L_2 изоморфны. Так как $\widetilde{G(L_i)} = G(\tilde{L}_i)$, $i = 1, 2$, то Q-группа $\widetilde{G(L_1)}$ изоморфна Q-группе $\widetilde{G(L_2)}$. Отсюда следует, что $G(L_1) \equiv G(L_2)$. Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 6.3. *Конечномерные рациональные нильпотентные алгебры Ли L_1, L_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их основы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ изоморфны; причем одновременно либо алгебры Ли совпадают со своими основами, либо не равны им.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саркисян Р. А.** Об одной проблеме вхождения для когомологий Галуа.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 707—725.
2. **Мальцев А. И.** Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 3, с. 201—212.
3. **Szmielew W.** Elementary properties of Abelian groups.— Fundam. Math., 1954, v. 41, p. 203—271.
4. **Мальцев А. И.** Об элементарных свойствах линейных групп.— В кн.: Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1976, с. 195—215.
5. **Каргаполов М. И. и др.** Алгоритмические вопросы для σ-степенных групп.— Алгебра и логика, 1969, т. 8, № 6, с. 643—659.
6. **Холл Ф.** Нильпотентные группы.— В кн.: Математика. Сб. переводов, 1968, т. 12, № 1, с. 3—36.
7. **Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.
8. **Мальцев А. И.** Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, с. 9—32.
9. **Мальцев А. И.** Об одном соответствии между кольцами и группами.— Мат. сб., 1960, т. 50, № 3, с. 257—266.
10. **Robinson J.** The undecidability of algebraic rings and fields.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, v. 10, p. 950—957.